Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 28–32
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 28–32
DOI: 10.17076/mat1908

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 517.977.57

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПОПУЛЯЦИЕЙ УЧАСТКА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ЕГО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ РЕСУРСАХ

А. Н. Кириллов[1*], И. В. Данилова[2]

[1] *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), *krllv1812@yandex.ru*

[2] *Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский государственный университет (пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается задача рационального выбора популяцией участка, содержащего энергетические (пищевые) ресурсы. Данная задача относится к теории оптимального фуражирования, в которой изучаются вопросы, касающиеся поведения популяции в случае, когда она покидает участок или выбирает наиболее подходящий. Для определения оптимального для популяции выбора участка используется подход, основанный на идее распределения Больцмана: в статистической физике распределение Больцмана описывает вероятность перехода системы в определенное энергетическое состояние. В настоящей работе распределение Больцмана строится с учетом функций полезности, которые, в свою очередь, строятся с учетом меры информированности популяции о качестве участков, объема энергетических ресурсов на каждом участке и затрат на получение информации (ее общей стоимости) об их качестве. Также при построении распределения Больцмана учитывается неотрицательный параметр, характеризующий рациональность выбора популяцией участка. При этом данный параметр влияет на стоимость информации. В работе введено понятие оптимальной рациональности, которая определяется с учетом стоимости информации и энергетической ценности всех участков. Цель данной работы – развитие предложенного подхода для задачи оптимального выбора популяцией участка. Участки условно делятся на два типа: «плохие» и «хорошие» в зависимости от объема содержащихся в них пищевых ресурсов. При этом объем ресурсов на участках меняется с течением времени. Результаты работы носят общий характер и могут быть использованы при построении различных процессов, связанных с принятием решений.

Ключевые слова: оптимальная рациональность; стоимость информации; математическое ожидание; распределение Больцмана; объем ресурсов

Для цитирования: Кириллов А. Н., Данилова И. В. Рациональный выбор популяцией участка при неполной информации о его изменяющихся ресурсах // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 28–32. doi: 10.17076/mat1908

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 23-21-00092 (https://rscf.ru/project/23-21-00092/).

A. N. Kirillov[1*], I. V. Danilova[2]. THE RATIONAL CHOICE BY POPULATION OF A PATCH UNDER IMPERFECT INFORMATION ABOUT ITS VARIABLE RESOURCES

[1] *Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia),* [*] *krllv1812@yandex.ru*

[2] *Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The paper examines the problem of rational choice by a population of a patch containing energy (food) resources. This problem belongs to the theory of optimal foraging, which studies issues related to the behavior of a population leaving a patch or choosing the most suitable one. We used an approach based on the idea of the Boltzmann distribution to determine the optimal choice of a patch: in statistical physics, the Boltzmann distribution describes the probability of a system falling into a particular energy state. In this paper, the Boltzmann distribution is constructed taking into account the utility functions, which, in turn, are derived taking into account the population's awareness of the quality of patches, the volume of energy resources in each patch, and the costs of obtaining information (total information cost) about patch quality. Also, a non-negative parameter that characterizes the rationality of the population's choice of patchis taken into account. At the same time, this parameter influences on the cost of information. We introduce the concept of optimal rationality, which is determined taking into account the cost of information and the energy value of all patches. The goal of this paper is to elaborate the proposed approach to address the problem of the optimal patch choice by a population. Patches are divided into two types: "bad" and "good", depending on the volume of food resources they contain. The volume of food resources in the patches varies over time. The results of the study are general in nature and can be used in constructing various decision-making processes.

Keywords: optimal rationality; expected value; information cost; Boltzmann distribution; volume of resources

For citation: Kirillov A. N., Danilova I. V. The rational choice by population of a patch under imperfect information about its variable resources. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:28–32. doi: 10.17076/mat1908

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-21-00092 (https://rscf.ru/project/23-21-00092/).

Введение

Задача рационального выбора является одной из важнейших задач, рассматриваемых в биологии, нейробиологии, поведенческой экологии, в области искусственного интеллекта и во многих других областях. Данная задача возникает в теории оптимального фуражирования, которая изучает выбор популяцией наиболее подходящего участка, содержащего пищевые ресурсы [1]. Важно понимать механизмы процесса принятия решений в условиях ограниченности ресурсов, в частности доступной информации. Задача принятия решения в условиях ограниченности ресурсов (проблема ограниченной рациональности) рассматривается в работах [3, 6]. При этом важно учитывать, что поведение популяции направлено на максимизацию количества потребляемой энергии [2]. В рамках данной теории была предложена концепция идеального свободного распределения (IFD) [4]. Согласно концепции IFD, популяция владеет полной информацией о качестве участков и распределяется между ними так, чтобы максимизировать количество потребляемой энергии. Но эмпирические наблюдения показывают, что модель IFD не отражает реальные процессы выбора популяцией участков. Популяция при недостатке информации о качестве участков может выбирать и плохие участки [7].

С учетом недостатков концепции идеального свободного распределения в работе [7] был предложен подход, основанный на идее распределения Больцмана и учитывающий функцию полезности участка:

$$P_k = \frac{e^{qU_k}}{\sum_{i=1}^{m} e^{qU_i}}, \tag{1}$$

где U_i – функция полезности участка i, которая задается с учетом имеющегося у популяции объема информации I_i о качестве участка i, под качеством участка i подразумевается объем пищевых ресурсов V_i, q – неотрицательный параметр, характеризующий рациональность выбора, $i = 1, ..., m$.

В данной статье на основе распределения Больцмана исследуется задача влияния доступной информации на рациональность выбора подходящего участка.

Постановка задачи

В работе [5] авторами предложен подход для характеристики понятия оптимального рационального выбора.

Будем рассматривать объем ресурсов i-го участка V_i как значение случайной величины V, а $P_i = P(V = V_i)$, заданное (1), как вероятность того, что популяция выберет участок i, $i = 1, ..., m$. Рассмотрим P_i как функцию от параметра q, тогда математическое ожидание $E(V)$, как функция от параметра q, примет вид: $E(q) = E(V, q) = \sum_{i=1}^{m} P_i(q)V_i$.

Определение 1. Параметр рациональности q^* называется оптимальным, если $E(q^*) = \max\limits_q E(q)$, где $E(q) = \sum_{i=1}^{m} V_i \dfrac{e^{qU_i}}{\sum_{k=1}^{m} e^{qU_k}}$.

Также в [5] исследовано влияние недостатка информации и ее стоимости на рациональный выбор. В настоящей работе эти исследования распространяются на случай, когда ресурсы изменяются во времени.

Рассмотрим задачу рациональности выбора популяцией участка i на промежутке времени $[0, T]$, разбитом на n полуинтервалов $\delta t_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., n$, $t_0 = 0$, $t_n = T$. При этом учитывается изменение объема энергетического ресурса $V_i = V_i(t)$ участка i на рассматриваемых временных интервалах δt_j. Изменение объема энергетических ресурсов V_i задается кусочно-постоянной функцией:

$$V_i(t) = \begin{cases} V_{i1}, \ t \in \delta t_1, \\ . \\ . \\ . \\ V_{in}, \ t \in \delta t_n, \end{cases} \tag{2}$$

$i = 1, ..., m$.

Вероятность выбора участка k на интервале времени δt_j задается распределением Больцмана:

$$P_{kj} = \frac{e^{qU_{kj}}}{\sum_{i=1}^{m} e^{qU_{ij}}}, \tag{3}$$

$\sum_{i=1}^{m} P_{ij} = 1$, где функция полезности U_{ij} участка i на промежутке времени δt_j задается в следующем виде: $U_{ij} = I_{ij}V_{ij}$, I_{ij} – мера информированности популяции о качестве участка i на промежутке времени δt_j и $I_{ij} \in [0, 1]$, $q \geqslant 0$ – параметр, характеризующий рациональность выбора популяцией участка i.

Пусть $V(t, q)$ – случайная величина, объем энергетических ресурсов в момент времени t, имеющая распределение $\{V_{ij}, P_{ij}\}_{i=1}^{m}$, $t \in \delta t_j$. Введем функцию $Z(q)$:

$$Z(q) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T E(V(t,q))dt = \frac{1}{T}\Big(\int\limits_0^{t_1}(V_{11}P_{11} + ...$$

$$+V_{m1}P_{m1})dt + ... + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}(V_{1n}P_{1n} + ... + V_{mn}P_{mn})dt\Big).$$

Требуется найти q^* такое, что:

$$Z(q^*) = \max_q Z(q). \tag{4}$$

Случай двух участков, $m = 2$

Рассмотрим случай $m = 2$. Изменения объемов энергетических ресурсов для участков 1 и 2 и вероятности выбора на промежутке времени δt_j задаются согласно (2) и (3) при $m = 2$.

Рассмотрим $Z(q)$:

$$\begin{gathered} Z(q) = \frac{1}{T}\Big(\int\limits_0^{t_1}(V_{11}P_{11} + V_{21}P_{21})dt + ... \\ + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}(V_{1n}P_{1n} + V_{2n}P_{2n})dt\Big) \end{gathered} \tag{5}$$

и найдем q^* из условия (4).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $I_{1j} = I_{2j}$, *тогда* $Z(q^*) = \max\limits_q Z(q) = \lim\limits_{q\to+\infty} Z(q)$.

Доказательство. Несложно показать, что после интегрирования (5) и дальнейших несложных преобразований получим

$$Z(q) = \frac{1}{T}\Big(P_{21}\Delta V_1\Delta t_1 + V_{11}\Delta t_1 + P_{22}\Delta V_2\Delta t_2$$

$$+V_{12}\Delta t_2 + ... + P_{2n}\Delta V_n\Delta t_n + V_{1n}\Delta t_n\Big),$$

где $\Delta V_j = V_{2j} - V_{1j}$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, ..., n$. После несложных преобразований производная $Z(q)$ по параметру q примет вид:

$$Z'(q) = \frac{\Delta V_1^2 I \Delta t_1 e^{qIV_{21}+qIV_{11}}}{\left(e^{qU_{11}} + e^{qU_{21}}\right)^2} + \frac{\Delta V_2^2 I \Delta t_2 e^{qIV_{22}+qIV_{12}}}{\left(e^{qU_{12}} + e^{qU_{22}}\right)^2} + ... + \frac{\Delta V_n^2 I \Delta t_n e^{qIV_{2n}+qIV_{1n}}}{\left(e^{qU_{1n}} + e^{qU_{2n}}\right)^2}.$$

Таким образом, $Z'(q) > 0$ и, следовательно, $Z(q)$ возрастает с ростом параметра q. Из чего следует заключение утверждения 1. □

Стоимость информации

В работе [5] были введены стоимость единицы информации и функция, зависящая от параметра q, ограничивающая эту стоимость. Пусть β_{ij} – стоимость единицы информации об участке i, на промежутке времени δt_j, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, функция $f(q) \in [0, 1]$ задает ограничение стоимости информации за счет рационального поведения популяции, то есть $f(0) = 1$. Пусть I_{ij} – мера информированности популяции об участке i на промежутке времени δt_j, тогда $\beta_{ij} f(q) I_{ij}$ – стоимость информации об участке i на промежутке времени δt_j, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Введем следующую функцию полезности:

$$U_{ij} = I_{ij} V_{ij} - \beta_{ij} f(q) I_{ij}, \tag{6}$$

где $\beta_{ij} \in [0, V_{ij}]$.

В дальнейшем будем рассматривать случай двух участков $m = 2$ и двух промежутков времени $n = 2$ и будем считать, что: $\beta_{2j} = \beta_{1j} = \beta$, $I_{2j} = I_2$, $I_{1j} = I_1$. Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем: $\Delta V_j = V_{2j} - V_{1j}$, $\Delta I = I_2 - I_1$, $\Delta U_j = U_{2j} - U_{1j}$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$.

Функция $Z(q)$ также задается по формуле (5), с учетом того, что теперь в вероятности (3) входит функция полезности (6).

Учет стоимости информации приводит к тому, что оптимальный рациональный выбор может реализоваться не только при $q \to +\infty$, как это показано в [7], где этот фактор не принимался во внимание.

Пример 1. Пусть $\Delta t_1 = \Delta t_2$, $\Delta V_1 = \Delta V_2$, $\Delta U_1 = \Delta U_2 \equiv \Delta U$, что равносильно условию $I_2 V_{21} - I_1 V_{11} = I_2 V_{22} - I_1 V_{12} \equiv A$. Тогда

$$2Z'(q) = \big(A - \beta(I_2 - I_1)(f(q) + f'(q))\big) \times \frac{e^{-q\Delta U}}{(1 + e^{-q\Delta U})^2}.$$

Обозначим $G(q) = A - \beta(I_2 - I_1)F(q)$, где $F(q) = f(q) + qf'(q)$. Предположим, что $F(0) > 0$, то есть $A > \beta(I_2 - I_1)$, а также пусть найдется такое $q = \tilde{q}$, что $F(\tilde{q}) < 0$, то есть $A < \beta(I_2 - I_1)F(\tilde{q})$.

Последнее условие определяется соответствующим выбором функции $f(q)$. Тогда на промежутке $(0, \tilde{q})$ существует точка q^*, доставляющая $\max\limits_q Z(q)$.

Пример 2. Пусть $f(q)$ – непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $[0, +\infty)$, $I_2 > I_1$, $V_{21} = V_{22} = V_2$, изменение V_1 задано (2), $V_2 > V_1$, $\beta < V_2$. Тогда

$$Z'(q) = \frac{1}{T}\Big(\frac{\Delta V_1 \Delta t_1 (\Delta U_1 + q\Delta U_1') e^{-q\Delta U_1}}{(e^{-q\Delta U_1} + 1)^2} + \frac{\Delta V_2 \Delta t_2 (\Delta U_2 + q\Delta U_2') e^{-q\Delta U_2}}{(e^{-q\Delta U_2} + 1)^2}\Big),$$

где

$$\Delta U_1 = (I_2 V_{21} - I_1 V_{11}) - \beta(I_2 - I_1) f(q),$$
$$\Delta U_2 = (I_2 V_{22} - I_1 V_{12}) - \beta(I_2 - I_1) f(q),$$
$$\Delta U_1' = \Delta U_2' = -\beta(I_2 - I_1) f'(q).$$

Рассмотрим $\Delta U_j + q\Delta U_j' = (I_2 V_{2j} - I_1 V_{1j}) - \beta(I_2 - I_1) f(q) - \beta(I_2 - I_1) q f'(q)$, $j = 1, 2$. Несложно показать, что

$$\frac{I_2 V_{2j} - I_1 V_{1j}}{\beta(I_2 - I_1)} > 1.$$

Из чего следует, что $\Delta U_j > 0$. И, следовательно, при $f'(q) < 0$ получим $Z(q^*) = \max\limits_q Z(q) = \lim\limits_{q \to +\infty} Z(q)$.

В случае, когда $f'(q) > 0$, требуется дополнительное исследование параметров, входящих в $Z'(q)$, которое затруднено вследствие их значительного количества.

Приведенные примеры показывают возможность различных реализаций, в зависимости от условий, оптимального рационального выбора. Наличие большого количества параметров не позволяет провести достаточно полное, доступное восприятию исследование функции $Z(q)$. Предлагаемый подход к понятию оптимального рационального выбора дает возможность в каждом конкретном случае, для определенной ситуации делать различные выводы о рациональности того или иного выбора.

Заключение

В данной работе рассматривается задача рационального выбора популяцией участка. Для определения оптимального выбора участка предлагается подход, основанный на идее распределения Больцмана. Для построения распределения Больцмана были предложены функции полезности. Также предложены методы анализа рациональности выбора участка: анализ математического ожидания как функции, зависящей от параметра q. Исследовано влияние затрат на получение информации о качестве участков на процесс принятия решения относительно выбора подходящего участка.

Литература

1. *Кириллов А. Н., Данилова И. В.* Динамика распределения популяции по ареалам // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. № 3. С. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275

2. *Barack D. L., Chang S. W. C., Platt M. L.* Posterior cingulate neurons dynamically signal decisions to disengage during foraging // Neuron. 2017. No. 2. P. 339–347. doi: 10.1016/J.Neuron.2017.09.048

3. *Braun D. A., Ortega P. A.* Information-theoretic bounded rationality and ε-optimality // Entropy. 2014. No. 16. P. 4662–4676. doi: 10.3390/e16084662

4. *Cressman L., Krivan V.* The ideal free distribution as an evolutionarily stable state in density-dependent population games // Oikos. 2010. No. 8. P. 1231–1242. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.17845.x

5. *Kirillov A. N., Danilova I. V.* The Boltzmann distribution in the problem of rational choice by population of a patchunder an imperfect information about its resource // Моделирование и анализ информационных систем. 2023. № 3. С. 234–245. doi: 10.18255/1818-1015-2023-3-234–245

6. *Ortega P. A., Braun D. A., Dyer J., Kim K. E., Tishby N.* Information-theoretic bounded rationality. Preprint, 2015. URL: https://arxiv.org/abs/1512.06789 (дата обращения: 30.04.2024).

7. *Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U.* Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: Departures from the ideal free distribution // Oikos. 2010. No. 9. P. 1469–1483. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.18196.x

References

1. *Kirillov A. N., Danilova I. V.* Dynamics of population patch distribution. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh system = Modeling and Analysis of Information Systems.* 2018;3:268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275 (In Russ.)

2. *Barack D. L., Chang S. W. C., Platt M. L.* Posterior cingulate neurons dynamically signal decisions to disengage during foraging. *Neuron.* 2017;2:339–347. doi: 10.1016/J.Neuron.2017.09.048

3. *Braun D. A., Ortega P. A.* Information-theoretic bounded rationality and ε-optimality. *Entropy.* 2014;16:4662–4676. doi: 10.3390/e16084662

4. *Cressman L., Krivan V.* The ideal free distribution as an evolutionarily stable state in density-dependent population games. *Oikos.* 2010;8:1231–1242. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.17845.x

5. *Kirillov A. N., Danilova I. V.* The Boltzmann distribution in the problem of rational choice by population of a patch under an imperfect information about its resource. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh system = Modeling and Analysis of Information Systems.* 2023;3:234–245. doi: 10.18255/1818-1015-2023-3-234-245

6. *Ortega P. A., Braun D. A., Dyer J., Kim K. E., Tishby N.* Information-theoretic bounded rationality. Preprint, 2015. URL: https://arxiv.org/abs/1512.06789 (accessed: 30.04.2024).

7. *Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U.* Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: Departures from the ideal free distribution. *Oikos.* 2010;9:1469–1483. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.18196.x

Поступила в редакцию / received: 30.04.2024; принята к публикации / accepted: 10.06.2024.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

e-mail: krllv1812@yandex.ru

Данилова Инна Владимировна
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

e-mail: danilovainna1987@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher

Danilova, Inna
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer