Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 39–48
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 39–48
DOI: 10.17076/mat1903

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.175.4

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых удовлетворяет следующему условию: при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

$d > 0$, $h \geqslant 0$, $g + h > 1$, $2 < g < 3$, где случайная величина η равна степени любой вершины графа. Изучаются случайные графы при условии, что сумма степеней всех вершин равна n. Найдены предельные распределения числа вершины заданной степени в таком условном графе при $N, n \to \infty$ так, что $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; предельное распределение

Для цитирования: Чеплюкова И. А. Об одной характеристике условного конфигурационного графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 39–48. doi: 10.17076/mat1903

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

I. A. Cheplyukova. ON A CHARACTERISTIC OF A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider configuration graphs with N vertices. The vertex degrees are independent equally distributed random variables whose distribution satisfies the following condition: as $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

$d > 0$, $h \geqslant 0$, $g + h > 1$, $2 < g < 3$, and the random value η is equal to the degree of any vertex of the graph. We study the random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is n. The limit distributions of the number of vertices with the given degree in the conditional graph are derived as $N, n \to \infty$ and $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$.

Keywords: configuration graph; vertex degree; limit distribution

For citation: Cheplyukova I. A. On a characteristic of a conditional configuration graph. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:39–48. doi: 10.17076/mat1903

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

Введение

Объект исследования в данной работе – конфигурационные графы, которые являются одним из известных видов случайных графов, используемых для моделирования различных сложных сетей коммуникаций (см, например, [10, 11]). Впервые конфигурационные графы были введены в [9].

Опишем процесс построения этих графов. Обозначим через N число вершин конфигурационного графа, степени вершин которого являются независимыми случайными величинами. Значения этих случайных величин равны числу выходящих из данной вершины полуребер, т. е. ребер, инцидентных этой вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. Все полуребра считаются различными и, соединяясь друг с другом попарно и равновероятно, образуют ребра. Поскольку сумма степеней вершин графа должна быть четной, при необходимости вводится вспомогательная вершина единичной степени. В [12] замечено, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при $N \to \infty$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин. Нетрудно понять, что такая конструкция допускает появление и петель, и кратных ребер.

Наблюдения за реальными сетями (см., например, [10]) показали, что число вершин степени не меньшей, чем k, при достаточно больших k пропорционально $1/k^{\tau-1}$, где $\tau > 1$. Это значит, что распределение случайной величины η, равной степени любой вершины, при больших значения k можно определить равенством

$$\mathbf{P}\{\eta \geqslant k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau-1}}, \quad \tau > 1, \tag{1}$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. В [12] было предложено рассматривать наиболее простую модель, в которой распределение случайной величины η имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{k^{\tau-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\tau-1}}, \tag{2}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ и $2 < \tau < 3$.

Исследованию предельного поведения конфигурационных графов посвящено большое число работ (см., например, [10]). В настоящей работе рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна n, впервые они исследовались в статье [6]. А в [3] и [5] изучаются конфигурационные графы при более естественном предположении, что число ребер графа ограничено сверху. Исследование таких условных графов представляет определенный интерес, поскольку на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях. Кроме того, их можно использовать для сетей без ограничений на число ребер путем усреднения результатов об условных графах по известному распределению суммы степеней вершин.

Приведем примеры ранее рассмотренных условных конфигурационных графов, распределения степеней которых удовлетворяют соотношению (1). В статьях [2] и [5] рассматривались конфигурационные графы, распределение степеней вершин которых соответствует условию: при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

где $d > 0$, $h \geqslant 0$, $g + h > 1$, $g \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что данное соотношение удовлетворяет (1) и является частным случаем при $h(k) = d/\ln^h k$, $g = \tau$. В [4] исследуется конфигурационный граф, степени вершин которого имеют распределение (2) при всех значениях

$k = 1, 2, \ldots$, где параметр τ является случайной величиной с равномерным распределением на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Также был рассмотрен пример, когда параметр τ распределения (2) имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha, 1)$, где $\alpha > 1$. Нетрудно видеть, что из (2) для первого примера справедлива асимптотика при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{a}{(b-a)k^{a+1}\ln k},$$

а для второго –

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{\alpha}{k \ln^{\alpha+1} k}.$$

В [2, 4, 5] главное внимание уделяется предельному поведению таких важных числовых характеристик степенной структуры условных графов, как максимальная степень и число вершин заданной степени. Так, например, в статье [2] найдены предельные распределения этих характеристик в случаях, когда $n, N \to \infty$, $n/N < M = \mathbf{E}\eta$. А в [5] получены предельные распределения числа вершин заданной степени для условных графов при условии, что сумма степеней всех вершин ограничена сверху. В основе доказательств всех этих результатов лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и изученная В. Ф. Колчиным (см., например, [1]), или ее аналог (см. [8])

В настоящей работе изучается конфигурационный граф, в котором распределение степени любой вершины соответствует условию: при $k \to \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k}, \tag{3}$$

где $d > 0$, $h \geqslant 0$, $2 < g < 3$. Будем предполагать, что $p_1 > 0$. Выбор области изменения параметра распределения g обусловлен тем, что, согласно многочисленным наблюдениям за реальными сетями, такие значения параметра $g = \tau - 1$ являются наиболее подходящими для большого числа реальных сетей. Заметим, что в данной области изменения параметра g распределение степеней вершин рассматриваемого графа имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Рассмотрим подмножество таких графов, при условии, что сумма степеней всех вершин данного графа равна n:

$$\xi_1 + \ldots + \xi_N = n,$$

где случайные величины ξ_i, $i = 1, \ldots, N$, равны степеням вершин условного графа с номерами $i = 1, \ldots, N$ соответственно. Такие условные графы рассматривались в статье [7], где были найдены предельные распределения максимальной степени вершины при $N, n \to \infty$ так, что $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$. В настоящей работе получены предельные теоремы для числа вершин заданной степени условного конфигурационного графа при $n, N \to \infty$, $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$. Учитывая, что в данной области изменения параметров n и N отношение n/N стремится к бесконечности, то утверждения, приведенные ниже, дополняют ранее полученные результаты статьи [2].

Сформулируем основные результаты данной работы. Через μ_r обозначим случайную величину, равную числу вершин степени r в рассматриваемом графе. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $n, N \to \infty$, $2 < g < 3$, $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$, $N/(r^g \ln^h r) \to \infty$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $u_r = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

Теорема 2. *Пусть $n, N, r \to \infty$, $2 < g < 3$, $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}(1 + o(1)).$$

Доказательства вспомогательных утверждений и теорем

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, распределение которых совпадает с распределением случайной величиной η, удовлетворяющим соотношению (3). Тогда для целых $k_1, \ldots, k_N$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N = n$, выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N\} \tag{4}$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \ldots + \eta_N = n\}.$$

Следовательно, для двух наборов случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$, распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (5)$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть

$$\zeta_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \ldots + \eta_N^{(r)}.$$

В [1] доказано, что для случайной величины μ_r следствием из равенства (4) является следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\}$$

$$= \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Согласно Лемме 1 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно найти асимптотику сумм независимых случайных величин ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$ и асимптотику биномиальной вероятности.

Рассмотрим предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$.

Лемма 2. *Пусть* $N, n \to \infty$, $2 < g < 3$, $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \to \infty$. *Тогда при* $S = N(1 - p_r)(1 + o(1))$ *равномерно относительно целых неотрицательных* k, *для которых* $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} = \frac{dN(1+o(1))}{n^g \ln^h n}.$$

Доказательство. Мы будем одновременно рассматривать два случая, когда r фиксировано и когда $r \to \infty$, учитывая при этом, что в случае $r \to \infty$ случайные величины $\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$ образуют схему серий. Из (3) и (5) нетрудно получить, что

$$m_r = \mathbf{E}\eta_\mathbf{1}^{(\mathbf{r})} = \frac{M - rp_r}{1 - p_r}, \quad (6)$$

где $M = \mathbf{E}\eta$.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\xi_j^{(r)} = \eta_j^{(r)} - m_r, \quad j = 1, \ldots, N, \quad (7)$$

и их сумму $\tilde{\zeta}_S^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_S^{(r)} = \zeta_S^{(r)} - Sm_r$. Обозначим $l = n - kr - Sm_r$ и

$$\gamma = \left(\frac{S^{1/(g-1)}}{l}\right)^{1/3}. \quad (8)$$

Согласно условиям леммы нетрудно видеть, что $\gamma \to 0$. Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} \\ &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l\} = P_1(l) + SP_2(l) + P_3(l), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$P_1(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leqslant \gamma l,\ j = 1, \ldots, S\},$$

$$P_2(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leqslant \gamma l,\ j = 1, \ldots, S-1,$$

$$\xi_N^{(r)} > \gamma l\},$$

$$P_3(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \bigcup_{i \neq j} \{\xi_i^{(r)} > \gamma l,\ \xi_j^{(r)} > \gamma l\}\}.$$

Ниже мы покажем, что основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (9), дает второе слагаемое.

Оценим первое слагаемое $P_1(l)$. Положим

$$R(\omega) \quad (10)$$

$$= \sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} \exp\{(j - m_r)\omega\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\}.$$

Заметим при этом, что $\gamma l \to \infty$. Введем вспомогательные независимые случайные величины $\xi_i^{(r)}(\gamma)$, $i = 1, \ldots, S$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)}(\gamma) = j - m_r\} \quad (11)$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = j - m_r\} \exp\{(j - m_r)/(\gamma l)\}}{R\left(1/(\gamma l)\right)},$$

где $1 \leqslant j \leqslant \gamma l + m_r$. Тогда $P_1(l)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_1(l) &= R^S\left(\frac{1}{\gamma l}\right) \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\right\} \\ &\times \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\}(1 + o(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\zeta_S^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + \ldots + \xi_N^{(r)}(\gamma)$.

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\}$. Обозначим через $\varphi(t)$, $\varphi_1^{(r)}(t), \tilde{\varphi}(t)$ и $\varphi_\gamma(t)$ характеристические функции случайных величин η_1, $\eta_1^{(r)}, \xi_1^{(r)}$ и $\xi_1^{(r)}(\gamma)$ соответственно. Используя (10) и (11), нетрудно получить, что

$$\varphi_\gamma(t) = R\left(it + \frac{1}{\gamma l}\right) / R\left(\frac{1}{\gamma l}\right). \quad (13)$$

Согласно формуле обращения, для вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma)=l\}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma)=l\} \leqslant \frac{1}{2\pi B_S}\int\limits_{-\pi B_S}^{\pi B_S}\left|\varphi_\gamma^S\left(\frac{t}{B_S}\right)\right|dt, \quad (14)$$

где

$$B_S=(S(g-1)^h/\ln^h S)^{1/(g-1)}. \quad (15)$$

Используя (12), (13) и (14), нетрудно показать, что при $0<\varepsilon<1$

$$P_1(l)\leqslant \frac{e^{-1/\gamma}}{2\pi B_S}\left(\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon B_S}\left|R\left(\frac{it}{B_S}+\frac{1}{\gamma l}\right)\right|^S dt\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varepsilon B_S<|t|\leqslant\pi B_S}\left|R\left(\frac{it}{B_S}+\frac{1}{\gamma l}\right)\right|^S dt\right). \quad (16)$$

Покажем, что интегралы правой части (16) ограничены. Учитывая, что при достаточно малых $y>0$ верно неравенство $1-e^{-y}<y$, а при $0\leqslant y\leqslant 1$ справедливо равенство

$$e^y=1+y+\delta(y), \quad \text{где} \quad \delta(y)\leqslant y^2,$$

из (7) и (10) находим, что

$$\left|R\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right|=\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant\gamma l+m_r}\exp\left\{(j-m_r)\right.\right.$$

$$\times\left.\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right\}\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}=j-m_r\}\Bigg|\leqslant\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|$$

$$+\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant\gamma l+m_r}e^{itj}\exp\left\{(j-m_r)\frac{1}{\gamma l}\right\}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\right.$$

$$\left.-\sum_{j\geqslant1}e^{itj}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\right|=\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|$$

$$+\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant\gamma l+m_r}e^{itj}\left(\exp\left\{\frac{j-m_r}{\gamma l}\right\}-1\right)\right.$$

$$\times\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}$$

$$\left.-\sum_{j>\gamma l+m_r}e^{itj}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\right|\leqslant\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|$$

$$+\sum_{1\leqslant j\leqslant m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\left(1-\exp\left\{\frac{j-m_r}{\gamma l}\right\}\right)$$

$$+\sum_{m_r<j\leqslant\gamma l+m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\left(-1+\exp\left\{\frac{j-m_r}{\gamma l}\right\}\right)$$

$$+\sum_{j>\gamma l+m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}$$

$$\leqslant\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|+\frac{1}{\gamma l}\sum_{1\leqslant j<m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}(m_r-j)$$

$$+\frac{1}{\gamma l}\sum_{m_r\leqslant j<\gamma l+m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}(j-m_r)$$

$$+\sum_{m_r\leqslant j<\gamma l+m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\delta\left(\frac{j-m_r}{\gamma l}\right)$$

$$+\sum_{j>\gamma l+m_r}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}. \quad (17)$$

Из (3) и (5) нетрудно видеть, что при достаточно больших k

$$\sum_{j>k}\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}=\frac{1}{1-p_r}\sum_{j>k}\mathbf{P}\{\eta_1=j,\,\eta_1\neq r\}$$

$$\leqslant C_1\sum_{j>k}p_k=C_1\sum_{j>k}\frac{d(1+o(1))}{j^g\ln^h j} \quad (18)$$

$$<C_2\int\limits_k^{+\infty}y^{-g}(\ln y)^{-h}dy\leqslant C_3(\ln k)^{-h}k^{-g+1}.$$

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ обозначают некоторые положительные постоянные. Аналогично тому, как получена оценка (18), переходя к интегральным суммам, можно показать, что при достаточно больших k справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{j<k}(j-m_r)^2\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)}=j\}\leqslant C_4\sum_{j\leqslant k}(j-m_r)^2p_k$$

$$\leqslant C_5k^{-g+3}. \quad (19)$$

Из (17), (18) и (19) находим, что

$$\left|R\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right|\leqslant\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|+\frac{M}{\gamma l}+C_6\left((\gamma l)^{1-g}\right)$$

$$\leqslant\left|\varphi_1^{(r)}(t)\right|+C_7\left((\gamma l)^{-1}\right).$$

Отсюда, учитывая, что при выполнении условий леммы 2 верно соотношение

$$\gamma l/S=\left(\frac{l}{S^{(3g-4)/(2g-2)}}\right)^{2/3}\to\infty,$$

можно показать, что

$$\left|R\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right| = \left|\varphi_1^{(r)}(t)\right| + o\left(\frac{1}{S}\right), \qquad (20)$$

где

$$\varphi_1^{(r)}(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_1^{(r)}} = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1-p_r}. \qquad (21)$$

Пусть $\delta \in (0,1)$. Тогда для любого фиксированного r найдется положительное ε_r такое, что $|\varphi_1^{(r)}(t)| > \delta$ при $|t| \leqslant \varepsilon_r$. А при $r \to \infty$ из (3) и (21) находим такое $\varepsilon > 0$, что $|\varphi_1^{(r)}(t)| > \delta$ при $|t| \leqslant \varepsilon$. Тогда из (20) находим, что

$$\left|R\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right|^S \leqslant |\varphi_1^{(r)}(t)|^S.$$

Отсюда следует, что первый интеграл в (16) ограничен.

По свойству характеристических функций решетчатых распределений с единичным максимальным шагом при $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ верно неравенство

$$\left|R\left(it+\frac{1}{\gamma l}\right)\right| \leqslant C_8 < 1.$$

Значит, и второй интеграл (16) ограничен, следовательно, из (16) получаем, что

$$P_1(l) \leqslant C_9 B_S^{-1} e^{-1/\gamma}. \qquad (22)$$

Учитывая, что $\ln l < C_{10}\gamma^{-C_{11}}$, из (8) и (15) нетрудно показать, что

$$\frac{e^{-1/\gamma} l^g \ln^h l}{SB_S} < C_{12}\exp\left\{-\left(\frac{l}{S^{1/(g-1)}}\right)^{1/3}\right\}$$

$$\times\left(\frac{l}{S^{1/(g-1)}}\right)^g \ln^{C_{13}} l < C_{14} e^{-1/\gamma}\gamma^{-C_{15}} \to 0.$$

Отсюда и из (15), (22) следует, что

$$P_1(l) = o\left(\frac{S}{l^g \ln^h l}\right). \qquad (23)$$

Рассмотрим $P_2(l)$. Нетрудно видеть, что $P_2(l)$ можно представить в виде суммы:

$$P_2(l) = \sum_{j>\gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\} \qquad (24)$$

$$\times\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l, i = 1,\dots,S-1\}.$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_{i,\gamma l}^{(r)}$, $i = 1,\dots,S-1$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} = k\}$$
$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k - m_r \,|\, \eta_1 \neq r, \eta_1 \leqslant \gamma l\}, \qquad (25)$$

и их сумму $\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = \xi_{1,\gamma l}^{(r)} + \ldots + \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$. Из (5), (7), (8), (18) и (25), учитывая, что

$$(\gamma l)^{1-g} S = \left(\frac{S}{l^{g-1}}\right)^{2/3} \to 0, \qquad (26)$$

получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l, i = 1,\dots,S-1\}$$

$$= \left(\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} \leqslant \gamma l\}\right)^{S-1} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\}$$

$$= \left(1 - \sum_{k>\gamma l} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = k + m_r\}\right)^{S-1}$$

$$\times\,\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\}$$

$$= \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\}(1 + o(1)). \qquad (27)$$

Используя (24) и (27), $P_2(l)$ можно представить в следующем виде:

$$P_2(l) = \sum_{i=1}^{4} R_i(l)(1 + o(1)), \qquad (28)$$

где

$$R_i(l) = \sum_{J_i} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\}\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\},$$

$$J_1 = \{j : \gamma l + m_r < j < \gamma^{1/2} l\};$$
$$J_2 = \{j : \gamma^{1/2} l \leqslant j < l - \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\};$$
$$J_3 = \{j : l - \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} \leqslant j \leqslant l + \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\};$$
$$J_4 = \{j : j > l + \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\}.$$

Рассмотрим сначала слагаемое $R_3(l)$, поскольку оно дает основной вклад в сумму (28). Из (3) и соотношения $S^{1/(g-1)}/l \to 0$ получаем, что в области J_3

$$\mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\}$$

$$= \begin{cases} \frac{d(1+o(1))}{((1-p_r) l^g \ln^h l)}, & \text{если} \quad j \neq r; \\ 0, & \text{если} \quad j = r. \end{cases}$$

Отсюда и из (28) находим, что

$$R_3(l) = \frac{d(1 + o(1))}{(1-p_r) l^g \ln^h l}\,\mathbf{P}\left\{-\frac{S^{1/(g-1)}}{\gamma} + m_r\right.$$

$$\leqslant \zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} \leqslant \frac{S^{1/(g-1)}}{\gamma} + m_r \Big\}. \qquad (29)$$

Пусть $g(x)$ обозначает плотность устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{\Gamma(1-g) d\cos(\pi(g-1)/2)|t|^{g-1} \times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan(\pi(g-1)/2)\right)\right\},$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма функции в точке x. Кроме того, обозначим через $\varphi_{\gamma l,r}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi^{(r)}_{1,\gamma l}$. Из (18), (21), (25) и (26) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\varphi_{\gamma l,r}(t) &= \sum_k e^{itk}\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} = k\} \\ &= \frac{\tilde{\varphi}(t) - \sum\limits_{k>\gamma l} e^{itk}\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 = k\}}{1 - \mathbf{P}\{\eta^{(r)}_1 > \gamma l + m_r\}} \\ &= \tilde{\varphi}(t)\left(1 + O((\gamma l)^{1-g}\ln^{-h}(\gamma l))\right) \\ &= e^{-itm_r}\varphi^{(r)}_1(t)\left(1 + o(1/S)\right).\end{aligned} \qquad (30)$$

Отсюда и из [5, лемма 6] следует, что при $r/B_S \to 0$

$$\mathbf{P}\{-\gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r \leqslant \zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} \leqslant \gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r\} \to \int_{-A_1}^{A_1} g(x)dx, \qquad (31)$$

где

$$A_1 = \frac{\gamma^{-1}(S(1-p_r))^{1/(g-1)}}{B_S},$$

а B_S определена в (15). Кроме того, из (30) и [5, лемма 9] следует, что при $r/B_S \geqslant C_{16}$

$$\mathbf{P}\{-\gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r \leqslant \zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} \leqslant \gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r\} \to \int_{-A_2}^{A_2} g(x)dx, \qquad (32)$$

где $A_2 = \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}/B_S$. Из (8) и (15) нетрудно видеть, что $A_1, A_2 \to \infty$. Тогда отсюда, из (31) и (32) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{-\gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r \leqslant \zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} \leqslant \gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r\} \to 1. \qquad (33)$$

Тогда из (29) и (33) находим, что

$$R_3(l) = \frac{d(1+o(1))}{(1-p_r)l^g\ln^h l}. \qquad (34)$$

Рассмотрим $R_4(l)$. Из (3) и (28), учитывая, что $\gamma^{-1}S^{1/(g-1)}/l \to 0$, несложно получить, что

$$R_4(l) \leqslant \frac{C_{17}}{l^g\ln^h l}\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} < -\gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}. \qquad (35)$$

Следуя алгоритму получения соотношения (31) и используя [5, леммы 6 и 9], нетрудно показать, что справедливо

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} < -\gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\} \to 0. \qquad (36)$$

Из (35) и (36) находим, что

$$R_4(l) = o\left(\frac{1}{l^g\ln^h l}\right). \qquad (37)$$

Оценим $R_1(l)$. Учитывая, что $\gamma l \to \infty$, из (3) и (28) получаем, что

$$R_1(l) \leqslant \frac{C_{18}}{(\gamma l)^g\ln^h(\gamma l)}\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > l - l\gamma^{1/2}\}. \qquad (38)$$

Оценим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > l - l\gamma^{1/2}\}$, используя неравенство Чебышева. Из (3) легко показать, что при достаточно больших k

$$\sum_{j>k}(j - m_r)p_j \leqslant C_{19}(\ln k)^{-h}k^{-g+2}. \qquad (39)$$

Сделаем оценку первого и второго момента случайной величины $\xi^{(r)}_{1,\gamma l}$. Из (3), (5), (6), (18), (25), (39), учитывая, что $\mathbf{E}\xi^{(\mathbf{r})}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}\xi^{(r)}_{1,\gamma l}\right| &= \left|\sum_{k\leqslant\gamma l} k\frac{\mathbf{P}\{\eta^{(r)}_1 = k - m_r\}}{1 - (1-p_r)^{-1}\sum\limits_{k>\gamma l}p_k}\right| \\ &= \sum_{k>\gamma l} k\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 = k\}\left(1 + O\left(((\gamma l)^g\ln^h(\gamma l))^{-1}\right)\right) \\ &\leqslant C_{20}\sum_{k>\gamma l}(k - m_r)p_k \leqslant C_{20}\frac{(\gamma l)^{2-g}}{\ln^h(\gamma l)}.\end{aligned} \qquad (40)$$

Аналогично тому, как получено (40), используя (19), нетрудно показать, что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\xi^{(r)}_{1,\gamma l}\right)^2 &= \sum_{1-m_r\leqslant k} k^2\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} = k\} \\ &\leqslant C_{21}\sum_{1-m_r\leqslant k\leqslant\gamma l} k^2\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 = k\}\end{aligned}$$

$$\leqslant C_{22}\,(\gamma l)^{3-g}\,. \qquad (41)$$

Применяя неравенство Чебышева, из (40) и (41) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > l - l\gamma^{1/2}\}$$

$$\leqslant \frac{C_{23}}{l^2}\mathbf{E}\left(\xi^{(r)}_{1,\gamma l} + \ldots + \xi^{(r)}_{S-1,\gamma l}\right)^2$$

$$= \frac{C_{23}}{l^2}\Big((S-1)(l\gamma)^{3-g}$$

$$+ (S-1)(S-2)\frac{(\gamma l)^{-2g+4}}{\ln^{2h}(\gamma l)}\Big) \leqslant C_{24}\gamma^{2g}. \qquad (42)$$

Из (8), (38) и (42) получаем, что

$$R_1(l) = O\left(\frac{\gamma^g}{l^g \ln^h(\gamma l)}\right) = o\left(\frac{1}{l^g \ln^h l}\right). \qquad (43)$$

Рассмотрим $R_2(l)$. Учитывая, что $\gamma^{1/2}l \to \infty$, из (3) и (28) следует, что

$$R_2(l) \leqslant \frac{C_{25}}{(\gamma^{1/2}l)^g \ln^h(\gamma^{1/2}l)} \times \mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}. \qquad (44)$$

Пусть $u = \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}$. Поскольку $u < \gamma l$, вероятность $\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > u\}$ можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > u\} = (S-1)\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} > u\}$$

$$+ \mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > u \,|\, \xi^{(r)}_{i,\gamma l} \leqslant u,\, i = 1,\ldots,S-1\}$$

$$\times \left(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} \leqslant u\}\right)^{S-1} \leqslant (S-1)\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} > u\}$$

$$+ \left(\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 \leqslant u \,|\, \xi^{(r)}_1 \leqslant \gamma l\}\right)^{S-1}\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,u} > u\}$$

$$= (S-1)\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} > u\} + \left(\frac{1-\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > u\}}{1-\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > \gamma l\}}\right)^{S-1}$$

$$\times \mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,u} > u\}. \qquad (45)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое последней суммы соотношений (45). Из (5), (7), (18), (24), (25) для первого слагаемого этой суммы получаем, что

$$(S-1)\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{1,\gamma l} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}$$

$$\leqslant (S-1)\frac{\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}}{1-\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > \gamma l\}}$$

$$\leqslant C_{26}\frac{S}{1-p_r}\left(\sum_{k>\gamma^{-1}S^{1/(g-1)},k\neq r} p_k\right)$$

$$\times\left(1 - \frac{1}{1-p_r}\sum_{k>\gamma l,k\neq r} p_k\right)^{-1}$$

$$\leqslant C_{27}\frac{\gamma^{g-1}}{\ln^h(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})}. \qquad (46)$$

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\left\{\zeta^{(r)}_{S-1,u} > u\right\}$ при $u = \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}$. Оценим первый и второй моменты случайной величины $\xi^{(r)}_{1,u}$. Учитывая, что $\mathbf{E}\left(\xi^{(r)}_1\right) = 0$, из (5), (7), (18), (19), (24) и (25) находим, что

$$\left|\mathbf{E}\left(\xi^{(r)}_{1,u}\right)\right| \leqslant \left|C_{28}\sum_{1-m_r\leqslant k\leqslant u} k\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 = k\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|C_{29}\sum_{k<u} k\mathbf{P}\{\eta_1 = k + m_r\}\right|$$

$$\leqslant C_{30}\frac{(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})^{2-g}}{\ln^h(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})} \qquad (47)$$

и

$$\mathbf{E}\left(\xi^{(r)}_{1,u}\right)^2 \leqslant C_{31}\sum_{1-m_r\leqslant k\leqslant u} k^2\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 = k\}$$

$$\leqslant C_{32}\sum_{1-m_r\leqslant k\leqslant u}(k-m_r)^2 p_k$$

$$\leqslant C_{33}(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})^{3-g}. \qquad (48)$$

Применяя неравенство Чебышева, аналогично тому, как получено соотношение (42), из (47) и (48) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,u} > u\} \leqslant C_{34}\gamma^{g-1}. \qquad (49)$$

Учитывая, что

$$(\gamma l)^{1-g}S = \gamma^{2(g-1)} \to 0,$$

из (7), (18) следует, что

$$\left(\frac{1-\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}}{1-\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_1 > \gamma l\}}\right)^{S-1}$$

$$= \left(\frac{1-\mathbf{P}\{\eta^{(r)}_1 > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r\}}{1-\mathbf{P}\{\eta^{(r)}_1 > \gamma l + m_r\}}\right)^{S-1}$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{(\gamma l))^{1-g}}{\ln^h(\gamma l))}\right)\right)^{S-1} = \left(1 + o\left(\frac{1}{S}\right)\right)^{S-1}$$

$$= 1 + o(1). \quad (50)$$

Тогда из соотношений (45), (46), (49) и (50) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{S-1,\gamma l} > \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\} \leqslant C_{35}\gamma^{g-1}. \quad (51)$$

Тогда из (8), (44) и (51) получаем, что

$$R_2(l) = O\left(\frac{\gamma^{g/2-1}}{l^g \ln^h(\gamma l)}\right) = o\left(\frac{1}{l^g \ln^h l}\right). \quad (52)$$

Следовательно, из (28), (34), (37), (43) и (52) находим, что

$$P_2(l) = \frac{d(1+o(1))}{(1-p_r) l^g \ln^h l}. \quad (53)$$

Осталось рассмотреть $P_3(l)$. Из (9) нетрудно видеть, что

$$P_3(l) \quad (54)$$

$$= \binom{S}{2} \sum_{k > 2(\gamma l + m_r)} \mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{S-1} + \xi^{(r)}_S = k - 2m_r,$$

$$\xi^{(r)}_{S-1} > \gamma l,\, \xi^{(r)}_S > \gamma l\}\, \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}^{(r)}_{S-2} = l - k + 2m_r\}.$$

Из (7), (18) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{S-1} + \xi^{(r)}_S = k - 2m_r, \xi^{(r)}_{S-1} > \gamma l, \xi^{(r)}_S > \gamma l\}$$

$$= \sum_J \mathbf{P}\{\xi^{(r)}_{S-1} = j - m_r\} \mathbf{P}\{\xi^{(r)}_S = k - m_r - j\}$$

$$\leqslant C_{36}(\gamma l)^{-g} \ln^{-h}(\gamma l)\, \mathbf{P}\{\xi^{(r)}_S > \gamma l\}$$

$$\leqslant C_{37}(\gamma l)^{-2g+1} \ln^{-2h}(\gamma l), \quad (55)$$

где

$$J = \{j : \gamma l + m_r < j < k - \gamma l - m_r\}.$$

Учитывая, что

$$S\gamma^{-2g+1} l^{-g+1} = \gamma^{g-2} \to 0,$$

из соотношений (54) и (55) вытекает, что

$$P_3(l) \leqslant C_{38} S^2 (\gamma l)^{-2g+1} \ln^{-2h}(\gamma l) \times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}^{(r)}_{S-2} > l - 2l\gamma\} = o\left(S l^{-g} \ln^{-h} l\right). \quad (56)$$

Тогда утверждение леммы следует из соотношений (9), (23), (53) и (56). $\square$

Для суммы независимых случайных величин ζ_N можно использовать [7, лемма 2], согласно которой для вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $N, n \to \infty$, $2 < g < 3$, $n/B_N \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{dN(1+o(1))}{n^g \ln^h n},$$

где B_N *определено в (15).*

Теперь можно перейти к доказательству основных теорем. Учитывая, что $N - k = N(1 - p_r)(1 + o(1))$, из лемм 2 и 3 находим, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta^{(r)}_{N-k} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \to 1. \quad (57)$$

Тогда при использовании нормального приближения биномиальной вероятности для доказательства теоремы 1 и пуассоновского приближения биномиальной вероятности для теоремы 2 утверждения теорем 1 и 2 следуют из леммы 1 и соотношения (57).

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматгиз, 2000. 208 с.

2. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

3. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512

4. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, № 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

5. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, № 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

7. *Чеплюкова И. А.* Об одной характеристике условного распределения конфигурационного графа // Дискретная математика. 2023. Т. 35, № 4. С. 132–145. doi: 10.4213/dm1761

8. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

9. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80|)80030-8

10. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 321 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Perform. Eval. 2004. Vol. 55, no. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

References

1. *Kolchin V. F.* Random graphs. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2010. 256 p.

2. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *Sbornik: Mathematics.* 2018;209(2):258–275. doi: 10.1070/SM8832

3. *Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V.* On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics.* 2016;207(3):400–417. doi: 10.1070/SM8512

4. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with a bounded number of edges. *Discrete Mathematics and Applications.* 2019;29(4):219–232. doi: 10.1515/dma-2019-0020

5. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with a bounded number of edges. *Theory of Probability and its Applications.* 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications.* 2008;18(5):447–463. doi: 10.1515/DMA.2008.033

7. *Cheplyukova I. A.* On one characteristic of the conditional distribution of a configurational graph. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications.* 2023;35(4):132–145. doi: 10.4213/dm1761 (In Russ.)

8. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications.* 2012;22(1):101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

9. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80|)80030-8

10. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2007. 212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 321 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004;55(1–2):3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию / received: 01.04.2023; принята к публикации / accepted: 01.05.2023.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: chia@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher