Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 44–53
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2025. No. 4. P. 44–53
DOI: 10.17076/mat2024

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.212.2+519.175.4

О ЛОКАЛЬНОМ КЛАСТЕРНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены. Распределение случайной величины ξ, равной степени любой вершины графа, при $k \to \infty$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{L}{k^{\tau} \ln^{g} k},$$

где L, $g > 0$, $\tau \in (2, 3)$. Изучаются локальные кластерные коэффициенты $c(s)$ таких графов, отражающие вероятность того, что две разные вершины, смежные с одной и той же вершиной степени s, тоже соединены ребром. Доказана предельная теорема для $c(s)$ при $N \to \infty$ и $s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)})$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; локальный кластерный коэффициент; предельные теоремы

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О локальном кластерном коэффициенте конфигурационного графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 44–53. doi: 10.17076/mat2024

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. ON THE LOCAL CLUSTERING COEFFICIENT OF A CONFIGURATION GRAPH

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider configuration graphs with N vertices whose degrees are independent and identically distributed. The distribution of the random variable ξ, which is defined as the degree of any vertex, is assumed to satisfy the condition

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{L}{k^{\tau} \ln^{g} k},$$

as $k \to \infty$, where L, $g > 0$, $\tau \in (2, 3)$. We study the local clustering coefficient $c(s)$ which can be interpreted as the probability that two different vertices adjacent to a vertex of degree s are also connected by an edge. The limit theorem is proved for the $c(s)$ as $N \to \infty$ and $s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)})$.

Keywords: configuration graph; local clustering coefficient; limit theorems

For citation: Pavlov Yu. L. On the local clustering coefficient of a configuration graph. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 44–53. doi: 10.17076/mat2024

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Введение

Случайные графы успешно используются в качестве моделей разнообразных сложных сетей коммуникаций (Интернет, социальные, электрические, транспортные, биологические, телефонные сети и т. п.). Описанию таких моделей посвящена обширная литература, наиболее полные обзоры публикаций можно найти, например, в книгах [8, 9, 13]. Многие сложные сети обладают схожими свойствами, что, естественно, находит отражение в соответствующих моделях и позволяет строить и исследовать графы, достаточно адекватно описывающие свойства и динамику различных сетей. При моделировании конкретных сетевых структур такой подход сводится к использованию типовых случайных графов и уточнению их параметров.

Наиболее известным общим свойством современных сложных сетей, выявленным в ходе многочисленных наблюдений, является то, что степени узлов сети можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими степенное распределение. С этим свойством связана и другая особенность, состоящая в высоком уровне кластеризации сети, когда узлы нередко образуют группы, концентрирующиеся вокруг узлов с высокой степенью и тесными связями друг с другом внутри таких групп, в то время как плотность связей между группами существенно ниже.

Одним из часто используемых для моделирования сетей видов случайных графов является конфигурационный граф [7]. Различают два вида конструкции такого графа – с заданным множеством степеней вершин и со случайными степенями. Будем считать, что конфигурационный граф содержит N вершин. В первом варианте предполагается, что степени вершин известны и образуют множество $\{d_1, d_2, \ldots, d_N\}$, где d_i – степень i-й вершины, $i = 1, \ldots, N$. Понятно, что сумма степеней $L_N = d_1 + \ldots + d_N$ должна быть четной. Степень каждой вершины равна числу инцидентных этой вершине различимых полуребер, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Граф строится путем попарного случайного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Обычно такое соединение производится равновероятно, что и предполагается в нашей статье. Построение графа со случайными степенями отличается от предыдущего варианта только тем, что степени вершин $1, \ldots, N$ являются реализациями независимых целочисленных неотрицательных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ соответственно и образуют случайный вектор $\mathbf{d} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Именно этот случай рассматривается в статье. Для того чтобы обеспечить четность суммы степеней вершин в случае нечетного значения суммы $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени или к произвольно выбранной (например, равновероятно) вершине графа добавляется одно полуребро. Известно, что появление такого дополнительного элемента не влияет на асимптотические свойства графа при $N \to \infty$, поэтому далее мы считаем, что сумма ζ_N четна. Понятно, что такая конструкция конфигурационного графа допускает появление петель и кратных ребер.

В последние годы значительное внимание уделяется исследованию конфигурационных графов со случайными независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Обозначим ξ случайную величину, закон распределения которой совпадает с распределением $\xi_1, \ldots, \xi_N$ и имеет вид

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau}}, \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $\tau > 1$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Известно (см. [6, 9, 10]), что для моделирования сложных сетей коммуникаций подходящими являются графы с распределением (1) степеней вершин, где $\tau \in (2, 3)$.

В дальнейшем мы будем использовать важное свойство медленно меняющихся функций, состоящее в том, что при достаточно больших

x и любом $\delta > 0$

$$x^{-\delta} < h(x) < x^{\delta}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что распределение случайной величины ξ имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Обозначим

$$m = \mathbf{E}\xi. \qquad (3)$$

Количественными характеристиками степени кластеризации структуры графа являются кластерные коэффициенты. Их значения находятся на основе подсчета числа треугольников графа. Три различные вершины образуют треугольник, если все они соединены друг с другом ребрами. Такое определение означает, как нетрудно видеть, что наличие кратных ребер и петель не влияет на число треугольников. Существует несколько типов кластерных коэффициентов, наиболее известные из них – глобальный и локальный. Глобальный кластерный коэффициент равен отношению утроенного числа треугольников графа к числу пар смежных ребер (см., например, [9]). Таким образом, его можно интерпретировать как вероятность того, что две вершины графа, противоположные общей вершине двух смежных ребер, тоже соединены ребром. В статье [11] рассматривался локальный кластерный коэффициент вершин графа, имеющих степень s, $s \geqslant 2$. Для каждой вершины степени s можно найти число различных треугольников, содержащих эту вершину. Перебирая одну за другой все такие вершины, найдем сумму Δ_s, равную числу треугольников, содержащих хотя бы одну вершину степени s. В [11] локальный кластерный коэффициент $c(s)$ определяется равенством

$$c(s) = \frac{2\Delta_s}{N_s s(s-1)}, \qquad (4)$$

где N_s – число вершин степени s. Понятно, что если треугольник содержит две вершины степени s, то в сумме Δ_s он учтен дважды, и трижды, если все вершины треугольника имеют степень s. Иногда рассматривают локальный кластерный коэффициент отдельной вершины степени s, равный отношению числа различных треугольников, содержащих эту вершину, к потенциально возможному их числу, т. е. к $s(s-1)/2$ (см., например, [4]). Тогда выражение (4) можно понимать как средний локальный кластерный коэффициент вершин степени s. Заметим еще, что конфигурационные графы, в которых кратные ребра объединены в одно ребро, а петли удалены, получили название стертых (erased) (см., например, [12]).

В статье [11] изучалось асимптотическое поведение локальных кластерных коэффициентов. Там же отмечается, что при подсчете числа треугольников в соответствии с перечисленными выше правилами кластерный коэффициент (4) совпадает с локальным кластерным коэффициентом стертого конфигурационного графа. Более того, оказалось, что значения кластерных коэффициентов, найденные без объединения кратных ребер (т. е. треугольники с кратными ребрами считаются неоднократно), существенно выше и не соответствуют наблюдаемой кластерной структуре реальных сложных сетей коммуникаций.

В [11] предполагалось, что распределение ξ при $k \to \infty$ обладает свойством

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = Ck^{-\tau}(1 + o(1)), \qquad (5)$$

где C – положительная постоянная и $\tau \in (2, 3)$. Нетрудно видеть, что распределение со свойством (5) является частным случаем (1), если при $k \to \infty$

$$h(k) \to C. \qquad (6)$$

В [11] рассматривалось предельное поведение $c(s)$ в трех зонах возможных значений s:

1. $s \geqslant 2, s = o(N^{(\tau-1)/(\tau-2)})$;
2. $N^{(\tau-2)/(\tau-1)} = O(s), s = o(\sqrt{N})$;
3. $N = O(s^2)$.

Полученные в [11] асимптотические выражения для $c(s)$ в этих трех зонах отличаются друг от друга, но, естественно, содержат константу C.

Остался открытым вопрос о поведении $c(s)$ при $h(k) \to 0$. Об актуальности такой задачи свидетельствуют, например, работы [2, 3], в которых

$$h(k) \sim \frac{L}{\ln^g k}, \qquad (7)$$

где $L, g > 0$. В [2] показано, что распределения со свойством (7) случайной величины ξ возникают, в частности, в моделях со случайным параметром τ в (1).

В настоящей статье изучается предельное поведение локального кластерного коэффициента $c(s)$ в конфигурационном графе G с N вершинами, в котором распределение степеней вершин определено в (1), где $\tau \in (2, 3)$, а медленно меняющаяся функция $h(x)$ обладает свойством (7). Доказательство полученного ниже результата основано на идеях работы [11] и следует той же схеме. Поэтому в нем нередко используются доказанные в [11] вспомогательные утверждения, соответствующие ссылки на которые приводятся. Подробнее приводятся рассуждения, в которых условие (7) рассматривается вместо (6). Для удобства в ряде случаев мы используем те же обозначения, что и в [11].

В статье доказана теорема о предельном поведении $c(s)$ в первой из перечисленных выше зоне возможных значений s. Мы надеемся, что, следуя предложенной схеме доказательства, будет нетрудно найти предельное поведение локального кластерного коэффициента и при стремлении к нулю $h(x)$ со скоростью, отличающейся от (7).

Из доказанной ниже теоремы следует, что асимптотическое поведение $c(s)$ при выполнении условия (7) сходно с результатом [11]. Оказалось, что при $N \to \infty$, $s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)})$ коэффициент $c(s)$, деленный на $N^{2-\tau} \ln^{1-2g} N$, пропорционален константе.

Статья состоит из семи разделов. Во втором разделе вводятся необходимые обозначения. В третьем разделе формулируется теорема о предельном поведении $c(s)$, эта теорема является основным результатом работы. В разделах 4–6 получены вспомогательные результаты. В разделе 4 доказаны лемма 1 о предельном поведении максимальной степени вершины графа и лемма 2 об оценке условного математического ожидания $c(s)$ относительно случайного вектора $\mathbf{d}$. Полученная в лемме 2 оценка дополняется в разделе 5, где показано, что не рассмотренная до этого второстепенная часть условного математического ожидания $c(s)$ пренебрежимо мала по сравнению с основной частью (лемма 3). В лемме 4 раздела 6 рассматривается условная дисперсия $c(s)$. Наконец, в последнем разделе статьи с помощью полученных вспомогательных результатов доказывается теорема.

Обозначения

Для последовательностей $f(N)$ и $g(N)$, $N = 1, 2, \ldots$, будем, как обычно, писать $f(N) = o(g(N))$, если $\lim\limits_{N\to\infty} f(N)/g(N) = 0$, а для последовательностей случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$ равенство $\eta_N = o_p(g(N))$ означает, что $\mathbf{P}\{|\eta_N/g(N)| > \varepsilon\} \to 0$ при $N \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$. Подобным же образом будем писать $f(N) = O(g(N))$ или $\eta_N = O_p(g(N))$, если существует константа $C > 0$ такая, что $|f(N)/g(N)| \leqslant C$ для всех N или $\mathbf{P}\{|\eta_N/g(N)| \leqslant C\} \to 1$ при $N \to \infty$ соответственно. По традиции символ $\xrightarrow{p}$ означает сходимость по вероятности.

В равенстве (4), как уже говорилось, при подсчете числа треугольников поочередно рассматриваются вершины графа и, если очередная вершина имеет степень s, в сумме Δ_s учитываются все различные треугольники, содержащие эту вершину. Для удобства дальнейшего изложения назовем такую вершину базовой для этих треугольников. В любом отдельно взятом треугольнике будем обозначать u и v другие его вершины (не базовые) и, соответственно, ξ_u и ξ_v – их степени. Из приведенного выше комментария к формуле (4) ясно, что вершины u и v тоже могут иметь степень s, при этом они для данного треугольника базовыми не являются. Подобные обозначения мы будем использовать далее и в случае необходимости одновременного рассмотрения более чем одного треугольника. Например, если имеются два треугольника с общей базовой вершиной, то отличные от нее другие вершины этих треугольников будем обозначать u и v для одного треугольника и w и z для другого. Заметим, что если из вершин u, v, w, z только три разных, то эти треугольники имеют общее ребро. Общее ребро возникает также и при разных базовых вершинах, если только две из вершин u, v, w, z разные. С целью избежать неоднозначности при использовании таких обозначений приводимые в статье выкладки сопровождаются соответствующими комментариями.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и в треугольнике вершины u и v, смежные с базовой, таковы, что

$$\varepsilon m N \leqslant \xi_u \xi_v \leqslant mN/\varepsilon, \tag{8}$$

где, напомним, m означает математическое ожидание случайной величины ξ (см. (3)). Из (1), (3) и условия $\tau \in (2, 3)$ следует, что $m > 0$ и конечно. Пусть степень s базовой вершины удовлетворяет условию

$$s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)}). \tag{9}$$

Следуя [11], обозначим $W_N^s(\varepsilon)$ множество, состоящее из пар вершин u и v, входящих в рассматриваемые треугольники с базовыми вершинами степени s, для которых выполнены условия (8) и (9). Каждому треугольнику и, следовательно, каждому элементу множества $W_N^s(\varepsilon)$ можно присвоить номер базовой вершины. Тогда в $W_N^s(\varepsilon)$ могут встретиться совпадающие пары, но имеющие разные номера, если такая пара образует общее ребро для разных треугольников.

Пусть $c(s, W_N^s(\varepsilon))$ означает вклад в $c(s)$ треугольников, содержащих вершины $u, v \in W_N^s(\varepsilon)$, и $c(s, \overline{W}_N^s(\varepsilon))$ – вклад других треугольников. Понятно, что

$$c(s) = c(s, W_N^s(\varepsilon)) + c(s, \overline{W}_N^s(\varepsilon)). \tag{10}$$

Эта сумма лежит в основе доказательств полученных результатов. Для того чтобы с ее помощью оценить поведение $c(s)$, сначала находится асимптотика первого слагаемого при выполнении условия (8). Затем доказывается, что второе слагаемое в (10) пренебрежимо мало по сравнению с первым.

Символы $C_1, C_2, \ldots$ далее означают некоторые положительные постоянные.

Основной результат

Ниже приводится формулировка основного результата статьи.

Теорема. *Пусть* $\tau \in (2,3)$, $s \geqslant 2$, $N \to \infty$, $s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)})$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{4^g \leqslant \frac{(\tau-1)(s-1)N^{\tau-2}m^\tau c(s)}{(\tau-3)\Gamma(2-\tau)r^2 s \ln^{1-2g} N} \leqslant \left(\frac{(\tau-1)^2}{\tau-2}\right)^g\right\} \to 1,$$

где $\Gamma(x)$ *– гамма-функция.*

Вклад $W_N^s(\varepsilon)$ в $c(s)$

Обозначим ξ_{max} максимальную степень вершины графа G и найдем предельное распределение этой случайной величины.

Лемма 1. *Пусть* $N \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{max} < t\left(\frac{N}{\ln^g N}\right)^{1/(\tau-1)}\right\} \to \exp\left\{-\frac{r(\tau-1)^{g-1}}{t^{\tau-1}}\right\}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\xi_{max} < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x, \ldots, \xi_N < x\} = (1 - \mathbf{P}\{\xi \geqslant x\})^N. \qquad (11)$$

Из (1) и (7) следует, что при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} = \sum_{k \geqslant x} \frac{L + o(1)}{k^\tau \ln^g k} = L\int_x^\infty \frac{dy}{y^\tau \ln^g y}(1 + o(1)).$$

Полагая $y = zx$, отсюда выводим равенство

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} = \frac{L + o(1)}{x^{\tau-1}}\int_1^\infty \frac{dz}{z^\tau \ln^g(xz)}.$$

Функция $\ln^{-g}(xz)$ является медленно меняющейся, поэтому из теоремы 2.6 в работе [5] находим, что

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} = \frac{L + o(1)}{x^{\tau-1}\ln^g x}\int_1^\infty \frac{dz}{z^\tau} = \frac{L + o(1)}{(\tau-1)x^{\tau-1}\ln^g x}.$$

Если

$$x = t\left(\frac{N}{\ln^g N}\right)^{1/(\tau-1)},$$

то для любого $t > 0$

$$N\mathbf{P}\left\{\xi \geqslant t\left(\frac{N}{\ln^g N}\right)^{1/(\tau-1)}\right\} = \frac{L(\tau-1)^{g-1} + o(1)}{t^{\tau-1}}.$$

Отсюда и из (11) получаем утверждение леммы 1. □

Замечание. Из леммы 1 следует, что выбором достаточно большого C вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{max} < C\left(\frac{N}{\ln^g N}\right)^{1/(\tau-1)}\right\}$$

можно сделать сколь угодно близкой к единице.

Обозначим $\mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})$ условное математическое ожидание $c(s, W_N^s(\varepsilon))$ относительно множества степеней $\mathbf{d}$. Изучим предельное поведение этой величины.

Лемма 2. *Пусть* $N \to \infty$, $s \geqslant 2$, $s = o(N^{(\tau-2)/(\tau-1)})$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{4^g \leqslant \frac{(\tau-1)(s-1)m^\tau \mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})}{(3-\tau)sL^2N^{2-\tau}Int(\varepsilon)\ln^{1-2g} N} \leqslant \left(\frac{(\tau-1)^2}{\tau-2}\right)^g\right\} \to 1,$$

где

$$Int(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{1 - e^{-x}}{x^{\tau-1}}dx.$$

Доказательство. Будем следовать доказательству леммы 6 из [11]. Пусть u, v, w – вершины графа, ξ_u, ξ_v, ξ_w – их степени, а ζ_N, как и во введении, означает сумму степеней всех вершин графа. Введем функцию

$$g_N(\xi_u, \xi_v, \xi_w) = (1 - e^{-\xi_u\xi_v/\zeta_N}) \times (1 - e^{-\xi_u\xi_w/\zeta_N})(1 - e^{-\xi_v\xi_w/\zeta_N}). \qquad (12)$$

Для оценки ζ_N можно использовать теорему 3 из [1]. Обозначим $B_N = (Nh(B_N))^{1/(\tau-1)}$. Из этой теоремы следует, что вероятность

$$\mathbf{P}\left\{-A \leqslant \frac{\zeta_N - mN}{B_N} \leqslant A\right\}$$

можно сделать сколь угодно близкой к единице выбором достаточно большого A. Отсюда и из (7) вытекает соотношение

$$|\zeta_N - mN| = o_p(N^{1/(\tau-1)}). \qquad (13)$$

Согласно лемме 3 из [11], при выполнении равенства (13)

$$\mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d}) \xrightarrow{p} \frac{\sum_{(u,v)\in W_N^s(\varepsilon)} g_N(s,\xi_u,\xi_v)}{s(s-1)}. \qquad (14)$$

Из (9) и замечания находим, что $s\xi_i = o(N)$ равномерно по $i = 1,\ldots,N$. Полагая $\xi_w = s$ в (12) и применяя формулу Тейлора, из (14) находим

$$\mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})$$

$$\xrightarrow{p} \frac{s}{s-1} \sum_{(u,v)\in W_N^s(\varepsilon)} \frac{\xi_u\xi_v(1-e^{-\xi_u\xi_v/\zeta_N})}{\zeta_N^2}. \qquad (15)$$

Пусть (u,v) – произвольная пара вершин из $W_N^s(\varepsilon)$. Для них выполнены неравенства (8), и, используя замечание к лемме 1, получаем, что при достаточно малом C_1

$$\xi_u > \frac{\varepsilon mN}{\xi_v} > C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}$$

и в то же время при достаточно большом C_2

$$\xi_u < C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}.$$

Поэтому для всех вершин u, входящих в пары вершин из $W_N^s(\varepsilon)$, будем далее считать, что

$$C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)} < \xi_u$$

$$< C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}. \qquad (16)$$

Пусть $0 < a < b < \infty$ и

$$amN \leqslant \xi_u\xi_v \leqslant bmN. \qquad (17)$$

Обозначим $\mathbb{E}[a,b]$ событие, состоящее в том, что условия (16) и (17) выполнены одновременно. Введем случайную меру

$$M^{(N)}([a,b]) = \frac{(mN)^{\tau-1}}{N^2\ln^{1-2g}N}\sum_{\substack{u,v=1\\ u\neq v}}^{N} I\{\mathbb{E}[a,b]\}, \qquad (18)$$

здесь и далее $I\{A\}$ означает индикатор события A. Заметим, что суммирование в (18) проводится по всем вершинам графа. Поэтому

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = \frac{(mN)^{\tau-1}(N-1)}{N\ln^{1-2g}N}\mathbf{P}\{\mathbb{E}[a,b]\}.$$

Отсюда и из (7), (16), (17) находим:

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = L^2(mN)^{\tau-1}\ln^{2g-1}N$$

$$\int_{A_N}^{B_N}\int_{amN/x}^{bmN/x}\frac{(xy)^{-\tau}dydx}{((\ln x)(\ln y))^g}(1+o(1)),$$

где $A_N = C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, B_N = C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}$. Полагая $z = xy$, отсюда получаем

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = L^2(mN)^{\tau-1}\ln^{2g-1}N$$

$$\times\int_{A_N}^{B_N}\left(\int_{amN}^{bmN}\frac{z^{-\tau}dz}{((\ln x)(\ln(z/x)))^g}\right)\frac{dx}{x}(1+o(1)).$$

Теперь положим $z = tmN$. Тогда

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = L^2(mN)^{\tau-1}\ln^{2g-1}N$$

$$\times\int_{A_N}^{B_N}\left(\int_a^b\frac{t^{-\tau}(mN)^{1-\tau}dt}{\ln^g(tmN/x)}\right)\frac{dx}{x\ln^g x}(1+o(1)). \qquad (19)$$

Легко видеть, что в области интегрирования по x выполнено соотношение $mN/x \to \infty$. Поэтому, используя свойство (2.11) из [5], видим, что

$$\int_a^b t^{-\tau}\ln^{-g}(tmN/x)dt \sim \ln^{-g}(mN/x)\int_a^b t^{-\tau}dt.$$

Отсюда и из (19) следует равенство

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = L^2\ln^{2g-1}N$$

$$\times\int_{A_N}^{B_N}x^{-1}((\ln x)(\ln(mN/x))^{-g}$$

$$\times\int_a^b t^{-\tau}dtdx(1+o(1)). \qquad (20)$$

Нетрудно проверить, что в области интегрирования по x для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$,

$$\left(\frac{2}{\ln(mN)}\right)^{2g} \leqslant ((\ln x)(\ln(mN/x)))^{-g}$$

$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{(\tau-2)^g}\left(\frac{\tau-1}{\ln N}\right)^{2g}. \qquad (21)$$

Собирая вместе (20), (21) и используя теорему о среднем, находим, что существует число γ такое, что

$$\gamma \in \left[4^g, \left(\frac{(\tau-1)^2}{\tau-2}\right)^g\right] \qquad (22)$$

и

$$\mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = \frac{L^2}{\ln N}\gamma \times \int_{A_N}^{B_N} \left(\int_a^b \frac{dt}{t^\tau}\right) \frac{dx}{x}(1+o(1)) = L^2\gamma \times \int_a^b \left(\frac{3-\tau}{\tau-1} - \frac{2g\ln\ln N}{(\tau-1)\ln N} + \frac{\ln(C_2/C_1)}{\ln N}\right) \frac{dt}{t^\tau}(1+o(1)). \quad (23)$$

Обозначим

$$\mu([a,b]) = L^2\gamma\frac{3-\tau}{\tau-1}\int_a^b \frac{dt}{t^\tau}. \quad (24)$$

Тогда из (23) следует

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}M^{(N)}([a,b]) = \mu([a,b]). \quad (25)$$

Далее рассмотрим дисперсию меры $M^{(N)}([a,b])$. Из (16)–(18) находим, что

$$\mathbf{D}M^{(N)}([a,b]) = m^{2(\tau-1)}N^{2\tau-6}\ln^{4g-2} N \times \sum_{u,v=1}^{N}\sum_{w,z=1}^{N}\Big(\mathbf{P}\Big\{\xi_u\xi_v, \xi_w\xi_z \in [amN, bmN], \xi_u, \xi_w \in \Big[C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, C_2(N/\ln^g)^{1/(\tau-1)}\Big]\Big\} - \mathbf{P}\Big\{\xi_u\xi_v \in [amN, bmN], \xi_u \in \Big[C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}\Big]\Big\} \times \mathbf{P}\Big\{\xi_w\xi_z \in [amN, bmN], \xi_w \in \Big[C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}\Big]\Big\}\Big). \quad (26)$$

Поскольку степени вершин независимы, из (26) следует, что если все вершины u, v, w, z различны, то вклад таких слагаемых в дисперсию равен нулю. Обозначим D_3 вклад в (26) слагаемых, где ровно две из четырех вершин совпадают. Тогда

$$D_3 \leqslant m^{2(\tau-1)}N^{2\tau-6}\ln^{4g-2} N \times \sum_{u,v,w}\mathbf{P}\Big\{\xi_u\xi_v, \xi_u\xi_w \in [amN, bmN], \xi_u \in \Big[C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}\Big]\Big\}$$
$$\leqslant C_3N^{2\tau-3}\ln^{4g-2} N\mathbf{P}\Big\{\xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3 \in [amN, bmN], \xi_1 \in \Big[C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}, C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}\Big]\Big\}$$
$$\leqslant C_4N^{2\tau-3}\ln^{4g-2} N\int_2^\infty x^{-\tau} \times \left(\int_{amN/x}^{bmN/x} y^{-\tau}dy\right)^2 dx \leqslant C_5N^{-1}\ln^{4g-2} N. \quad (27)$$

Пусть D_2 означает вклад в (26) слагаемых, в которых только две из четырех вершин разные. Тогда, как и при выводе (19), (23),

$$D_2 \leqslant C_6N^{2\tau-6}\ln^{4g-2} N\sum_{u,v}\mathbf{P}\{\mathbb{E}[a,b]\} \leqslant C_7N^{2\tau-4}\ln^{4g-2} N\int_{C_1(N^{\tau-2}\ln^g N)^{1/(\tau-1)}}^{C_2(N/\ln^g N)^{1/(\tau-1)}} \left(\int_{amN}^{bmN}\frac{dz}{z^\tau}\right)\frac{dx}{x} \leqslant C_8N^{\tau-3}\ln^{4g-1} N. \quad (28)$$

В соответствии с определением меры (18), в сумме (26) нет слагаемых, в которых все четыре вершины совпадают. Поэтому из (26)–(28) находим, что

$$\mathbf{D}M^{(N)}([a,b]) = o_p(1). \quad (29)$$

Применив неравенство Чебышева, отсюда и из (23)–(25) видим, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|M^{(N)}([a,b]) - \mu([a,b])| > \varepsilon\} \to 0,$$

следовательно,

$$M^{(N)}([a,b]) \xrightarrow{p} \mu([a,b]). \quad (30)$$

Как показано в [11, соотношение (5.26)], из (13) и (18) следует, что

$$\sum_{u,v\in W_N^s(\varepsilon)}\frac{\xi_u\xi_v(1-e^{-\xi_u\xi_v/\zeta_N})}{\zeta_N^2} \xrightarrow{p} \frac{\ln N}{N^{\tau-2}m^\tau}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} x(1-e^{-x})dM^{(N)}(x), \quad (31)$$

полагая $M^{(N)}(x) = M^{(N)}([x,x])$. Из леммы 5 [11], (24), (30) получаем

$$\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} x(1-e^{-x})dM^{(N)}(x) \xrightarrow{p} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} x(1-e^{-x})d\mu(x)$$

$$= L^2\gamma\frac{3-\tau}{\tau-1}\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} x^{1-\tau}(1-e^{-x})dx.$$

Отсюда и из (15), (22), (29)–(31) вытекает утверждение леммы 2. □

Вклад $\overline{W}^s_N(\varepsilon)$ в $c(s)$

В этом разделе рассматривается условное математическое ожидание $c(s,\overline{W}^s_N(\varepsilon)|\mathbf{d})$.

Лемма 3. *Пусть $N\to\infty$, $s\geqslant 2$ и выполнено условие (9). Тогда*

$$\frac{(s-1)\mathbf{E}_c(s,\overline{W}^s_N(\varepsilon)|\mathbf{d})}{sN^{2-\tau}\ln^{1-2g}N} = O_p(\varepsilon^{\min(3-\tau,\tau-2)}).$$

Доказательство. В [11, соотношение (6.4)] показано, что

$$\mathbf{E}c(s,\overline{W}^s_N(\varepsilon)|\mathbf{d}) = O_p\Big((N^2s^{-2}\mathbf{E}\Big(\min\Big(1,\frac{s\xi_u}{mN}\Big)$$

$$\times\min\Big(1,\frac{s\xi_v}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{\xi_u\xi_v}{mN}\Big)I\{u,v\in\overline{W}^s_N(\varepsilon)\}\Big). \tag{32}$$

Полагая $x=\xi_u$, $y=\xi_v$, заменяя суммирование интегрированием и учитывая (7), получаем, как в (6.5) из [11], что

$$\mathbf{E}\Big(\min\Big(1,\frac{s\xi_u}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{s\xi_v}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{\xi_u\xi_v}{mN}\Big)$$

$$\times I\{u,v\in\overline{W}^s_N(\varepsilon)\} = \iint_{x,y\in\overline{W}^s_N(\varepsilon)}\frac{(xy)^{-\tau}}{((\ln x)(\ln y))^g}$$

$$\times min\Big(1,\frac{sx}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{sy}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{xy}{mN}\Big)dxdy, \tag{33}$$

где область интегрирования, в соответствии с определением $\overline{W}^s_N(\varepsilon)$, замечанием и тем, что степень любой вершины треугольника не менее двух, выбрана так, что $2\leqslant x,y\leqslant N^{1/(\tau-1)}$ и нарушено условие $\varepsilon mN\leqslant xy\leqslant mN/\varepsilon$ (см. (8)).

Сначала рассмотрим случай $xy<\varepsilon mN$. Учитывая (7) и (9), находим, что

$$\int\int_{x,y\in\overline{W}^s_N(\varepsilon)}\frac{(xy)^{-\tau}}{((\ln x)(\ln y))^g}$$

$$\times min\Big(1,\frac{sx}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{sy}{mN}\Big)\min\Big(1,\frac{xy}{mN}\Big)dxdy$$

$$\leqslant\frac{s^2}{(mN)^3}\int_2^{N^{1/(\tau-1)}}\int_2^{\varepsilon mN/x}\frac{(xy)^{2-\tau}dydx}{((\ln x)(\ln y))^g}. \tag{34}$$

Выберем α так, что $0<\alpha<(3-\tau)/2$. Правую часть (34) можно представить в виде суммы четырех интегралов

$$\frac{s^2}{(mN)^3}\int_2^{N^{1/(\tau-1)}}\int_2^{\varepsilon mN/x}\frac{(xy)^{2-\tau}dydx}{((\ln x)(\ln y))^g}.$$

$$=\frac{s^2}{(mN)^3}(I_1+I_2+I_3+I_4), \tag{35}$$

где области интегрирования I_1–I_4 соответственно равны

$$S_1=\{2\leqslant x<N^\alpha,\quad 2\leqslant y<N^\alpha\},$$
$$S_2=\{2\leqslant x<N^\alpha,\quad N^\alpha\leqslant y\leqslant\varepsilon mN/x\},$$
$$S_3=\{N^\alpha\leqslant x\leqslant N^{1/(\tau-1)},\quad 2\leqslant y<N^\alpha\},$$
$$S_4=\{N^\alpha\leqslant x\leqslant N^{1/(\tau-1)},\ N^\alpha\leqslant y\leqslant\varepsilon mN/x\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1\leqslant N^{2\alpha}. \tag{36}$$

В соответствии с замечанием $\xi_u,\xi_v<N^{1/(\tau-1)}$, и кроме того, должно выполняться неравенство $\varepsilon mN/x\leqslant N^{1/(\tau-1)}$. Поэтому для I_2 и I_3 получаем одинаковые оценки:

$$I_2,I_3=O\left(N^{(3-\tau)/(\tau-1)+\alpha}\right). \tag{37}$$

Наконец,

$$I_4\leqslant\frac{C_{22}}{\ln^{2g}N}\int_{N^\alpha}^{N^{1/(\tau-1)}}\frac{dx}{x}\int_{N^\alpha x}^{\varepsilon mN}z^{2-\tau}dz$$

$$=O\Big((\varepsilon N)^{3-\tau}\ln^{1-2g}N\Big). \tag{38}$$

Собирая вместе (32)–(38), приходим к выводу, что при $\xi_u\xi_v<\varepsilon mN$ и достаточно малом α

$$\frac{(s-1)\mathbf{E}(c(s,\overline{W}^s_N(\varepsilon))|\mathbf{d})}{sN^{2-\tau}\ln^{1-2g}N}=O_p(\varepsilon^{3-\tau}). \tag{39}$$

Пусть $\xi_u\xi_v>mN/\varepsilon$. Нетрудно видеть, учитывая (9), что в этом случае при достаточно малом ε и достаточно большом N величину (33) можно ограничить выражением

$$\frac{s^2}{(mN)^2}\int_{mN^{(\tau-2)/(\tau-1)}/\varepsilon}^{N^{1/(\tau-1)}}\int_{mN/(\varepsilon x)}^{N^{1/(\tau-1)}}\frac{(xy)^{1-\tau}dydx}{((\ln x)(\ln y))^g}$$

$$\leqslant C_{23}\frac{s^2}{N^2\ln^{2g}N}\int_{mN^{(\tau-2)/(\tau-1)}/\varepsilon}^{N^{1/(\tau-1)}}\frac{dx}{x}$$

$$\times\int_{mN/\varepsilon}^{N^{1/(\tau-1)}x}z^{1-\tau}dz=O\left(\frac{s^2\varepsilon^{\tau-2}\ln^{1-2g}N}{N^\tau}\right).$$

Отсюда и из (32) находим, что если $\xi_u\xi_v>mN/\varepsilon$, то

$$\frac{(s-1)\mathbf{E}c(s,\overline{W}^s_N(\varepsilon)|\mathbf{d})}{sN^{2-\tau}\ln^{1-2g}N}=O_p(\varepsilon^{\tau-2}).$$

Это равенство вместе с (39) завершает доказательство леммы 3. □

Дисперсия вклада $W_N^s(\varepsilon)$ в $c(s)$

В этом разделе мы получим соотношение

$$\frac{\mathbf{D}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})}{(\mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d}))^2} \xrightarrow{p} 0. \qquad (40)$$

Следующая лемма 4 является аналогом леммы 9 из [11] и доказывается так же, поэтому укажем только на небольшие отличия, связанные с использованием свойства (7) вместо (6).

Лемма 4. *Пусть $N \to \infty$, $s \geqslant 2$ и выполнено условие (9). Тогда верно соотношение (40).*

Доказательство. Обозначим $\Delta_{i,u,v}$ событие, состоящее в том, что вершины i, u, v образуют треугольник. В [11, равенство (5.59)] показано, что

$$\mathbf{D}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d}) = \frac{1}{s^2(s-1)^2N_s^2} \sum_{\xi_i, \xi_j = s}$$

$$\times \sum_{(u,v),(w,z) \in W_N^s(\varepsilon)} (\mathbf{P}\{\Delta_{i,u,v}\Delta_{j,w,z}|\mathbf{d}\}$$

$$- \mathbf{P}\{\Delta_{i,u,v}|\mathbf{d}\}\mathbf{P}\{\Delta_{j,u,v}|\mathbf{d}\}). \qquad (41)$$

В равенстве (41) нужно рассмотреть несколько случаев в зависимости от того, сколько разных вершин содержится в множестве (i, u, v, j, w, z). Обозначим $D_s^{(l)}$ вклад в (41) треугольников, образованных вершинами этого множества, если l из них разные. Понятно, что $3 \leqslant l \leqslant 6$.

В [11, соотношение (5.60)] доказано, что оценки $D_s^{(6)}$ и $D_s^{(5)}$ совпадают и

$$D_s^{(6)}, D_s^{(5)} = o_p\left((\mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})^2\right). \qquad (42)$$

Случай $D_s^{(4)}$ соответствует двум треугольникам с одним общим ребром. Пусть сначала $i = j$ и $u = z$. Повторяя почти дословно оценки (5.61)–(5.64) из [11] и используя (7) и лемму 1, находим, что в этом случае $D_s^{(4)}$ можно оценить следующим образом:

$$D_s^{(4)} = O_p\left(\varepsilon^{-(2\tau+1)}s^{\tau-1}N^{3-2\tau-(\tau-2)/(\tau-1)}\right).$$

Учитывая нормировку в лемме 2, отсюда получаем, что при любом сколь угодно малом, но фиксированном ε

$$\frac{D_s^{(4)}}{N^{4-2\tau}\ln^{2-4g} N} \to 0. \qquad (43)$$

Пусть теперь $i \neq j$, $u = z$, $v = w$. Из [11, неравенство (5.65)] следует, что в этом случае

$$D_s^{(4)} = O_p\left(\varepsilon^{-2}N^{1-\tau}\ln N\right),$$

следовательно, соотношение (43) остается в силе. Наконец, оценка $D_s^{(3)}$ получена в (5.71) [11].

$$D_s^{(3)} = O_p\left(s^{\tau-4}N^{1-\tau}\ln N\right),$$

что, как нетрудно видеть, вместе с (42), (43) завершает доказательство леммы 4. $\square$

Доказательство теоремы

Пусть выполнены условия теоремы. Понятно, что разность

$$\left|\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} x^{1-\tau}\left(1 - e^{-x}\right)dx - \int_0^\infty x^{1-\tau}\left(1 - e^{-x}\right)dx\right|$$

можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно малого ε. В [11, равенство (3.16)] показано, что

$$\int_0^\infty x^{1-\tau}\left(1 - e^{-x}\right)dx = -\Gamma(2-\tau).$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что при достаточно больших N можно сделать сколь угодно близкой к единице вероятность события

$$4^g \leqslant \frac{(\tau-1)(s-1)m^\tau \mathbf{E}(c(s, W_N^s(\varepsilon))|\mathbf{d})}{(\tau-3)\Gamma(2-\tau)sL^2N^{2-\tau}\ln^{1-2g} N}$$

$$\leqslant \left(\frac{(\tau-1)^2}{\tau-2}\right)^g,$$

и из (10) и леммы 3 видим, что это верно и для события

$$4^g \leqslant \frac{(\tau-1)(s-1)m^\tau \mathbf{E}(c(s)|\mathbf{d})}{(\tau-3)\Gamma(2-\tau)sL^2N^{2-\tau}\ln^{1-2g} N}$$

$$\leqslant \left(\frac{(\tau-1)^2}{\tau-2}\right)^g.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось вспомнить лемму 4, которая вместе с леммой 3 приводит к соотношению

$$\frac{c(s)}{\mathbf{E}(c(s)|\mathbf{d})} \xrightarrow{p} 1.$$

Литература

1. *Павлов Ю. Л.* Асимптотика числа ребер Интернет-графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2021. № 6. С. 59–63. doi: 10.17076/mat1434

2. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

3. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, вып. 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332

4. *Прохоренкова Л. А., Крот А. В.* Локальный кластерный коэффициент в моделях предпочтительного присоединения // Доклады Академии наук. 2016. Т. 66, вып. 3. С. 19–22. doi: 10.7868/S0869565216310066

5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 141 с.

6. *Albert R., Jeong H., Barabasi A.-L.* Internet: diameter of the world-wide web // Nature. 1999. Vol. 401. P. 130–131. doi: 10.1038/43601

7. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 223 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. *Hofstad R., Hoorn P., Litvak N., Stegehuis C.* Limit theorems for assortativity and clustering in null models for scale-free networks // Adv. Appl. Probab. 2020. Vol. 52, iss. 4. P. 1035–1084. doi: 10.1017/apr.2020.42

11. *Hofstad R., Leenwaarden J., Stegehuis C.* Triadic closure in configuration models with unbounded degree fluctuation // J. Stat. Phys. 2018. Vol. 173, iss. 4. P. 746–774. doi: 10.1007/s10955-018-1952-x

12. *Hoorn P., Litvak N.* Upper bounds for number of removed edges in the Erased Configuration Model // Algorithms and Models for the Web Graph. Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9479. P. 54–65. doi: 10.1007/978-3-319-26784-5_5

13. *Newman M. E. J.* Networks: An introduction. New York: Oxford University Press, 2010. 772 p.

References

1. *Pavlov Yu. L.* Asymptotics of the number of edges of an internet graph. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2021;6:59–63. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1423

2. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *Sbornik: Mathematics.* 2018;209(2):258–272. doi: 10.1070/SM8832

3. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probab. Appl.* 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T9900460

4. *Prokhorenkova L. A., Krot A. V.* Local clustering coefficients in preferential attachment models. *Doklady Mathematics.* 2016;94(3):623–626. doi: 10.1134/S1064562416060041

5. *Seneta E.* Regulary varying functions. Berlin: Springer; 1976. 252 p.

6. *Albert R., Jeong H., Barabasi A.-L.* Internet: diameter of the world-wide web. *Nature.* 1999;401:130–131. doi: 10.1038/43601

7. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. 233 p. doi: 10.1017/9781316779422

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. *Hofstad R., Hoorn P., Litvak N., Stegehuis C.* Limit theorems for assortativity and clustering in null models for scale-free networks. *Adv. Appl. Probab.* 2020;52(4):1035–1084. doi: 10.1017/apr.2020.42

11. *Hofstad R., Leenwaarden J., Stegehuis C.* Triadic closure in configuration models with unbounded degree fluctuation. *J. Stat. Phys.* 2018;173(4):746–774. doi: 10.1007/s10955-018-1952-x

12. *Hoorn P., Litvak N.* Upper bounds for number of removed edges in the Erased Configuration Model. *Algorithms and Models for the Web Graph. Lecture Notes in Computer Science.* 2015;9479:54–65. doi: 10.1007/978-3-319-26784-5_5

13. *Newman M. E. J.* Networks: An introduction. New York: Oxford University Press; 2010. 772 p.

Поступила в редакцию / received: 06.12.2024; принята к публикации / accepted: 04.04.2025.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher