Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 23–27
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 23–27
DOI: 10.17076/mat1883

УДК 515.12

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ КОМПАКТ БЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НИЖНЕЙ ЕМКОСТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Термин «(би)компакт без промежуточных размерностей» был введен В. В. Федорчуком в 1973 году для обозначения компактных пространств топологической (лебеговой) размерности n, все непустые замкнутые подмножества которых либо нульмерны, либо также имеют размерность n. Емкостные размерности (верхняя $\overline{\dim}_B$ и нижняя $\underline{\dim}_B$) метрических компактов могут принимать любое неотрицательное значение (включая бесконечность), и для них вопрос о промежуточных значениях размерности формулируется следующим образом:

Пусть метрический компакт X имеет емкостную размерность (верхнюю или нижнюю), равную a. Верно ли, что для любого неотрицательного $b < a$ в X существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна b?

Известно, что для верхней емкостной размерности этот вопрос решается положительно. Для нижней емкостной размерности автором ранее был построен пример одномерного (в смысле $\dim_B$) метрического компакта без промежуточных значений $\underline{\dim}_B$. В настоящей работе доказана следующая теорема, усиливающая этот результат:

Для любого положительного числа $a \leqslant \infty$ существует метрический компакт X размерности $\dim_B X = a$, все непустые собственные замкнутые подмножества которого имеют размерность $\underline{\dim}_B$, равную нулю.

Таким образом, существуют метрические компакты любой наперед заданной емкостной размерности a без промежуточных значений нижней емкостной размерности. Наибольший интерес здесь представляет случай $a = \infty$.

Ключевые слова: метрический компакт; емкостная размерность; компакт без промежуточных размерностей; обратный спектр; канторовское совершенное множество

Для цитирования: Иванов А. В. Бесконечномерный компакт без промежуточных значений нижней емкостной размерности // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 23–27. doi: 10.17076/mat1883

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. V. Ivanov. INFINITE-DIMENSIONAL COMPACTUM WITHOUT INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

The term «(bi)compactum without intermediate dimensions» was introduced by V. V. Fedorchuk in 1973 to denote compact spaces of topological (Lebesgue) dimension n, all non-empty closed subsets of which are either zero-dimensional or also have dimension n. The box dimensions (upper $\overline{\dim}_B$ and lower $\underline{\dim}_B$) of metric compacta can take any non-negative value (including infinity), and the question of intermediate values of their dimension is formulated as follows.

Let a metric compact space X have a box dimension (upper or lower) equal to a. Is it true that for any non-negative $b < a$ there exists a closed subset in X whose corresponding box dimension is equal to b?

The answer for the upper box dimension is known to be positive. For the lower box dimension, the author has previously constructed an example of a one-dimensional (in the sense of $\dim_B$) metric compactum without intermediate values of $\underline{\dim}_B$.

In this paper, we prove the following theorem, which strengthens this result: for any positive real number $a \leqslant \infty$ there exists a metric compact space X of dimension $\dim_B X = a$, in which all non-empty proper closed subsets have the dimension $\underline{\dim}_B$ equal to zero.

Thus, there exist metric compacta of any predefined box dimension a without intermediate values of the lower box dimension. The case of greatest interest here is $a = \infty$.

Keywords: metric compact space; box dimension; compact space without intermediate dimensions; inverse system; Cantor perfect set

For citation: Ivanov A. V. Infinite-dimensional compactum without intermediate values of the lower box dimension. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:23–27. doi: 10.17076/mat1883

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

В работе рассматривается емкостная размерность замкнутых подмножеств метрического компакта (X, ρ). Напомним определения. Для замкнутого подмножества $F \subset X$ и $\varepsilon > 0$ через $N(F, \varepsilon)$ обозначается наименьшее число точек в ε-сети F. Если F бесконечно, то число $N(F, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует емкостная размерность $\dim_B F$ подмножества F, которая определяется по формуле

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Указанный предел не всегда существует, и тогда рассматривают верхний и нижний пределы и говорят (соответственно) о верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$ емкостных размерностях F. Размерность $\dim_B$ находит широкие приложения в различных областях математики. Подробное изложение теории емкостных размерностей приведено в [3, глава 2].

В топологической теории компактов известен вопрос о промежуточных размерностях, который формулируется следующим образом. *Пусть компакт X имеет лебегову размерность* $\dim X = n$. *Верно ли, что для любого натурального $k < n$ в X существует замкнутое подмножество F размерности* $\dim F = k$*?* В метризуемом случае ответ на этот вопрос положительный, но для неметризуемых компактов это, вообще говоря, не так. В. В. Федорчук [4] построил пример n-мерного компакта, любое замкнутое подмножество которого имеет размерность либо n, либо 0.

Емкостные размерности метрических компактов (верхняя $\overline{\dim}_B$ и нижняя $\underline{\dim}_B$) могут принимать любое неотрицательное вещественное значение, и вопрос о промежуточных значениях для этих размерностей имеет следующую формулировку. *Пусть емкостная размерность (верхняя или нижняя) метрического компакта X равна $\alpha \in (0, \infty]$. Верно ли, что для любого $\beta \in [0, \alpha)$ в X существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна β?*

Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос дан в [2]. В работе [1] автор показал, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение неверно. А именно, в [1] построен одномерный (в смысле $\dim_B$) метрический компакт X, любое собственное непустое замкнутое подмножество F которого имеет размерность $\underline{\dim}_B F = 0$. В терминологии Федорчука это компакт без промежуточных значений нижней емкостной размерности.

В настоящей работе доказана следующая теорема, усиливающая результат работы [1].

Теорема. *Для любого $a \in (0, \infty]$ существует метрический компакт X размерности $\dim_B X = a$, гомеоморфный канторовскому совершенному множеству, все непустые собственные замкнутые подмножества которого имеют размерность $\underline{\dim}_B$, равную нулю.*

Таким образом, существуют метрические компакты любой наперед заданной емкостной размерности a без промежуточных значений нижней емкостной размерности. Наибольший интерес здесь представляет случай $a = \infty$. При доказательстве сформулированной выше теоремы используется техника работы [1].

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Мы используем следующие стандартные обозначения:

$$O(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\},$$

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Аналогично обозначаются открытая и замкнутая ε-окрестности подмножества $A \subset X$. Подмножество A называется ε-сетью в X, если $B(A, \varepsilon) = X$.

Переходим к доказательству теоремы. Как обычно, квадратными скобками мы будем обозначать целую часть числа, знаком «!» – факториал натуральных чисел. Положим

$$A_n = 2^{[a(n-1)]}$$

при $a < \infty$ и

$$A_n = 2^{(n-1)^2}$$

при $a = \infty$.

Пусть T_m, $m \in \mathbb{N}$ – семейство бесконечных попарно непересекающихся подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$ таких, что

$$\{1, \ldots, n+1\} \subset \bigcup_{m \leqslant n} T_m \tag{1}$$

для любого n.

Методом индукции по i для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим подмножество $X_n \subset \mathbb{N}^n$. На шаге $i \geqslant 2$ будем строить X_n для индексов $n \in ((i-1)!, i!]$.

Положим

$$X_1 = \{1\} \subset \mathbb{N}$$

и определим отображение $f_1 : X_1 \to \mathbb{N}$ по формуле $f_1(1) = 1$.

Шаг 2:

$$X_2 = \{(1, 1), \ldots, (1, A_2)\} \subset \mathbb{N}^2.$$

Определим инъективное отображение $f_2 : X_1 \oplus X_2 \to \mathbb{N}$ так, что $f_2|_{X_1} = f_1$ и $\mathrm{Im}(f_2)$ есть начальный отрезок $\mathbb{N}$.

Предположим теперь, что для всех $n \leqslant (i-1)!$ уже построены множества $X_n \subset \mathbb{N}^n$, для которых выполняются условия:

1) $|X_n| = A_n$,

2) если $(x_1, \ldots, x_n) \in X_n$, то $(x_1, \ldots, x_n, 1) \in X_{n+1}$ при $n + 1 \leqslant (i-1)!$.

Кроме того, предположим, что определено инъективное отображение

$$f_{i-1} : \bigoplus_{j \leqslant i-1} X_{j!} \to \mathbb{N},$$

для которого $\mathrm{Im}(f_{i-1})$ есть начальный отрезок $\mathbb{N}$.

Шаг i. Число i лежит в некотором множестве $T_{m(i)}$. В силу (1) $m(i) \leqslant i - 1$. Следовательно, прообраз $f_{i-1}^{-1}(m(i))$ непуст и состоит из точки $(z_1, \ldots, z_l) \in X_l$, где $l = j!$ для некоторого $j \leqslant i - 1$.

Для всех $n \in ((i-1)!, i!]$ определим X_n по индукции по n. Положим

$$X_n = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in X_{n-1}\} \\ \cup \{(z_1, \ldots, z_l, 1, \ldots, 1, i) : \\ i = 2, \ldots, A_n - A_{n-1} + 1\}.$$

В качестве отображения

$$f_i : \bigoplus_{j \leqslant i} X_{j!} \to \mathbb{N}$$

возьмем любое инъективное продолжение отображения f_{i-1} на $X_{i!}$, при котором $\mathrm{Im}(f_i)$ есть начальный отрезок $\mathbb{N}$.

Продолжая индукцию, получим искомое семейство множеств $X_n \subset \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$ таких, что $|X_n| = A_n$. Будем считать, что на X_n задана дискретная топология.

При $n > k$ обозначим через p_k^n отображение X_n в $\mathbb{N}^k$, действующее по формуле

$$p_k^n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Согласно построению множеств X_n, имеет место равенство $p_k^n(X_n) = X_k$. Таким образом, семейство $S = \{X_n, p_k^n : n, k \in \mathbb{N}, n > k\}$ пространств и отображений является обратным спектром, предел которого обозначим через X, а предельные проекции – через $p_n : X \to X_n$. Из определения предела спектра следует, что X является нульмерным компактом со счетной базой.

Покажем, что X не имеет изолированных точек. Предположим противное. Тогда для некоторой точки $x \in X$ существует k такое, что

$$p_k^{-1}(p_k(x)) = \{x\}. \tag{2}$$

Пусть $i! > k$ и $m = f_i(p_{i!}(x))$. По построению множеств X_n для любого $j \in T_m$, $j > i$ имеет место неравенство

$$|(p_{i!}^{j!})^{-1}(p_{i!}(x))| > 1,$$

что противоречит формуле (2). Таким образом, пространство X – нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек. Следовательно, X гомеоморфно канторовскому совершенному множеству.

Определим на X метрику ρ по формуле:

$$\rho(x, y) = 2^{-n},$$

где $x \neq y$ и $n = \min\{k : p_k(x) \neq p_k(y)\}$. Легко проверить, что аксиомы метрики при этом выполнены.

Положим $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Базу топологии X, порожденной метрикой ρ, образуют множества вида $O(x, \varepsilon_n)$, где $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. При этом нетрудно показать, что

$$O(x, \varepsilon_n) = p_n^{-1}(p_n(x)).$$

В то же время множества вида $p_n^{-1}(p_n(x))$, где $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, образуют базу предела спектра S. Таким образом, метрика ρ совместима с топологией X.

Покажем, что метрический компакт (X, ρ) является искомым. Легко проверить, что множество $B \subset X$ является ε_n-сетью в X тогда и только тогда, когда

$$p_{n-1}B = X_{n-1}.$$

Таким образом,

$$N(X, \varepsilon_n) = |X_{n-1}| = A_{n-1}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\dim_B X = \lim_{n\to\infty} \frac{\log A_{n-1}}{-\log \varepsilon_n} = a$$

(первое равенство в этой формуле следует из предложения 1 работы [2]).

Пусть теперь F – непустое собственное замкнутое подмножество X. Тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ существует точка $z = (z_1, \ldots, z_{k!}) \in X_{k!}$ такая, что

$$p_{k!}^{-1}(z) \cap F = \varnothing.$$

Пусть $m = f_k(z)$. По построению множеств X_n для каждого $i \in T_m$,

$$|p_{(i-1)!}F| = |p_{i!}F| \leqslant A_{(i-1)!}. \tag{3}$$

При этом если $B \subset F$ и $p_nB = p_nF$, то B – ε_n-сеть в F. Таким образом, из (3) следует, что

$$N(F, \varepsilon_{i!}) \leqslant A_{(i-1)!}.$$

Имеем

$$\underline{\dim}_B F \leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty, i\in T_m} \frac{\log N(F, \varepsilon_{i!})}{-\log \varepsilon_{i!}}$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty, i\in T_m} \frac{\log A_{(i-1)!}}{-\log \varepsilon_{i!}} = 0.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545. doi: 10.33048/smzh.2023.64.307

2. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034

3. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.

4. *Федорчук В. В.* Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.

References

1. *Ivanov A. V.* On the intermediate values of the box dimensions. *Siberian Mathematical Journal.* 2023;64(3):593–597. doi: 10.1134/S0037446623030072

2. *Ivanov A. V., Fomkina O. V.* On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

3. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. Chicago: The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

4. *Fedorchuk V. V.* Bicompacta with no intermediate dimensions. *Dokl. Acad. Nauk SSSR = Proceedings AS of the USSR.* 1973;213(4):795–797. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 16.03.2024; принята к публикации / accepted: 16.04.2024.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Alexander
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher