Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 33–38
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 33–38
DOI: 10.17076/mat1877

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.214.4+519.214.8

О ТЕОРЕМЕ С. Г. ТКАЧУКА ДЛЯ СХЕМЫ СЕРИЙ

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Рассматривается сумма $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин. Задача оценивания вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ при $N \to \infty$ в случае больших уклонений решена в теореме С. Г. Ткачука. Мы доказали подобную теорему в более узкой зоне изменения параметров N и n, когда распределение слагаемых зависит от неизвестной медленно меняющейся функции и имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию, включая случай зависимости параметра этого распределения от N, что приводит к возникновению схемы серий.

Ключевые слова: сумма случайных величин; большие уклонения; схема серий; медленно меняющаяся функция; предельная теорема

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О теореме С. Г. Ткачука для схемы серий // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 33–38. doi: 10.17076/mat1877

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. ON TKACHUK'S THEOREM FOR A SERIES SCHEME

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider the sum $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ of independent identically distributed integer-valued random variables. The problem of estimating the probability $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ as $N \to \infty$ in the case of large deviations was solved in Tkachuk's theorem. We prove a similar theorem for the series scheme where the summand distribution depends on an unknown slowly varying function and has finite expectation and infinite variance.

Keywords: sum of random variables; large deviations; series scheme; slowly varying function; limit theorem

For citation: Pavlov Yu. L. On Tkachuk's theorem for a series scheme. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:33–38. doi: 10.17076/mat1877

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

Введение и основной результат

Для решения многих перечислительных задач комбинаторного анализа часто используется так называемая обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и исследованная В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). В процессе применения этой схемы нередко возникает необходимость исследования предельного поведения сумм независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин в области больших уклонений. Подходящим инструментом для этого служит следующая теорема, принадлежащая С. Г. Ткачуку. Формулировка этой теоремы опубликована в [7], там же кратко изложена идея ее доказательства.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин, имеющих функцию распределения, принадлежащую области притяжения устойчивого закона с показателем β, $0 < \beta < 2$, $\beta \neq 1$, при этом если $1 < \beta < 2$, то $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Пусть при $k \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = Ck^{-(\beta+1)}(1 + o(1)),$$

где C – некоторая положительная постоянная. Тогда при $N, n \to \infty$ так, что $nN^{-1/\beta} \to \infty$,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = N\mathbf{P}\{\xi_1 = n\}(1 + o(1)).$$

В последние годы появился ряд работ, в которых подобные задачи рассматриваются в случае, когда общее распределение случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \tag{1}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\tau \in (2, 3)$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Задачи, связанные с такими распределениями, возникают при изучении структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования современных сложных сетей коммуникаций, а также при исследовании свойств лесов Гальтона – Ватсона (см., например, [3–6, 9–11]). Заметим, что в этих работах медленно меняющаяся функция $h(x)$ из распределения (1) ограничена сверху.

Результатом настоящей статьи является следующая теорема 2, представляющая собой модификацию теоремы 1 для наиболее важного в упомянутых применениях случая $\tau \in (2, 3)$ и $N, n \to \infty$ так, что $n/N^{\tau-1} \to \infty$. Отличие от теоремы 1 состоит в наличии в распределении (1) неизвестной медленно меняющейся функции $h(x)$ и в возможности возникновения схемы серий, когда параметр τ зависит от числа слагаемых в сумме $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$.

Теорема 2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин с общим распределением (1), где*

$$h(x) \leqslant C < \infty. \tag{2}$$

Пусть $N, n \to \infty$ так, что

$$n/N^{\tau-1} \to \infty, \tag{3}$$

а параметр $\tau \in (2, 3]$ фиксирован или $\tau = \tau(N) \in [2 + \theta, 3]$, где постоянная θ такова, что $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{Nh(n)}{n^\tau}(1 + o(1)).$$

В следующем разделе приводится доказательство теоремы 2. Мы надеемся, что это доказательство может рассматриваться как схема доказательства подобных теорем в более сложных случаях. В частности, в последующих исследованиях желательно расширить область изменения параметров N и n и изучить случай $\tau = \tau(N) \downarrow 2$.

Доказательство теоремы 2

Пусть значение параметра τ фиксировано. Обозначим

$$\gamma = \left(\frac{N^{(1-\alpha)/(\tau-1)}}{n}\right)^{1/6}, \tag{4}$$

где выбор достаточно малого $\alpha > 0$ будет ясен из дальнейшего. Из условия (3) очевидно, что $\gamma \to 0$. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = P_1(n) + NP_2(N) + P_3(n), \tag{5}$$

где

$$P_1(n) = \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leqslant \gamma n, i = 1, \ldots, N\},$$

$$P_2(n) = \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1, \xi_N > \gamma n\},$$

$$P_3(n) = \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \bigcup_{i \neq j}(\xi_i > \gamma n, \xi_j > \gamma n)\}.$$

Оценим $P_1(n)$. Обозначим

$$R(w) = \sum_{k \leqslant \gamma n} e^{wk}\mathbf{P}\{\xi_1 = k\}. \tag{6}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k>l}\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\sum_{k>l}\frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}.$$

Обозначая здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ некоторые положительные постоянные, учитывая (2), и заменяя суммирование интегрированием, находим, что

$$\sum_{k>l}\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\leqslant C_1\sum_{k>l}k^{-\tau}\leqslant C_2 l^{1-\tau}. \quad (7)$$

Поскольку при $0\leqslant y\leqslant 1$

$$e^y=1+v(y), \quad (8)$$

где $v(y)<2y$, из (6) получаем

$$R\left(\frac{1}{\gamma n}\right)=1-\sum_{k>\gamma n}\mathbf{P}\{\xi_1=k\} + \sum_{k\leqslant\gamma n}v\left(\frac{k}{\gamma n}\right)\mathbf{P}\{\xi_1=k\}. \quad (9)$$

Из (4) ясно, что при достаточно малых α

$$\gamma n\to\infty, \quad \frac{1}{\gamma n}=o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (10)$$

поэтому из (8) получаем

$$\sum_{k\leqslant\gamma n}v\left(\frac{k}{\gamma n}\right)\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (11)$$

Отсюда и из (7), (10)

$$\sum_{k>\gamma n}\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=o(N^{-1}). \quad (12)$$

Из (9), (11), (12) вытекает соотношение

$$R\left(\frac{1}{\gamma n}\right)=1+o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (13)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(\gamma)},\ldots,\xi_N^{(\gamma)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(\gamma)}=k\} = e^{k/(\gamma n)}\mathbf{P}\{\xi_1=k\}/R(1/(\gamma n)), \quad (14)$$

где $k\leqslant\gamma n$. Пусть $\zeta_N^{(\gamma)}=\xi_1^{(\gamma)}+\ldots+\xi_N^{(\gamma)}$. Тогда из (5), (6), (14)

$$P_1(n)=R^N(1/(\gamma n))e^{-1/\gamma}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)}=n\}. \quad (15)$$

Докажем, что при достаточно больших N, n

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)}=n\}\leqslant C_3N^{-1/(\tau-1)+u}, \quad (16)$$

где выбор достаточно малой величины u будет ясен из дальнейшего. Обозначим $\varphi(t)$, $\varphi_\gamma(t)$ характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\xi_1^{(\gamma)}$ соответственно. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)}=n\}=\frac{1}{2\pi N^{1/(\tau-1)-u}} \times\int\limits_{-\pi N^{1/(\tau-1)-u}}^{\pi N^{1/(\tau-1)-u}} exp\left\{-\frac{itn}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right\} \times\varphi_\gamma^N\left(\frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right)dt. \quad (17)$$

Рассмотрим выражение

$$|\varphi_\gamma(t)|=\left|\frac{R((\gamma n)^{-1}+it)}{R(1/(\gamma n))}\right|. \quad (18)$$

Используя (6), (8), выводим равенство

$$|R((\gamma n)^{-1}+it)| =\left|\sum_{k\leqslant\gamma n}e^{itk}\mathbf{P}\{\xi_1=k\} +\sum_{k\leqslant\gamma n}e^{itk}v\left(\frac{k}{\gamma n}\right)\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\right| =|\varphi(t)|\left|1-\varphi^{-1}(t)\left(\sum_{k>\gamma n}e^{itk}\mathbf{P}\{\xi_1=k\} -\sum_{k<\gamma n}e^{itk}v\left(\frac{k}{\gamma n}\right)\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\right)\right|.$$

Отсюда и из (11), (12) находим, что при достаточно малых t

$$|R((\gamma n)^{-1}+it)|=|\varphi(t)|(1+o(N^{-1})).$$

Поэтому из (13), (18)

$$|\varphi_\gamma(t)|^N\sim|\varphi(t)|^N. \quad (19)$$

Обозначим $F_\xi(x)$ функцию распределения случайной величины ξ_1. Из (1) следует, что при $x<0$

$$F_\xi(x)=0, \quad (20)$$

а если $x>0$, то, в силу [8, гл. VIII, § 9, теорема 1.a], при $x\to\infty$

$$F_\xi(x)=1-\frac{h(x)}{(\tau-1)x^{\tau-1}}(1+o(1)). \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21) означают, что для $F_\xi(x)$ выполнены условия теоремы 2.6.1 из [1, гл. II, § 6], поэтому эта функция распределения принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\tau-1$. Далее можно воспользоваться теоремами 2.2.2 и 2.6.5 [1, гл. II], из которых следует, что в окрестности нуля

$$\ln\varphi(t) = i\lambda t - c|t|^{\tau-1}l(t) \times \left(1 - i\beta\frac{t}{|t|}tg\frac{\pi(\tau-1)}{2}\right), \qquad (22)$$

где константы λ, β и $c>0$ определены в теореме 2.2.2 [1], а $l(t)$ – медленно меняющаяся в нуле функция.

По определению медленно меняющейся в нуле функции $l(t) = L(1/|t|)$, где $L(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Одно из простейших свойств медленно меняющейся на бесконечности функции $f(x)$ состоит в том, что при любом $\delta > 0$ и достаточно больших n

$$n^{-\delta} < f(n) < n^{\delta}. \qquad (23)$$

Тогда из (22), (23) вытекает, что сколь угодно малую положительную величину u можно подобрать так, что если $|t| \leqslant \varepsilon N^{1/(\tau-1)-u}$, то

$$\left|\varphi^N\left(\frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right)\right| \leqslant \exp\{-C_4|t|^{\tau-1+\delta}\}, \qquad (24)$$

где $\delta > 0$ может быть взято сколь угодно малым. Если $\varepsilon N^{1/(\tau-1)-u} < |t| \leqslant \pi N^{1/(\tau-1)-u}$, то, как хорошо известно,

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right)\right| \leqslant e^{-C_5}. \qquad (25)$$

Разбивая интеграл, стоящий в правой части (17), на сумму двух интегралов, соответствующих двум указанным выше областям изменения t, с помощью (19), (24), (25) получаем

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)} = n\} \leqslant C_6 N^{-1/(\tau-1)+u} \times \left(\int_0^\infty \exp\{-C_4|t|^{\tau-1+\delta}\}dt + 2\pi N^{1/(\tau-1)-u}e^{-C_5 N}\right),$$

откуда и следует (16).

Применяя (23) к $h(n)$, выбирая достаточно малое δ и объединяя (3), (4), (13), (15), (16), находим оценку

$$P_1(n) \leqslant C_7 N^{-1/(\tau-1)+u}e^{-1/\gamma} = o\left(\frac{Nh(n)}{n^\tau}\right). \qquad (26)$$

Оценим $P_2(n)$. Очевидно,

$$P_2(n) = \sum_{k\in K}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\} \times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\}, \qquad (27)$$

где $K = \{k:\ 0 \leqslant k < n(1-\gamma)\}$. Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\} = \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k | \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\} \times \mathbf{P}^N\{\xi_1 \leqslant \gamma n\}. \qquad (28)$$

Обозначим $\xi_1(\gamma n), \ldots, \xi_N(\gamma n)$ вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\gamma n) = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant \gamma n\}. \qquad (29)$$

Обозначим также $\zeta_{N-1}(\gamma n) = \xi_1(\gamma n) + \ldots + \xi_{N-1}(\gamma n)$. Из (12), (27)–(29)

$$P_2(n) = (1+o(1)) \times \sum_{k\in K}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) = k\}.$$

Эту сумму можно представить следующим образом:

$$P_2(n) = S_1 + S_2 + S_3, \qquad (30)$$

где

$$S_i = (1+o(1)) \times \sum_{k\in K_i}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) = k\},$$

$$i = 1,2,3; \quad K_1 = \{k:\ 0 \leqslant k \leqslant \gamma^\alpha n\},$$

$$K_2 = \{k:\ \gamma^\alpha n < k \leqslant n(1-\gamma^{1/6})\},$$

$$K_3 = \{k:\ n(1-\gamma^{1/6}) < k < n(1-\gamma)\}.$$

Из (1) находим, что

$$S_1 = \frac{h(n)}{n^\tau}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) \leqslant \gamma^\alpha n\}(1+o(1)). \qquad (31)$$

Из (29) следует равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) \leqslant \gamma^\alpha n\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\}}{(1-\mathbf{P}\{\xi_1 > \gamma n\})^{N-1}}. \qquad (32)$$

Выше было установлено, что $F_\xi(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\tau-1$. В этом случае, как показано в [1, формула (2.2.18)], нормирующий множитель из определения области притяжения имеет вид $B_N = N^{1/(\tau-1)}q(N)$, где $q(x)$ – медленно меняющаяся функция. Используя (3), (4), (23), нетрудно показать, что при достаточно малых α, δ

$$\gamma^\alpha n / B_N \to \infty. \tag{33}$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n\} \tag{34}$$
$$-(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n, \xi_1 > \gamma n\}.$$

Используя определение области притяжения, видим, что в силу (33)

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1}}{B_N} \leqslant \frac{\gamma^\alpha n}{B_N}\right\} \to 1,$$

а из (12) следует соотношение

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} \leqslant \gamma^\alpha n, \xi_1 > \gamma n\} \to 0.$$

Отсюда и из (31), (32), (34) следует

$$S_1 = \frac{h(n)}{n^\tau}(1 + o(1)). \tag{35}$$

Из (1), (30) видно, что

$$S_2 \leqslant C_8 \frac{h(n)}{(n\gamma^{1/6})^\tau}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > \gamma^\alpha n\}. \tag{36}$$

Далее, согласно (12),

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > \gamma^\alpha n\}$$
$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1} > \gamma^\alpha n, \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\}}{(1 - \mathbf{P}\{\xi_1 > \gamma n\})^{N-1}}$$
$$\leqslant C_9 \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\}. \tag{37}$$

Случайная величина ξ_1 имеет конечное математическое ожидание, поэтому, используя неравенство Чебышева, из (10) находим

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\} \leqslant C_{10} N / (\gamma^\alpha n).$$

Отсюда нетрудно вывести, что при достаточно малых α

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\} / \gamma^{\tau/6} = o(1),$$

и из (36), (37)

$$S_2 = o\left(\frac{h(n)}{n^\tau}\right). \tag{38}$$

Из (1) и (30) видим, что

$$S_3 \leqslant \frac{C_{11} h(n)}{(n\gamma)^\tau}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > n(1 - \gamma^{1/6})\}. \tag{39}$$

Оценивая S_3 аналогично (38), из (39) находим, что

$$S_3 = o\left(\frac{h(n)}{n^\tau}\right).$$

Отсюда и из (30), (35), (38)

$$P_2(n) = \frac{h(n)}{n^\tau}(1 + o(1)). \tag{40}$$

Осталось рассмотреть $P_3(n)$. Легко видеть, что

$$P_3(n) \leqslant \frac{N(N-1)}{2} \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_{N-1} + \xi_N = n - k, \xi_{N-1} > \gamma n, \xi_N > \gamma n\}.$$

Отсюда

$$P_3(n) \leqslant C_{12} N^2 \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\}$$
$$\times \left(\sum_{l \in L} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = l\}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k-l\}\right), \tag{41}$$

где $L = \{l : \quad \gamma n < l < n(1-\gamma) - k\}$. Из (1) и (12) следует

$$\sum_{l \in L} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = l\}\mathbf{P}\{\xi_N = n - k - l\}$$
$$\leqslant C_{13} \frac{h(n)}{(\gamma n)^\tau}\mathbf{P}\{\xi_N > \gamma n\} \leqslant C_{14} \frac{h(n)}{(\gamma n)^{2\tau - 1}}.$$

Из этого неравенства и (3), (4), (41) при достаточно малом α вытекает оценка

$$P_3(n) \leqslant C_{15} \frac{N^2 h(n)}{(\gamma n)^{2\tau-1}} = o\left(\frac{N h(n)}{n^\tau}\right).$$

Эта оценка вместе с (5), (26), (40) завершает доказательство теоремы 2 для фиксированных τ. Пусть теперь параметр τ зависит от $N : \tau = \tau(N)$. Все участвующие в доказательстве функции от τ равномерно непрерывны, поскольку τ изменяется на компакте $[2 + \theta, 3]$. Таким образом, утверждение теоремы сохраняет силу и при изменяющихся τ.

Замечание. Нетрудно проверить, что если $\tau \downarrow 2$ и скорость сходимости неизвестна, то нельзя гарантировать выполнение второго из соотношений (10). Этим и объясняется выбор левой границы $2 + \theta$ области изменений τ.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, позволившие существенно улучшить текст и устранить опечатки.

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматгиз, 2000. 208 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе // Математический сборник. 2021. Т. 212, вып. 9. С. 146–163. doi: 10.4213/sm9481

4. *Павлов Ю. Л.* О максимальном дереве леса Гальтона – Ватсона с бесконечной дисперсией распределения числа потомков // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 2. С. 78–92. doi: 10.4213/dm1765

5. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2022. Т. 316. С. 298–315. doi: 10.4213/tm4216

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, вып. 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332

7. *Ткачук С. Г.* Локальные предельные теоремы, учитывающие большие уклонения в случае предельных устойчивых законов // Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. 1973. № 2. С. 30–33.

8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

9. *Хворостянская Е. В.* О числе деревьев заданного объема в лесе Гальтона – Ватсона в критическом случае // Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т. 68, вып. 1. С. 75–92. doi: 10.4213/tvp5573

10. *Чеплюкова И. А.* Об одной характеристике условного распределения конфигурационного графа // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 4. С. 132–145. doi: 10.4213/dm1761

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

References

1. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordho; 1971. 438 p.

2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

3. *Pavlov Yu. L.* The maximum tree of a random forest in the configuration graph. *Sbornik: Mathematics.* 2021;212(9):1329–1346. doi: 10.1070/SM9481

4. *Pavlov Yu. L.* On the maximum tree of a Galton–Watson forest with infinite variance of the offspring distribution. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications.* 2023;35(2):78–92. doi: 10.4213/dm1765 (In Russ.)

5. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Sizes of trees in a random forest and configuration graphs. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2022;316:280–297. doi: 10.1134/S0081543822010205

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probability and its Applications.* 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460

7. *Tkachuk S. G.* Local limit theorems that take into account large deviations in the case of limit stable laws. *Izvestiya AN UzSSR, ser. fiz.-mat. nauk = Izvestia AS UzSSR, Ser. Phys. and Math.* 1973;2:30–33. (In. Russ.)

8. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York: John Wiley; 1991. 704 p.

9. *Khvorostyanskaya E. V.* On the number of trees of a given size in a Galton – Watson forest in the critical case. *Theory of Probability and its Applications.* 2023;68(1):62–76. doi: 10.1137/S0040585X97T991283

10. *Cheplyukova I. A.* One one characteristic of the conditional distribution of the configuration graph. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics.* 2023;35(4):132–145. doi: 10.4213/dm1761 (In Russ.)

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

Поступила в редакцию / received: 24.02.2024; принята к публикации / accepted: 22.04.2024.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher