Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 36–40
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2023. No. 4. P. 36–40
DOI: 10.17076/mat1767

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 517.91

МОДЕЛЬ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), *sazon-tb@mail.ru*

В статье рассмотрена задача моделирования динамики популяций типа «хищник–жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв. Модель представляет собой гибридную систему (систему с переключениями). Переключения происходят между режимом взаимодействия и режимом «убежища» (Refuge-regime), при котором число доступных жертв настолько мало, что хищники не могут их обнаружить и это приводит к отсутствию взаимодействия популяций. Проведен анализ режимов скольжения на линии переключения по методу Филиппова. Получены условия существования равновесия и псевдоравновесия в построенной гибридной системе, доказана их глобальная устойчивость.

Ключевые слова: динамические системы; динамика популяций; гибридные системы; скользящий режим

Для цитирования: Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Модель «хищник–жертва» с переменной структурой взаимодействия // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 36–40. doi: 10.17076/mat1767

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств Российского научного фонда (грант № 23-21-00092).

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov*. PREDATOR-PREY MODEL WITH A VARIABLE STRUCTURE OF INTERACTIONS

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), *sazon-tb@mail.ru*

The paper studies the problem of modeling the “predator-prey” population dynamics with intraspecific competition among the prey. The model has the form of a hybrid system (system with switching). The switching is between the interaction regime and the refugeregime, where the accessible prey numbers are so small that the predators cannot find the prey and there is no interaction between the populations. The sliding modes on the switching line were analyzed using the Filippov approach. The conditions for the existence of equilibrium and pseudo-equilibrium are derived, their global stability is proved.

Keywords: dynamic systems; population dynamics; hybrid systems; sliding mode

F o r c i t a t i o n: Kirillov A. N., Sazonov A. M. Predator-prey model with a variable structure of interactions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:36–40. doi: 10.17076/mat1767

F u n d i n g. The studies were funded by the Russian Science Foundation (grant # 23–21–00092).

Введение

Данная работа посвящена математическому моделированию динамики популяций хищника и жертвы посредством гибридной динамической системы, учитывающей внутривидовую конкуренцию жертв. В работе [1] представлена система, описывающая динамику взаимодействия популяций хищника и жертв, учитывающая внутривидовую конкуренцию жертв вследствие ограниченности ресурсов, основанная на классической модели Лотки – Вольтерры. Указанная модификация модели Лотки – Вольтерры позволяет стабилизировать систему, получив затухающие колебания численностей популяций [1].

Рассмотрим модель динамики популяций типа «хищник–жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by - cx) = f_1(x, y), \\ \dot{y} = y(kbx - m) = f_2(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где x, y – количественные характеристики популяций жертв и хищников соответственно, $a > 0$ – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников, $b > 0$ – коэффициент истребления хищником жертв, $m > 0$ – коэффициент естественной смертности хищников, $0 < k < 1$ – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, $c > 0$ описывает внутривидовую конкуренцию. Система (1) имеет единственное нетривиальное равновесие $P = (x^*, y^*)$, где $x^* = \frac{m}{kb}$, $y^* = \frac{akb-cm}{kb^2}$. Как можно видеть, необходимым условием положительности y^* и, как следствие, существования этого равновесия является

$$\frac{m}{kb} < \frac{a}{c}. \tag{2}$$

Линеаризуя систему (1) в окрестности равновесия P, нетрудно установить, что равновесие P асимптотически устойчиво. При этом если $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ – фокус, а если $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ – узел.

В настоящей статье будет представлено развитие модели (1) посредством введения так называемого режима «убежища» (Refuge-regime), при котором число доступных жертв слишком мало и хищники практически не могут их обнаружить, поэтому отсутствует взаимодействие между хищниками и жертвами. Один из примеров гибридной модели динамики популяций с режимом «убежища» представлен в работе [3]. Режим «убежища» описывается системой вида

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx) = g_1(x, y), \\ \dot{y} = -my = g_2(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

Для моделирования изменения режимов будем использовать гибридную динамическую систему, под которой будем понимать систему с переключениями.

Модель «хищник–жертва» с внутривидовой конкуренцией и режимом «убежища»

Рассмотрим модель динамики популяций хищника и жертв с внутривидовой конкуренцией и режимом убежища в виде следующей гибридной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx) - \varphi(x, y), \\ \dot{y} = -my + k\varphi(x, y), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} bxy, & \frac{x}{y} > \lambda, \\ 0, & \frac{x}{y} < \lambda, \end{cases} \tag{5}$$

где $\lambda > 0$ – заданная пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику в единицу времени для поддержания всех жизненных функций. Как можно видеть, линией переключения для гибридной системы (4), (5) является луч $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$, который разбивает $\mathbb{R}^2_+$ на два множества $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x < \lambda y\}$ и $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x > \lambda y\}$. В E_1 действует система (3), в E_2 – (1).

Главные изоклины системы (1) в $\mathbb{R}^2_+$ имеют вид:

- $\dot{x} = 0$: $cx + by = a$,
- $\dot{y} = 0$: $x = \frac{m}{bk}$.

Вертикальная изоклина системы (3) в $\mathbb{R}^2_+$:

- $\dot{x} = 0$: $x = \frac{a}{c}$.

Найдем точки пересечения изоклин (1), (3) с лучом l:

- $R_1 = (x_1, y_1) = \{cx + by = a\} \cap l = \left(\frac{\lambda a}{b+c\lambda}, \frac{a}{b+c\lambda}\right)$,
- $R_2 = (x_2, y_2) = \{x = \frac{m}{bk}\} \cap l = \left(\frac{m}{bk}, \frac{m}{\lambda bk}\right)$,
- $R_3 = (x_3, y_3) = \{x = \frac{a}{c}\} \cap l = \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{\lambda c}\right)$.

Вспомогательные результаты

Будем исследовать скольжение на луче l, используя метод Филиппова [2].

Лемма 1. *На луче l имеем следующие режимы переключения:*

- *прошивание из E_1 в E_2 при $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$,*
- *устойчивое скольжение при $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}$,*
- *прошивание из E_2 в E_1 при $y > \frac{a+m}{c\lambda}$.*

При этом векторное поле скольжения имеет вид $v(z) = yS(y)(\lambda \mathrm{i} + \mathrm{j})$, где $S(y) = \frac{(ak\lambda-m-kc\lambda^2 y)}{1+k\lambda}$, $z \in l$, i, j – соответствующие орты.

Доказательство. Обозначим $e = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(\lambda, 1)$ – направляющий вектор l, $\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-1, \lambda)$ – нормаль к l. Следуя [2], найдем проекции f_τ, g_τ векторных полей $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ в точках луча l на нормаль τ соответственно. Имеем

$$f_\tau = \frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2}}((c\lambda + kb\lambda + b)y - a - m), \quad (6)$$

$$g_\tau = \frac{-\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2}}(a + m - c\lambda y). \quad (7)$$

Из (6), (7) имеем $f_\tau > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, $g_\tau > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda}$. Тогда, согласно [2], получаем прошивание из E_1 в E_2 при $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, из E_2 в E_1 при $y > \frac{a+m}{c\lambda}$, устойчивое скольжение при $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}$.

Векторное поле скольжения $v(z)$ для $z \in l$ имеет вид

$$v(z) = \alpha f + (1-\alpha) g,$$

где

$$\alpha = \frac{g_\tau}{g_\tau - f_\tau} = \frac{a + m - c\lambda y}{b(1+k\lambda)y}.$$

Итак,

$$v(z) = \lambda y(a - (\alpha b + c\lambda)y)\mathrm{i} + y(\alpha k b \lambda y - m)\mathrm{j} \quad (8)$$
$$= yS(y)(\lambda \mathrm{i} + \mathrm{j}),$$

где $S(y) = \frac{(ak\lambda-m-kc\lambda^2 y)}{1+k\lambda}$, $z \in l$, i, j – соответствующие орты. □

Найдем координаты точек касания луча переключения l к положительным полутраекториям системы (1), (3). Из (6) получаем единственную точку касания $Q = (x_q, y_q)$ к положительным полутраекториям системы (1), где $x_q = \frac{(a+m)\lambda}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, $y_q = \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$. Из (7) получаем единственную точку касания $\tilde{Q} = (\tilde{x}_q, \tilde{y}_q)$ к положительным полутраекториям системы (3), где $\tilde{x}_q = \frac{a+m}{c}$, $\tilde{y}_q = \frac{a+m}{c\lambda}$.

Лемма 2. *Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$. Тогда существует $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ в $\mathbb{R}^2_+$ такая, что $v(\tilde{P}) = 0$.*

Доказательство. Из (8) $\tilde{x} = \frac{ak\lambda-m}{kc\lambda}$, $\tilde{y} = \frac{ak\lambda-m}{kc\lambda^2}$. Очевидно, $\tilde{x} > 0$, $\tilde{y} > 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda > \frac{m}{ak}$. □

При этом

$$\begin{cases} S(y) > 0, & y < \tilde{y} \\ S(y) < 0, & y > \tilde{y}. \end{cases}$$

Возможны два случая. При $0 < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$ равновесие $P \in E_2$, при $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ равновесие $P \in E_1$. Несложно показать, что $\frac{m}{ak} < \frac{mb}{akb-cm}$.

Исследуем взаимное расположение точек Q, $\tilde{Q}$, P, $\tilde{P}$, R_1, R_2, R_3.

Из условия (2) следует, что $x_3 > x_2$. Поскольку $\lambda, a, b, c > 0$, имеем $\frac{\lambda a}{b+c\lambda} > \frac{\lambda a}{c\lambda} = \frac{a}{c}$, то $x_1 < x_3$. Несложно показать, что $x_1 < x_2$, если $0 < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$.

Лемма 3. *Точка касания $Q \in [R_1 R_2]$, где $[R_1 R_2] = \{(x,y) \in l : \frac{\lambda a}{b+c\lambda} \leqslant x \leqslant \frac{m}{bk}\}$ при $\lambda \in \left(0, \frac{mb}{akb-cm}\right)$, $Q \in [R_2 R_1]$, где $[R_2 R_1] = \{(x,y) \in l : \frac{m}{bk} \leqslant x \leqslant \frac{\lambda a}{b+c\lambda}\}$ при $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$. Точка касания $\tilde{Q} \in (R_3 \infty) = \{(x,y) \in l : x > \frac{a}{c}\}$.*

Доказательство. Сравним ординаты точек Q, R_1.

$$y_q - y_1 = \frac{mb + mc\lambda - akb\lambda}{(b+c\lambda)(c\lambda + b + bk\lambda)}.$$

Сравним ординаты точек Q, R_2.

$$y_q - y_2 = \frac{akb\lambda - mb - mc\lambda}{\lambda bk(c\lambda + b + bk\lambda)}.$$

Очевидно, при условии (2), если $0 < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$, то $y_1 < y_q < y_2$, а если $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$, то $y_2 < y_q < y_1$.

Поскольку $\tilde{Q} = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{\lambda c}\right)$, $R_3 = \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{\lambda c}\right)$, то, очевидно, $\tilde{Q} \in (R_3\infty)$. □

Лемма 4. *Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$. Тогда $\tilde{P} \in (0R_1)$ тогда и только тогда, когда $\frac{m}{ak} < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$, $\tilde{P} \in (QR_3)$ тогда и только тогда, когда $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$.*

Доказательство. Сравним ординаты точек $\tilde{P}$, R_1.

$$\tilde{y}-y_1 = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a}{b+c\lambda} = \frac{ak\lambda b - m\lambda c - mb}{kc\lambda^2(b+c\lambda)}.$$

Учитывая условие (2), имеем $\tilde{y} < y_1$, если $\lambda < \frac{mb}{akb-cm}$. А так как $\tilde{y} > 0$ при $\lambda > \frac{m}{ak}$, то получим $\tilde{P} \in (0R_1)$.

Сравним ординаты точек $\tilde{P}$, Q.

$$\tilde{y} - y_q = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)} = \frac{(k\lambda+1)((akb-mc)\lambda - mb)}{kc\lambda^2(c\lambda + b(1+k\lambda))}.$$

Учитывая условие (2), получим:

$$\tilde{y} > y_q \Leftrightarrow \lambda > \frac{mb}{akb-cm}.$$

Сравним ординаты точек $\tilde{P}$, R_3.

$$\tilde{y} - y_3 = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a}{c\lambda} = \frac{-m\lambda c}{kc^2\lambda^3} < 0.$$

Таким образом, получаем $\tilde{P} \in (QR_3)$, если $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$. □

Из Леммы 4 следует, что при $\frac{m}{ak} < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$ точка $\tilde{P}$ находится на интервале луча l, в котором происходит прошивание в область E_2, а при $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ – на интервале луча l, в котором происходит скольжение.

Глобальная устойчивость

В [1] указано, что равновесие P глобально устойчиво для системы (1), рассматриваемой в $\mathbb{R}^2_+$. Будем исследовать влияние введенных переключений на устойчивость равновесия.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \left(0, \frac{mb}{akb-cm}\right)$. Тогда равновесие P глобально устойчиво в $\mathbb{R}^2_+$ для гибридной системы (4), (5).*

Доказательство. Для исследования устойчивости необходимо изучить поведение траекторий на луче переключения l, который разбивается точками касания Q, $\tilde{Q}$ на промежутки

- $(0Q) = \{(x,y) \in l : y < \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)}\}$,
- $(Q\tilde{Q}) = \{(x,y) \in l : \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}\}$,
- $(\tilde{Q}\infty) = \{(x,y) \in l : y > \frac{a+m}{c\lambda}\}$.

Рассмотрим промежуток $(0Q)$. По Лемме 1, для любой точки $z_0 = (x_0, y_0) \in (0Q)$ имеем прошивание из E_1 в E_2. Следовательно, дальнейшее движение в E_2 происходит по положительной полутраектории $\gamma(z_0)$ системы (1). Возможны два случая. Если $\gamma(z_0) \cap l = \varnothing$, то переключений далее не происходит и, согласно [1], P асимптотически устойчиво. Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$. Покажем, что $z_1 \in (Q\tilde{Q})$. Поскольку Q – точка касания, то, в силу невозможности пересечения траекторий, $y_1 > y_q$.

Рассмотрим промежуток $(\tilde{Q}\infty)$. По Лемме 1, для любой точки $z_0 = (x_0, y_0) \in (\tilde{Q}\infty)$ имеем прошивание из E_2 в E_1. Поскольку $\tilde{Q}$ – точка касания, $\{x = \frac{a}{c}\}$ – положительная полутраектория системы (3), то, в силу невозможности пересечения траекторий, $\rho(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$ и $\frac{a}{\lambda c} < y_1 < \tilde{y}_q$. При этом $y_q < \frac{a}{\lambda c}$.

Таким образом, осталось исследовать поведение траекторий на промежутке $(Q\tilde{Q})$. По Лемме 1, для любой точки $z_0 = (x_0, y_0) \in (Q\tilde{Q})$ имеем устойчивое скольжение вдоль l. При этом векторное поле скольжения $v(z_0) = (v_1, v_2)$ такое, что $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Следовательно, на $(Q\tilde{Q})$ происходит скольжение к точке Q, из которой дальнейшее движение происходит по положительной полутраектории $\gamma(Q)$ системы (1), для которой P асимптотически устойчиво [1]. □

Теорема 2. *Пусть $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$. Тогда точка $\tilde{P}$ является глобально устойчивым псевдоравновесием для гибридной системы (4), (5).*

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1 будем исследовать поведение траекторий на промежутках $(0Q)$, $(Q\tilde{Q})$, $(\tilde{Q}\infty)$ луча переключения l. Отметим, что поведение траекторий на промежутке $(\tilde{Q}\infty)$ такое же, как в случае $\lambda \in \left(\frac{m}{ak}, \frac{mb}{akb-cm}\right)$.

На промежутке $(0Q)$ так же, как и в случае $\lambda \in \left(\frac{m}{ak}, \frac{mb}{akb-cm}\right)$, имеем прошивание из E_1

в E_2. Однако при $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ равновесие $P \in E_1$, где действует система (3). Следовательно, приближение положительных полутраекторий системы (1) к P невозможно, поскольку все они лежат в E_2, то есть нарушается устойчивость равновесия P. Исходя из вышесказанного, для любой точки $z_0 = (x_0, y_0) \in (0Q)$ имеем $\gamma(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_1 \in (Q\tilde{Q})$.

Таким образом, аналогично доказательству Теоремы 1 необходимо исследовать поведение траекторий на промежутке $(Q\tilde{Q})$. По Лемме 4, при $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ точка (псевдоравновесие) $\tilde{P} \in (QR_3) \subset (Q\tilde{Q})$. При этом для любой точки $z \in (Q\tilde{P})$ векторное поле скольжения $v(z) = (v_1, v_2)$ такое, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, а если $z \in (\tilde{P}\tilde{Q})$, то $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Таким образом, получаем скольжение к $\tilde{P}$, для которой $v(\tilde{P}) = (0, 0)$, то есть $\tilde{P}$ глобально устойчиво. $\square$

Замечание 1. Равенства $cm(c + 4kb) = 4a(kb)^2$ и $\lambda = \frac{mb}{akb-cm}$ задают поверхности коразмерности 1 соответственно в 5- и 6-мерных арифметических пространствах параметров. Соответствующие множества параметров имеют лебегову меру ноль. В статье же рассматриваются случаи общего положения, что естественно при анализе процессов на основе конкретных математических моделей.

Заключение

В работе представлено развитие модели динамики популяций типа «хищник–жертва» с учетом внутривидовой конкуренции жертв, что позволяет оказать стабилизирующий эффект. Данная система имеет единственное глобально устойчивое равновесие. Рассмотрена задача качественного исследования гибридной системы, в которой система типа «хищник–жертва» переключается на режим «убежища» (Refuge-regime), когда число доступных жертв настолько мало, что хищники не могут их обнаружить и прекращается взаимодействие популяций. Согласно анализу режимов скольжения на линии переключения по методу Филиппова, поведение гибридной системы является более сложным. Показано, что возможно возникновение псевдоравновесия, получены условия, при которых это происходит. Для обоих случаев доказана глобальная устойчивость равновесия и псевдоравновесия. Таким образом, можно сделать вывод, что введение переключений к режиму «убежища» может вызывать качественное изменение поведения системы.

Литература

1. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.

3. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // J. Math. Anal. Appl. 2015. No. 428. P. 817–837. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045

References

1. *Svirezhev Yu. M., Logofet D. O.* Resilience of biological communities. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. (In Russ.)

2. *Filippov A. F.* Differential equations with a discontinuous right-hand side. Moscow: Nauka; 1985. 225 p. (In Russ.)

3. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model. *J. Math. Anal. Appl.* 2015;428:817–837. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045

Поступила в редакцию / received: 11.04.2023; принята к публикации / accepted: 30.05.2023.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

e-mail: krllv1812@yandex.ru

Сазонов Александр Михайлович
канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

e-mail: sazon-tb@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher

Sazonov, Alexander
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher