Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 49–54
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2024. No. 4. P. 49–54
DOI: 10.17076/mat1856

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.115:519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗАПОЛНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

В моделях равновероятных исходов схем размещения R частиц по n ячейкам изучаются вероятностные распределения максимальных уровней заполнения ячеек (задача 2) и чисел исходов при их фиксированных значениях. Схемы различаются всеми возможными парными качествами ячеек и частиц по их различимости. Предложен прием проведения вероятностного анализа схем, состоящий в пересчете ранее полученных результатов при нахождении вероятностных распределений минимальных значений уровней заполнения ячеек (задача 1) при определенных соотношениях между их параметрами. В основе этого приема лежит специально построенная процедура согласованного размещения двух типов частиц одного качества по различимости по одним и тем же ячейкам в каждой изучаемой схеме задачи 2 и аналогичной со своим числом частиц в изученной схеме задачи 1. В связи с этим получен ряд вспомогательных новых результатов.

Ключевые слова: размещение частиц; максимальный уровень заполнения ячеек; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Вероятностный анализ максимальных заполнений в моделях размещения частиц по ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 49–54. doi: 10.17076/mat1856

N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF MAXIMUM OCCUPATION IN MODELS OF PARTICLE PLACEMENT TO CELLS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

The probabilistic distributions of maximum cell occupancylevels (problem 2) and the numbers of outcomes given their fixed values are studied in models of equiprobable outcomes of the schemes for placing R particles in n cells. The schemes differ in all possible pairwise qualities of cells and particles in terms of their distinguishability. A method for probabilistic analysis of the schemes is proposed, which consists in recalculating the previously obtained results when finding the probabilistic distributions of the minimum cell occupancy levels (problem 1) for certain ratios of their parameters. This technique is based on a specially constructed procedure for coordinated placement of two types of particles of the same quality in terms of distinguishability in the same cells in each scheme studied in problem 2 and its analog with its own number of particles in the scheme studied in problem 1. In this regard, a number of auxiliary novel results were obtained.

Keywords: particle placement; maximum cell occupancy; numbering problem; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Probability analysis of maximum occupation in models of particle placement to cells. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:49–54. doi: 10.17076/mat1856

Введение

В работах [1–6] проводился асимптотический анализ вероятностного поведения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах равновероятного размещения различимых частиц по различимым ячейкам. Здесь представлено доасимптотическое исследование их вероятностных распределений в классе схем с равновероятными исходами размещения r частиц по n ячейкам при всех парных качествах ячеек и частиц по различимости.

Фиксация минимального уровня заполнения ячеек, равного k, означает его нижнее ограничение $\geqslant k$ с достижением (первая группа схем или схемы 1), а максимального – (вторая группа схем или схемы 2), равного k^*, – его верхнее ограничение $\leqslant k^*$ с достижением. Нахождение вероятностных распределений исходов схем этих групп будем называть соответственно задачами 1 и 2. Задача 1 решена в [7], а задача 2 решается здесь пересчетом из результатов задачи 1 при специально согласованных значениях ее параметров с параметрами в задаче 2.

Вероятностные распределения для максимальных уровней заполнения ячеек определяются в следующих четырех схемах размещения частиц по ячейкам, характеризующихся разными парными качествами по различимости ячеек и частиц в них, как и в [7]:

схема A – размещение различимых частиц по различимым ячейкам;

схема B – размещение различимых частиц по неразличимым ячейкам;

схема C – размещение неразличимых частиц по различимым ячейкам;

схема D – размещение неразличимых частиц по неразличимым ячейкам.

Вероятностный анализ схем проводится со следующими обозначениями:

U – минимальный уровень заполнения ячеек k в исходе из схем 1;

V – максимальный уровень заполнения ячеек $k^* = r - k$ в исходе из схем 2;

μ_k – число ячеек с $U = k$; μ_{k^*} – число ячеек с $V = k^*$

Во всех схемах задачи 1 число частиц $r \geqslant nk$, а во всех схемах задачи 2 – число частиц $R \leqslant nk^*$.

Напомним обозначения для чисел исходов в схемах A, B, C, D задачи 1 и введем новые для пересчета чисел исходов в аналогичных схемах, указанных в нижних индексах в задаче 2: $M_A = M_A(r, n, k)$, $M_B = M_B(r, n, k)$, $M_C = M_C(r, n, k)$, $M_D = M_D(r, n, k)$ и $N_A = N_A(R, n, k^*)$, $N_B = N_B(R, n, k^*)$, $N_C = N_C(R, n, k^*)$, $N_D = N_D(R, n, k^*)$ соответственно в задачах 1 и 2 для событий $U = k$ и $V = k^*$.

Постановка задачи: в моделях равновероятных исходов схем A, B, C, D решить задачу 2.

1. Вспомогательные результаты

Здесь представлены отдельные используемые сведения и характеристики изучаемых схем в задаче 2.

1.1. Основания для связи задач 1 и 2

Для установления соответствия (согласования) любых значений параметров задачи 2 с их значениями задачи 1 в условиях схем размещения A–D предложим следующую интерпретацию связи между схемами 1 и 2: считая R частиц в задаче 2 синими, будем к каждому исходу схем в задаче 2 добавлять $r = Rn - R$ красных частиц того же качества (по различимости), что и синие, в каждую ячейку до общего уровня R в каждой ячейке. Тогда все составы уровней заполнения ячеек $U = U(r, n) \geqslant k = R - k^*$ при размещении красных частиц по ячейкам взаимно-однозначно соответствуют всем возможным составам уровней заполнения ячеек $V = V(R, n) \leqslant k^*$ при размещении синих частиц по тем же ячейкам.

Отличие в методике нахождения вероятностных распределений минимальных и максимальных уровней заполнений ячеек в каждых условиях размещения A–D частиц по ячейкам, т. е. в задачах 1 и 2, состоит в определении разных наборов составов уровней заполнения ячеек со своими согласованными количествами частиц r и R при разных общих числах исходов, зависящих от r и R.

На этом основании для всех результатов задачи 2 можно получить теоремы, аналогичные теоремам из [7] (для решения задачи 1) при соответствующих множествах $\{\bar{w}_i\}$ составов уровней заполнения ячеек в ней $\bar{w}_i = (w_1, \ldots, w_n)$ в задаче 2. Они находятся при решении задачи 2 покомпонентным вычитанием из n-мерного вектора $(R, R, \ldots, R)$ векторов множества составов уровней заполнения ячеек в задаче 1, которые определены в [7].

1.2. Диапазоны возможных значений k^*, μ_{k^*}

Диапазоны возможных значений k, μ_k в задаче 1 получены в [7] ($1 \leqslant k \leqslant [r/n]$, $l \leqslant \mu_k \leqslant L$, $l = max(1, n(k+1)-r)$, $L = n-1+C_n^{n+r-nk}$, где $[Z]$ – целая часть числа Z).

Лемма 1. *Диапазон возможных значений k^* определяется соотношением*

$$k^* = \overline{\left(\left[\frac{R+n-1}{n}\right], R\right)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Правое ограничение очевидно из возможности попадания всех частиц в одну ячейку, а левое ограничение следует из получения наименьшего значения k^* из условий: $k^* = [R/n]$, когда R делится на n, и $k^* = [R/n] + 1$, когда R не делится на n. Это можно записать в виде наименьшего значения k^* в (1), т. к. при первом условии $[R/n] = [(R+n-1)/n]$, а при втором – остаток от деления R на $n \in (1, n-1)$, а тогда $= [(R+n-1)/n] = [R/n] + 1$. □

Лемма 2. *Диапазон возможных значений μ_{k^*} определяется соотношением*

$$\begin{gathered} l^* = max(1, R - n(k^* - 1)) \\ \leqslant \mu_{k^*} \leqslant [R/k^*] = L^*. \end{gathered} \qquad (2)$$

Доказательство. Из условия существования схемы $\mu_{k^*} \geqslant 1$ и $R - \mu_{k^*}k^* \leqslant (n - \mu_{k^*})(k^* - 1)$, или $\mu_{k^*} \geqslant (R - n(k^* - 1))$, откуда получаем левое ограничение в (2) для μ_{k^*}, а правое ограничение в (2) следует из того, что $[R/k^*]$ – наибольшее число ячеек, на которые хватит по k^* частиц. □

1.3. Прием вычисления чисел исходов схемы B

Лемма 3.

$$B(r, n) = \sum_{(\{\bar{v}_i\})} \frac{r!}{\prod_{i=j}^{n} v_j! \prod_{a=1}^{r} q_a!}, \qquad (3)$$

где сумма производится по перечислению всех составов $\{\bar{v}_i\}$ уровней заполнения n неразличимых ячеек r частицами $\bar{v}_i = (v_1, \ldots, v_n)$ (т. е. без учета порядка ячеек или в их заранее установленном порядке), а $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_r)$ – вторая маркировка уровней заполнения ячеек (q_a – число положительных совпадающих в $\bar{v}$ уровней заполнения ячеек в исходе, равных a, где $a = \overline{1, r}$).

Доказательство. $B(r, n)$ – число всех размещений r различимых частиц по n неразличимым ячейкам. Их можно представить как сумму размещений в этой схеме по всем составам уровней заполнения ячеек без учета их порядка, т. е. в заранее заданном (или одном фиксированном, как в схеме перестановок с повторением) порядке составов в исходах и без учета порядков среди составов совпадающих уровней заполнения ячеек, что учитывается делением на $\prod_{a=1}^{r} q_a!$. А это значит, что числа Белла $B(r, n)$ вычисляются по приведенной в утверждении леммы 3 формуле (3). □

Пример 1. Пусть $r = 3$, $n = 3$. (Номера частиц: 1, 2, 3.) Тогда $\{\bar{v}_i\} = (0,0,3), (0,1,2), (1,1,1)$ и по (3) $B(3,3) = (3!/0!0!3!) + (3!/0!1!2!) + (3!/1!1!1!3!) = 1+3+1 = 5$, что совпадает с их числом 5 при очевидном переборе исходов вида составов номеров частиц в ячейках без учета порядка ячеек, т. е., например, в возрастающем порядке числа непустых ячеек: (0,0,123), (0,1,23), (0,2,13), (0,3,12), (1,2,3).

1.4. Числа исходов схемы размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам

Бесповторное перечисление исходов этой схемы без ограничений проведено в [8], откуда число ее исходов $N^*(r, n)$ может быть определено (см. [8, (1)]) из $N(r, n)$ – числа исходов в схеме размещения без пустых ячеек r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам, где число $N(r, n)$ считается по рекурренте (см. [8, (2)]) $N(r, n) = N(r-1, n-1) + N(r-n, n)$ с начальными значениями: 1) $N(r, r) = 1$; 2) $N(r, n) = 0$ при $r < n$; 3) $N(r, 0) = 0$; 4) $N(r, 1) = 1$, а число

$$N^*(r, n) = N(r + n, n). \qquad (4)$$

Кроме этого, покажем, что можно вычислять значение $N^*(r,n)$ из значений $N(r,n)$ по следующему утверждению.

Лемма 4.

$$N^*(r,n) = \sum_{i=1}^{n-1} N(r, n-i). \quad (5)$$

Доказательство. Оно следует из того, что $N(r,n)^*$ по этой формуле, очевидно, складывается из чисел исходов схем без пустых ячеек с поединично убывающими от $(n-1)$ до 1 количествами непустых ячеек. $\square$

Пример 2. Пусть $n = 3$, $r = 5$. Тогда по (4) и по рекурренте получаем $N(5,3)^* = N(8,3) = N(7,2) + N(5,3) = N(6,1) + N(5,2) + N(4,2) + N(2,3) = 1 + N(4,1) + N(3,2) + N(3,1) + N(2,2) + 0 = 1 + 1 + N(2,1) + N(2,2) + 1 = 5$, а по рекурренте и (5) $N(5,3)^* = N(5,3) + N(5,2) + N(5,1) = 2 + 2 + 1 = 5$. Результаты совпали.

2. Вероятностные распределения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах A, B, C, D

Идея вычисления вероятностных распределений максимальных уровней заполнения ячеек в условиях схем размещений частиц по ячейкам A–D с **равновероятными исходами** в задаче 2 из соответствующих результатов (полученных по классическому определению вероятностей) задачи 1 (см. [8]) объяснена в п. 1.1. Поясним ее подробнее.

Исходы схем 2 определяются составами уровней заполнения ячеек (для **неразличимых** частиц в условиях их размещения C и D) или составами частиц ячеек (для **различимых** частиц в условиях их размещения A и B). Порядки перечисления этих составов в исходах схем 2 устанавливаются при **различимых** ячейках (в условиях их размещения A и C) в порядке ячеек, а при **неразличимых** ячейках (в условиях их размещения B и D) – в одном заранее определенном порядке, зависящем от конкретных составов.

Общие числа исходов в задаче 2 в условиях размещения частиц по ячейкам A–D определяются, как и в задаче 1, с заменой числа частиц r на R.

Так как по п. 1.1 все составы уровней заполнения ячеек при одинаковых условиях размещения частиц по ячейкам A–D совпадают по количеству в задачах 1 и 2, то **числа благоприятных исходов** в схеме 2 в условиях размещения C и D **неразличимых частиц** будем находить по результату решенной в [7] задачи 1 в диапазоне возможных частот μ_k минимальных значений k уровней заполнения ячеек (l, L) (см. п. 1.2) при согласованных по п. 1.1 с задачей 2 значениях параметров. А в условиях размещения A и B **различимых частиц числа благоприятных исходов** в схеме 2 будем находить, как и в задаче 1, с заменой множеств составов уровней заполнения ячеек (полученных в задаче 1 при соответствующих качествах ячеек в условиях размещения соответственно C и D) на определяемые по п. 1.1 задачи 2 при делении различимых R частиц по ячейкам.

Приведем конкретные формулировки теорем при каждом из условий A–D равновероятных исходов размещения частиц по ячейкам с измененными (по п. 1.1) значениями параметров и вычисленными по п. 1.1 составами уровней заполнения ячеек в задаче 2.

Схема A

Теорема 1. *Пусть в условиях схемы A размещают R частиц по n ячеек. Тогда по (2) и [7]*

$$P(V(R,n) = k^*) = \frac{M_A(R,n,k^*)}{n^R}$$
$$= \frac{1}{n^R} \sum_{i=l^*}^{L^*} \sum_{(\{\bar{w}_i\})} \left(\frac{R!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!} \right) \left(\frac{n!}{\prod_{a=1}^{r} q_a!} \right), \quad (6)$$

где первая сумма производится по перечислению количеств ячеек с максимальным заполнением $V(R,n) = k^*$, вторая – по перечислению всех составов $\{\bar{w}_i\}$ уровней заполнения ячеек $\bar{w}_i = (w_1, \ldots, w_n)$ в заранее установленном порядке при каждой фиксации числа i ячеек с их заданным максимальным уровнем заполнения k^*, а $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_r)$ – вторая маркировка уровней заполнения ячеек (q_a – число ячеек с уровнем заполнения $a = \overline{1,r}$).

Доказательство. Оно следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов n^R (по схеме размещений с повторением) и благоприятным числом исходов, полученным по аналогии с задачей 1 с уровнями заполнения ячеек, определяемыми по п. 1.1. $\square$

Пример 3. Пусть $n = 3$, $R = 4$, $k^* = 2$. Тогда из п. 1.1 $n = 3$, $r = 8$, $k = 2$. По [2] в схеме 1 получаем составы уровней заполнения ячеек (3,3,2), (4,2,2), откуда в схеме 2 им соответствуют по п. 1.1 составы уровней заполнения ячеек (1,1,2), (0,2,2). (Те же составы в задачах 1 и 2 визуально очевидны.)

Тогда по (6) получаем

$$P(V(4,3)=2)$$

$$= \frac{1}{3^4}\left(\frac{4!}{0!2!2!}\frac{3!}{2!1!}+\frac{4!}{1!1!2!}\frac{3!}{2!1!}\right)=\frac{2}{3}.$$

Схема B

Теорема 2. *Пусть в схеме B размещают R частиц по n ячеек. Тогда по (2) и [7]*

$$\begin{aligned} P(V(R,n)=k^*) &= \frac{M_B(R,n,k^*)}{B(R,n)} \\ &= \frac{1}{B(R,n)}\sum_{i=l^*}^{L^*}\sum_{(\{\bar{w}_i\})}\frac{R!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!\prod_{a=1}^{r} q_a!}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $B(R,n)$ вычислены в лемме 3, первая сумма производится по перечислению количеств ячеек с максимальным заполнением $V(R,n)=k^*$, вторая – по перечислению всех составов $\{\bar{w}_j\}$ уровней заполнения ячеек $\bar{w}_i=(w_{1j},\ldots,w_{nj})$ в заранее установленном порядке при каждой фиксации числа i ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения k, а $\bar{q}=(q_1,\ldots,q_r)$ – вторая маркировка уровней заполнения ячеек (q_a – число ячеек с уровнем заполнения $a=\overline{1,r}$).

Доказательство. Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов $B(R,n)$, вычисляемым по (3), и благоприятным числом исходов, полученным по аналогии с задачей 1 с уровнями заполнения ячеек, определяемыми по п. 1.1. □

Пример 4. Пусть $n=3$, $R=4$, $k^*=2$. Тогда из п. 1.1 $n=3$, $r=8$, $k=2$. Как и в примере 3, в схеме 1 получаем составы уровней заполнения ячеек (3,3,2), (4,2,2), откуда в схеме 2 им соответствуют составы уровней заполнения ячеек (1,1,2), (0,2,2). $B(4,3)$ вычисляется по (3) при $\{\bar{v}_i\}=(0,0,4),(0,1,3),(1,1,2),(0,2,2)$:

$$B(4,3)=\frac{4!}{4!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!2!2!}=14.$$

Тогда по (7)

$$P(V(4.3)=2)=\frac{1}{B(4,3)}\left(\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!2!2!}\right)=\frac{9}{14}.$$

Схема C

Теорема 3. *Пусть в схеме C размещают R частиц по n ячеек. Тогда по [7]*

$$\begin{aligned} P(V(R,n)=k^*) &= \frac{N_C(k^*)}{C_{n+R-1}^{R}} \\ &= \frac{1}{C_{n+R-1}^{R}}\sum_{i=l}^{L} C_n^i C_{r-kn-1}^{n-i-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

где в задаче 1 по n различимым ячейкам размещают $r=Rn-R$ неразличимых частиц с минимальным уровнем заполнения $k=R-k^*$ частиц в ячейке.

Доказательство. Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов C_{n+R-1}^{R}, вычисляемым по схеме сочетаний с повторением, и благоприятным числом исходов в решенной в [7] задаче 1 с приведенными в теореме и согласованными с задачей 2 по п. 1.1 значениями параметров и данному в [7] диапазону возможных значений $i=\overline{l.L}$ чисел ячеек с данным k минимальным уровнем заполнения ячеек: (l,L) (см. п. 1.2). □

Пример 5. Пусть $n=3$, $R=4$, $k^*=2$. Тогда из п. 1.1 $n=3$, $r=8$, $k=2$, $i=\overline{1.2}$. Как и в примере 3, в схеме 1 по п. 1.1 получаем составы уровней заполнения ячеек (3,3,2), (4,2,2). Тогда по (8) получаем

$$P(V(4.3)=2)=(C_3^1C_1^1+C_3^2C_1^0)/C_6^4=2/5.$$

Схема D

Теорема 4. *Пусть в схеме D размещают R частиц по n ячеек. Тогда*

$$\begin{aligned} P(V(R,n)=k^*) &= \frac{N_D(k^*)}{N^*(R,n)} \\ &= \frac{1}{N^*(R,n)}\sum_{i=l}^{L} N(r-nk,n-i), \end{aligned}$$

где $N(R,n)$, $N^*(R,n)$ – числа исходов в схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам соответственно без пустых ячеек и без ограничений определяются по рекурренте из [8], приведенной в п. 1.4 и по (4) и (5); $N_D(k^*)$ – число исходов события $(V=k^*)$; сумма производится по перечислению количеств i ячеек с минимальным заполнением $U(r,n)=k$.

Доказательство. Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов $N^*(R, n)$, вычисляемым по схеме размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам (см. [8]), и благоприятным числом исходов из решенной в [7] задачи 1 с приведенными в теореме и согласованными с задачей 2 (по п. 1.1) значениями параметров и данному в [7] диапазону возможных значений $i = \overline{l.L}$ чисел ячеек с данным k минимальным уровнем заполнения ячеек: (l, L) (см. п. 1.2). $\square$

Пример 6. Пусть $n = 3$, $R = 4$, $k^* = 2$. Тогда из п. 1 $n = 3$, $r = 8$, $k = 2$, $i = \overline{1.2}$. Общее число исходов в этом примере $N^*(4, 3) = N(7, 3) = N(6, 2) + N(4, 3) = N(5, 1) + N(4, 2) + N(3, 2) + N(1, 3) = 1 + N(3, 1) + N(2, 2) + N(2, 1) = 4$, что совпадает с их числом при визуальном перечислении всех составов уровней заполнения ячеек в примере: (0,0,4), (0,1,3), (0,2,2), (1,1,2). Тогда $P(V(4.3) = 2) = 2/4 = 1/2$.

Литература

1. *Викторова И. И.* Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме // Математические заметки. 1969. Т. 3, № 3. С. 305–316.

2. *Колчин В. Ф.* О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 3. С. 476–487.

3. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.

4. *Павлов Ю. Л.* Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 3. С. 523–533.

5. *Хакимуллин Е. Р.* О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Математические заметки. 1981. Т. 30, № 2. С. 277–289.

6. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 122–129. doi: 104213/dm1203

7. *Энатская Н. Ю.* Вероятностный анализ схем размещения частиц по ячейкам с фиксированным значением их минимального заполнения // Труды Карельского научного центра РАН. 2021. № 6. С. 77–84. doi: 10.17076/mat1347

8. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В.* Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2014. № 4. С. 143–154.

References

1. *Viktorova I. I.* Asymptotic behavior of maximum of an equiprobable polynomial scheme. *Mathematical Notes.* 1969;5(3):184–191. doi: 10.1007/BF01388624

2. *Kolchin V. F.* On the limiting behavior of extreme order statistics in a polynomial scheme. *Theory of Probability and its Applications.* 1969;14(3):458–469. doi: 10.1137/1114058

3. *Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P.* Random postings. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)

4. *Pavlov Yu. L.* The asymptotic distribution of maximum tree size in a random forest. *Theory of Probability and its Applications.* 1978;22(3):509–520. doi: 10.1137/1122061

5. *Khakimullin E. R.* Asymptotic behavior of the maximum occupancy in an equiprobable scheme of allocation of particles by complexes. *Mathematical Notes.* 1981;30(2):626–633. doi: 10.1007/BF01708846

6. *Chuprunov A. N., Fazekash I.* An analogue of the generalized allocation scheme: limit theorems for maximum cell load. *Discrete Mathematics and Applications.* 2012;22(3):307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

7. *Enatskaya N. Yu.* Probability analysis of the schemes of particle allocation to cells with a fixed minimum filling value. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2021;6:77–84. doi: 10.17076/mat1347 (In Russ.)

8. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* Analysis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2014;4:143–154. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 13.12.2023; принята к публикации / accepted: 08.04.2024.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor