Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 55–60
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 55–60
DOI: 10.17076/mat1859

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.115:519.2

СХЕМА ПЕРЕСТАНОВОК С ЗАДАННЫМ РАЗБРОСОМ ЕЕ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

Заданный разброс фиксированных элементов перестановки означает определенное число элементов между крайними из них по расположению в перестановке в каждом их порядке. Предложенная схема анализируется в доасимптотической области возможных значений параметров авторским перечислительным методом, т. е. решаются задачи перечислительной комбинаторики нахождения числа ее исходов, их бесповторного нумерованного перечисления, установления взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, определения вероятностей исходов и предлагается процедура их универсального моделирования.

Ключевые слова: схема перестановок; разброс фиксированных элементов перестановки; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Схема перестановок с заданным разбросом ее фиксированных элементов // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 55–60. doi: 10.17076/mat1859

N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH A GIVEN RANGE OF FIXED ELEMENTS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

A given range of fixed elements of a permutation means a certain number of elements between the elements located at the extremes in the permutation in each sequence. The proposed scheme is analyzed in the pre-asymptotic region of feasible parameter values using the enumerative method designed by the author, i. e., the enumerative combinatorics problems of finding the number of its outcomes, their non-repeated numbered enumeration, finding one-to-one correspondence between the types of outcomes and their numbers, determining the probabilities of outcomes are solved and a procedure for their universal modelingis proposed.

Keywords: permutation scheme; range of fixed elements of permutation; numbering problem; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Permutation scheme with a given range of fixed elements. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:55–60. doi: 10.17076/mat1859

Введение

Введем параметры схемы: n – размер перестановки, t – число ее фиксированных элементов $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_t)$, перечисленных здесь в возрастающем порядке их номеров мест в перестановке с заданным разбросом ρ. Для данной схемы будем решать перечисленные в аннотации задачи комбинаторики на основе бесповторного перечисления всех ее исходов с введением следующих основных понятий и обозначений:

Итерация – исходы действия с элементами схемы при перечислении ее исходов;

ПМ – перечислительный метод анализа закономерностей и вычисления характеристик исходов схем на основе построения процесса их перечисления в виде последовательных исходов действий-итераций над их элементами;

МГ – представление случайного процесса перечисления исходов схемы в виде вероятностного графа переходов в порядке итераций;

ЗН – задача нумерации о соответствии между номерами и видами исходов схемы;

ПЗН – прямая задача нумерации нахождения вида исхода схемы по его номеру;

ОЗН – обратная задача нумерации нахождения номера исхода схемы по его виду;

траектория исхода – последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

бесповторное перечисление исходов схемы характеризуется единственной траекторией для ее каждого исхода;

пучок в графе процесса – совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации – число переходов из каждого исхода итерации;

пучковая структура графа – перечисление размеров пучков всех итераций;

число исходов итерации при бесповторном перечислении исходов схемы совпадает с суммой размеров пучков предшествующей итерации;

число исходов схемы при бесповторном перечислении ее исходов – число исходов последней итерации.

Здесь и в дальнейшем номера элементов перестановки для краткости будем называть элементами.

1. Вспомогательные результаты

Основы используемого здесь перечислительного метода (см. [1]) будут представлены ниже. Результаты других участвующих здесь ранее изученных схем: перестановок, сочетаний и схемы последовательных действий (ПД) приведены в [2]. На результаты первых двух будем ссылаться, а основные результаты схемы ПД, являющейся итоговой для нашей схемы, кратко приведем.

1.1. Перечислительный метод

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [1, 2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов, дающее его единый прием, состоящее в разыгрывании номеров исходов с установленным вероятностным распределением, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающей специфику схемы. Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

1.2. Схема последовательных действий

Схема k ПД возникает, когда каждому следующему действию (итерации) подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если i-е действие $(i = \overline{1,k})$ совершается d_i числом способов, то число исходов схемы $N = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через R_{ij_i}, где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij_i} определяется характером действия. Исход совершения r действий $(r \leqslant k)$ обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2,j_2}, \ldots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получается при $r = k$.

Теорема 1. ПЗН. *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \ldots, d_k$ дан номер $N^{(k)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \ldots, R_{kj_k}\}$, опреде-*

ляемый номерами $(j_1, \ldots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$ находится по формуле $j_i = t_i + I(t_i)d_i$, где $t_i = N^{(i)} mod\ d_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;

$$N^{(i-1)} = \left[\frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i}\right],$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z, и $i = k, k-1, \ldots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Теорема 2. ОЗН. *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \ldots, d_k$ дан вид ее исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \ldots, R_{kj_k}\}$, определяющий номера $(j_1, \ldots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$. Тогда его номер вычисляется по формуле*

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1}(j_l - 1)\prod_{i=l+1}^{k} d_i + j_k.$$

(Анализ схем ПД с доказательством теорем 1 и 2 см. в [2, п. 1.8].)

1.3. О параметрах изучаемой схемы

Введем обозначения:

$\bar{m} = (m_1, \ldots, m_t)$ – номера последовательных мест t фиксированных элементов $\bar{a}$ в перестановке;

$\bar{V}$ – участок элементов перестановки на местах $(m_1, m_1+1, \ldots, m_t)$ размером $\rho + 2$, как 2 крайних элемента и ρ элементов между ними, среди которых $t-2$ фиксированных.

Лемма 1. *Для параметров изучаемой схемы верны соотношения:*

$$\rho = m_t - m_1 - 1;\ 0 \leqslant \rho \leqslant n-2; \qquad (1)$$

$$m_1 = \overline{1, n-\rho-1};\ m_t = \overline{\rho+2, n}. \qquad (2)$$

Доказательство. Доказательство (1) следует из условия схемы, что между элементами на местах m_1 и m_t лежит ρ элементов перестановки, откуда при крайних значениях $m_1 = 1$, $m_t = n$ получаем данное верхнее ограничение для ρ при очевидном нижнем ограничении, когда $t = 2$, $m_2 - m_1 = 1$.

Из (1) $m_1 = m_t - \rho - 1$; $m_t = \rho + m_1 + 1$. Очевидно, что $min\ m_1 = 1$; $max\ m_t = n$. Тогда по (1) $max\ m_1 = max\ m_t - \rho - 1 = n - \rho - 1$; $min\ m_t = \rho + min\ m_1 + 1 = \rho + 2$, что и доказывает (2). □

2. Вид исхода схемы, их прямое перечисление и число всех исходов схемы

Вид исхода схемы представляем перестановкой n ее элементов с заданным размахом фиксированных элементов.

Перечисление исходов схемы состоит из объединения каждого с каждым результатов четырех этапов-итераций с постоянными размерами пучков внутри каждой итерации, т. е. представляет собой схему ПД (см. п. 1.2, а схемы действий перестановок и сочетаний изучены в [2, пп. 1.2 и 1.3]). Представим процедуру перечисления исходов схемы по шагам (итерациям):

1) перестановка из t фиксированных элементов $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_t)$ числом способов $d_1 = t!$ (совокупность 1-х перестановок);

2) перестановка из $(n-t)$ остальных элементов $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{n-t})$ числом способов $d_2 = (n-t)!$ (совокупность 2-х перестановок);

3) выбор $(t-2)$ элементов $(m_2^{(0)}, \ldots, m_{t-1}^{(0)})$ из ρ элементов множества $\bar{V}$ без крайних числом способов $d_3 = C_\rho^{t-2}$ (при $m_1 = 1$ исходы этого шага назовем исходами нулевого сдвига);

4) перебор значений m_1 при правом поединичном сдвиге всех (полученных в шаге 3) значений из $\bar{m}$, числом способов $d_4 = n - \rho - 1 = S$ (по (2) леммы п. 1.3) с последующей расстановкой на t местах $\bar{m}$ перестановки элементов $\bar{a}$, а на остальных $n-t$ местах перестановки – элементов $\bar{b}$.

Получаем исход нашей схемы как результат последовательной реализации этих четырех шагов.

Переборы исходов схем перестановок первых двух этапов перечисления исходов нашей схемы даны в [2], для третьего этапа – описаны шагом 3) и даны в [2] для схемы сочетаний, а для 4-го этапа – приведены здесь в шаге 4) при каждых фиксированных исходах 1-, 2- и 3-го этапов в условиях схемы. Исходы этих четырех последовательных этапов будут являться исходами нашей схемы.

Процедуру перечисления исходов схемы представим в виде графа последовательной реализации описанных этапов перечисления схемы ПД (см. п. 1.2) с пучковой структурой, определяемой указанными числами способов их проведения.

Из условия схемы, размеры пучков каждого этапа одинаковы и совпадают с числами их исходов, указанными выше при перечислении исходов этапов из каждого фиксированного состояния (исхода) предшествующего этапа.

Таким образом, для явного перечисления исходов схемы по методу графов (см. [1]) строится случайный процесс пошагового последовательного поединичного добавления этапов с исходами всех предшествующих этапов, т. е. схемы ПД, изображаемый графом на рис. 1. На нем показана пучковая поэтапная (поитерационная) структура графа перечисления исходов схемы, где пучки одинакового размера итераций представлены крайними пучками (с вертикальными многоточиями между ними). А крайние пучки изображены парами своих крайних ребер, между которыми указаны их размеры в соответствии с полученными выше по четырем итерациям.

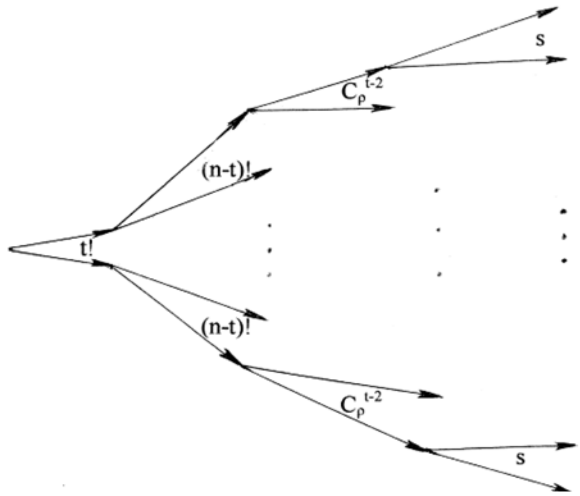

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы
Fig. 1. The graph of outcomes enumeration of the scheme

Нумерацию исходов на каждом шаге проводим в порядке роста номеров упорядоченных в схеме этапов и в порядке роста номеров исходов, заданных по каждому этапу в порядке его реализации.

Число N исходов схемы вычисляется как суммарная численность пучковой структуры третьего этапа перечисления исходов или как произведение чисел способов перечисления четырех этапов, откуда получаем

$$N = \prod_{i=1}^{4} d_i = t!(n-t)!C_\rho^{t-2}(n-\rho-1). \qquad (3)$$

Приведем числовой пример прямого перечисления исходов схемы.

Пример 1. Пусть $n = 6$, $t = 3$, $\rho = 2$, $\bar{a} = (2,5,6)$. Отсюда по (3) имеем $N = 3!3!C_2^{3-2}(6-2-1) = 216$.

В силу большого размера полного графа перечисления исходов схемы построим в примере его фрагмент из одного исхода (из 3!=6 исходов) первого этапа и по нему вычислим число исходов схемы N.

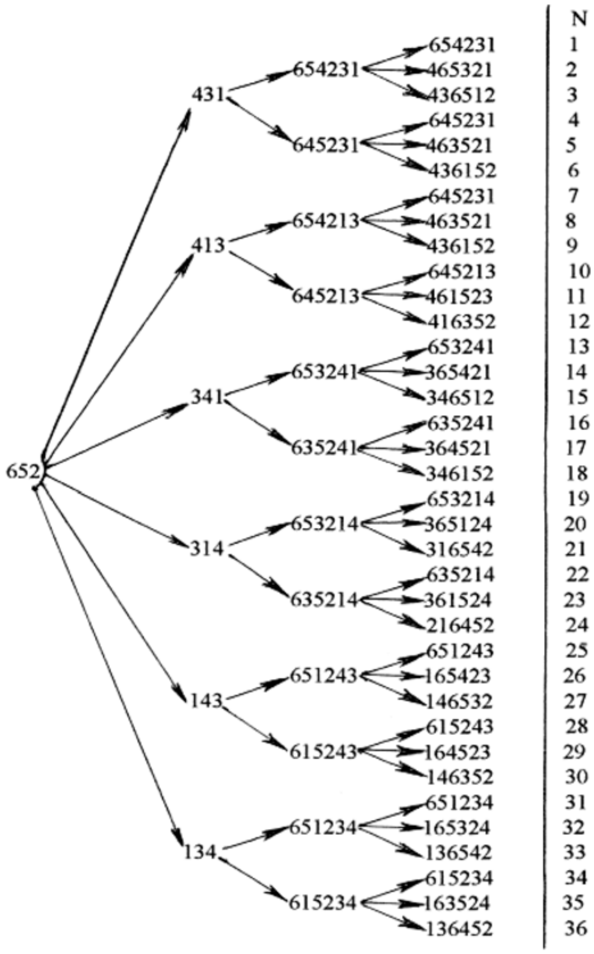

Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов схемы примера 1
Fig. 2. Fragment of the graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

По фрагменту графа на рис. 2 (при очевидном 6-кратном увеличении при варьировании только перестановок первого этапа перечисления, из которого, очевидно, и следуют в аналогичном порядке все остальные виды исходов схемы) и по (3) получаем $N = 216$.

Пучковая структура приведенного на рис. 2 фрагмента графа перечисления исходов схемы: (6), (2,2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3).

Пучковая структура всего графа перечисления исходов схемы получается 5-кратным повторением приведенной выше структуры его фрагмента по каждой итерации с добавлением слева структуры начальной итерации.

3. Задача нумерации для исходов схемы

Рассматриваемая схема представляет собой схему ПД, которыми являются приведенные выше четыре этапа перечисления ее исходов, где i-е действие ($i = \overline{1,k}$) совершается d_i числом способов (в нашей схеме $k = 4$, $d_1 = t!$, $d_2 = (n-t)!$, $d_3 = C_\rho^{t-2}$, $d_4 = n - \rho - 1 = S$).

Общее число N исходов схемы k последовательных действий известно и задано формулой $N = \prod_{i=1}^{k} d_i$, что совпадает с результатом формулы (3).

Результаты решения ЗН в схеме ПД приведены в п. 1.2 при известной пучковой структуре графа перечисления ее исходов всех действий, которые будут обозначаться для их номеров и видов соответственно через j_i и $R^{(i)}$, $i = \overline{1,4}$. Для первых трех действий-этапов результаты решения ЗН приведены в [2]. Для 4-го этапа ЗН будет решена здесь, что и завершит решение ЗН для нашей схемы.

Решение ЗН четвертого этапа

При решенных ЗН первых трех этапов по [2] известны соответствия видов и номеров их исходов. Для решения ЗН 4-го этапа (со своими обозначениями) заметим, что вид его исхода определяется видом 3-го этапа и значением m_1 – места первого из t фиксированных элементов в перестановке, совпадающего с его номером j_4.

ПЗН. Пусть при заданном ρ, фиксированных исходах первых двух этапов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и виде исхода нулевого сдвига третьего этапа дан номер исхода j_4 4-го этапа. Требуется найти его вид $R^{(4)}$, совпадающий с видом исхода всей схемы и однозначно следующий из значения m_1 по шагу 4) п. 2 перечисления исходов схемы.

Решение. Искомый вид исхода схемы $R^{(4)}$ получается из исхода первых трех этапов по шагу 4) п. 2 в результате определения значений $\{m_j\}$, $j = \overline{1,t}$, где $m_1 = j_4$, а значит, и все значения в $\bar{m}$ увеличиваются на j_4. Отсюда по шагу 4) п. 2 перечисления исходов схемы получаем $R^{(4)}$.

ОЗН. Пусть при заданном ρ, фиксированных исходах первых двух этапов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и виде исхода нулевого сдвига третьего этапа дан вид исхода $R^{(4)}$ 4-го этапа, совпадающий с исходом схемы. Требуется найти его номер j_4 4-го действия.

Решение. Искомый номер исхода схемы $R^{(4)}$ получается из вида исхода первых трех этапов в результате определения по нему значения m_1 – места в исходе R первого из фиксированных элементов, совпадающего с искомым значением j_4.

Имея теперь решение ЗН всех четырех последовательных действий, составляющих нашу исследуемую схему, по приведенному здесь результату п. 1.2 из [2], будем считать ее теоретически решенной для всей схемы.

Для иллюстрации приведем численный пример ее решения.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 ставится ЗН для схемы.

ПЗН. Пусть дан номер исхода схемы $N^{(*)} = 23$. (По рис. 2 его вид $R^{(*)} = R^{(4)} = 361524$.) Требуется найти его вид $R^{(4)}$ по формулам из п. 1.2 теоремы 1, при $k = 4$, $d_1 = 3! = 6$, $d_2 = 3! = 6$, $d_3 = C_2^1 = 2$, $d_4 = 6 - 3 = 3$.

Шаги решения:

1) из $N^{(4)} = 23$ находим номера исходов схемы, предшествующих искомому по этапам-действиям из теоремы 1 п. 1.2: $N^{(3)} = [(23 + 3 - 1)/3] = 8$, $N^{(2)} = [(8 + 2 - 1)/2] = 4$, $N^{(1)} = [(4 + 6 - 1)/6] = 1$;

2) из теоремы 1 п. 1.2 находим номера исходов схемы, предшествующих искомому в своих пучках по результату шага 1): $j_4 = 23 \; mod \; 3 = 2$, $j_3 = 8 \; mod \; 2 + 2 = 2$, $j_2 = 4 \; mod \; 6 = 4$, $j_1 = 1 \; mod \; 6 = 1$;

3) из решенных ПЗН для этапов получаем по результатам шага 2) по номерам исходов этих этапов виды их исходов: для первых двух исходов (652) при $j_1 = 1$ и (314) при $j_2 = 4$, тогда на третьем этапе при $j_3 = 2$ получаем исход нулевого сдвига (635214), из которого при сдвиге $j_4 = 2$ находим искомый вид $R^{(4)} = 361524$, что совпадает с результатом по рис. 2.

ОЗН. Пусть дан вид исхода схемы $R^{(4)} = 361524$ (по рис. 2 его номер $N^{(4)} = 23$). Требуется найти его номер $N^{(4)}$ по теореме 2 п. 1.2 или из [2] при $k = 4$, $d_1 = 3! = 6$, $d_2 = 3! = 6$, $d_3 = C_2^1 = 2$, $d_4 = 6 - 3 = 3$.

Шаги решения:

1) из данного $R_{(4)} = 361524$ и $\bar{a} = 2, 5, 6$ находим виды исходов этапов $R^{(1)} = 652$, $R^{(2)} = 314$, $R^{(3)} = 635214$;

2) из решенных ОЗН для этапов получаем по результатам п. 1) $j_1 = 1$, $j_2 = 4$, $j_3 = 2$, $j_4 = 2$;

3) теперь по теореме 2 п. 1.2 вычисляем искомое значение $N^{(4)} = (1 - 1)\,6 \cdot 2 \cdot 3 + (4 - 1)\,2 \cdot 3 + (2 - 1)\,3 + 2 = 23$, что совпадает с результатом по рис. 2.

4. Вероятностное распределение на множестве исходов схемы

Для определения вероятностей на множестве исходов схемы строим итерационный граф перечисления исходов схемы перестановок по МГ (см. [2, п. 1.1.1.2]) без ограничений с принятыми вероятностями итерационных переходов в ней с их единичными суммами в каждом пучке. Удаляем «лишние» для нашей схемы траектории, ведущие к исходам, не удовлетворяющим условиям нашей схемы. Далее в каждом пучке каждой итерации, начиная с первой, производим пересчет вероятностей оставшихся итерационных переходов так, чтобы их сумма равнялась единице. Для этого их прежние вероятности делим на сумму прежних вероятностей оставшихся в пучке переходов. Это называется пропорциональным пересчетом вероятностей оставшихся итерационных переходов в графе. В результате получаем вероятностный граф бесповторного перечисления исходов нашей изучаемой схемы. Теперь итоговые вероятности исходов нашей схемы вычисляются по вероятностям их траекторий перемножением пересчитанных вероятностей составляющих их итерационных переходов.

5. Моделирование исходов схемы

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную ПЗН, будем моделировать ее исходы по УМ (см. [1 и 2, п. 1.1]), т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату ПЗН.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

2. *Энатская Н. Ю.* Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Vestnik YuUrGU = Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

2. *Enatskaya N. Yu.* Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 13.12.2023; принята к публикации / accepted: 09.04.2024.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor