Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 31–35
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2023. No. 4. P. 31–35
DOI: 10.17076/mat1759

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 515.12

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НИЖНЕЙ ЕМКОСТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Для емкостных размерностей (верхней и нижней) рассматривается классический вопрос теории размерности о промежуточных значениях: верно ли, что в метрическом компакте X емкостной размерности α (верхней или нижней) для любого неотрицательного числа β, не превосходящего α, существует замкнутое подмножество F, соответствующая емкостная размерность которого равна β? Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос получен в совместной работе автора и О. В. Фомкиной. Однако для нижней емкостной размерности в общем случае аналогичное утверждение неверно. При этом известно, что в широком классе метрических компактов существуют замкнутые подмножества с нижними емкостными размерностями всех промежуточных значений. В статье получено достаточное условие, обеспечивающее принадлежность фиксированного числа r шкале промежуточных значений нижней емкостной размерности. А именно, доказано, что если в X существует замкнутое подмножество F, верхняя емкостная размерность которого меньше r и при этом нижняя емкостная размерность любого замкнутого ε-шара F больше r, то в X найдется замкнутое подмножество, нижняя емкостная размерность которого равна r. Доказанное утверждение позволяет усилить известные результаты о промежуточных значениях нижней емкостной размерности.

Ключевые слова: метрический компакт; емкостная размерность; теорема о промежуточных значениях емкостной размерности; ε-разделенное множество

Для цитирования: Иванов А. В. О промежуточных значениях нижней емкостной размерности // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 31–35. doi: 10.17076/mat1759

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. V. Ivanov. ON INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

For box dimensions (upper and lower), we consider the classical intermediate value question of the dimension theory: is it true that in a metric compact space X of the box dimension α (upper or lower) for any non-negative number β not exceeding α, there exists a closed subset F whose corresponding box dimension is equal to β? For the upper box dimension, a positive answer to this question was obtained in the joint work of the author and O. V. Fomkina. However, this statement is not true in the general case for the lower box dimension. Moreover, it is known that in a wide class of metric compact spaces there exist closed subsets with lower box dimensions of all intermediate values. In this paper, a sufficient condition is obtained that ensures that a fixed number r belongs to the scale of intermediate values of the lower box dimension. Namely, it is proved that if in X there exists a closed subset F whose upper box dimension is less than r and the lower box dimension of any closed ε-ball F is greater than r, then there is a closed subset in X whose lower box dimension is equal to r. The proved assertion makes it possible to strengthen the known results on intermediate values of the lower box dimension.

Keywords: metric compact space; box dimension; intermediate value theorem for box dimensions; ε-separated set

For citation: Ivanov A. V. On intermediate values of the lower box dimension. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:31–35. doi: 10.17076/mat1759

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

В топологической теории компактов известен вопрос о промежуточных размерностях, который формулируется следующим образом. Пусть компакт X имеет лебегову размерность $\dim X = n$. Верно ли, что для любого $k \in n$ в X существует замкнутое подмножество F размерности $\dim F = k$? В метризуемом случае ответ на этот вопрос положительный, поскольку для метрических компактов размерность dim совпадает с индуктивными размерностями ind и Ind. Но для неметризуемых компактов это, вообще говоря, не так. В. В. Федорчук [3] построил пример n-мерного компакта, любое замкнутое подмножество которого имеет размерность либо n, либо 0.

Емкостные размерности метрических компактов (верхняя $\overline{\dim}_B$ и нижняя $\underline{\dim}_B$) могут принимать любое неотрицательное вещественное значение, и вопрос о промежуточных значениях для этих размерностей имеет следующую формулировку:

Пусть емкостная размерность (верхняя или нижняя) метрического компакта X равна $\alpha \in (0, \infty]$. Верно ли, что для любого $\beta \in [0, \alpha)$ в X существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна β?

Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос дан в [5]. Недавно автор показал, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение в общем случае неверно[1]. В то же время известно, что для многих метрических компактов вопрос о промежуточных значениях нижней емкостной размерности решается положительно. Например, в монографии Я. Б. Песина [2] это утверждение доказано для отрезка $[0, 1]$ числовой прямой, причем в существенно более сильной форме (см. [2, глава 2, пример 6.1]). В связи с этим представляют интерес достаточные условия, обеспечивающие существование в компакте X замкнутого подмножества фиксированной нижней емкостной размерности $r \in (0, \underline{\dim}_B X)$.

Основным результатом настоящей публикации является следующая теорема, при доказательстве которой используется техника, развитая в [5]:

Пусть в метрическом компакте X существует замкнутое подмножество F такое, что $\overline{\dim}_B F < r$ и $\underline{\dim}_B B(F, \varepsilon) > r$ для любого $\varepsilon > 0$, где $B(F, \varepsilon)$ – замкнутый ε-шар множества F. Тогда в X существует замкнутое подмножество A размерности $\underline{\dim}_B A = r$.

Из этой теоремы вытекает следствие, для формулировки которого необходимы дополнительные определения. Для замкнутого подмножества $A \subset X$ положим

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf\{\underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

и рассмотрим следующую размерностную характеристику метрического компакта X:

$$z\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(A, X) : A = \overline{A} \subset X, \ \overline{\dim}_B A = 0\}. \quad (1)$$

[1]Публикация этого результата ожидается в «Сибирском математическом журнале».

Из сформулированной выше теоремы следует, что для любого $r \in [0, z\underline{\dim}_B X)$ в X существует замкнутое подмножество A размерности $\underline{\dim}_B A = r$.

Если в формуле (1) в качестве A рассматривать одноточечные подмножества, мы получим локальную нижнюю емкостную размерность $l\underline{\dim}_B X$, которая рассматривалась в [5]. Очевидно, что всегда $l\underline{\dim}_B X \leqslant z\underline{\dim}_B X$, причем неравенство может быть строгим. Таким образом, из основного результата статьи вытекает усиление теоремы о промежуточных значениях $\underline{\dim}_B$ из [5], где эта теорема была доказана для $r \in (0, l\underline{\dim}_B X)$.

Напомним необходимые обозначения и определения. Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $x \in X$, $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Мы используем следующие стандартные обозначения:

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\},$$

$$B(A, \varepsilon) = \{y : \rho(y, A) \leqslant \varepsilon\}.$$

Подмножество A называется ε-сетью в X, если $B(A, \varepsilon) = X$. Говорят, что A является ε-разделенным, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$.

Для метрического компакта (X, ρ) и числа $\varepsilon > 0$ через $N(X, \varepsilon)$ обозначается наименьшее число точек в ε-сети X. Максимальное (по включению) ε-разделенное подмножество метрического компакта является его ε-сетью. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. *В метрическом компакте X для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-разделенное подмножество A мощности $N(X, \varepsilon)$.*

Предложение 2. *Если A – ε-разделенное подмножество X, то $N(X, \varepsilon/2) \geqslant |A|$.*

Доказательство. Пусть D – $(\varepsilon/2)$-сеть в X. Тогда

$$X = B(D, \varepsilon/2) = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon/2),$$

и каждое множество $B(x, \varepsilon/2)$ содержит не более одной точки ε-разделенного множества A. Следовательно, $|D| \geqslant |A|$. $\square$

Верхняя и нижняя емкостные размерности метрического компакта X определяются (соответственно) по формулам (см. [2, глава 2]):

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что всегда $\overline{\dim}_B X \geqslant \underline{\dim}_B X$. Если имеет место равенство $\overline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$, то используют обозначение $\dim_B X$.

Для замкнутого подмножества F метрического компакта X можно рассматривать ε-сети, лежащие в X, и определить число

$$N(F, \varepsilon, X) = \min\{|A| : A \subset X, F \subset B(A, \varepsilon)\}.$$

Простые примеры показывают, что $N(F, \varepsilon)$ может быть больше $N(F, \varepsilon, X)$. Однако (как отмечено в [1]) это различие не влияет на величину емкостных размерностей F, при определении которых можно заменить $N(F, \varepsilon)$ на $N(F, \varepsilon, X)$. В дальнейшем мы будем использовать упрощенное обозначение $N(F, \varepsilon)$ и в тех случаях, когда речь идет о ε-сетях для F, лежащих в X.

Следующее предложение доказано в [4, теорема 2]:

Предложение 3. *Пусть ε_n – монотонно убывающая последовательность, предел которой равен 0. Если существует константа $c > 0$ такая, что $\varepsilon_{n+1} > c\varepsilon_n$ для любого n, то*

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log N(X, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n},$$

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log N(X, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Теорема 1. *Пусть (X, ρ) – метрический компакт, F – замкнутое подмножество X, $r \in \mathbb{R}$, $\overline{\dim}_B F < r$ и $\underline{\dim}_B B(F, \varepsilon) > r$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда в X существует замкнутое подмножество A размерности $\underline{\dim}_B A = r$.*

Доказательство. Из неравенства $\overline{\dim}_B F < r$ следует, что при малых ε имеет место неравенство

$$N(F, \varepsilon) < \varepsilon^{-r}. \tag{2}$$

Аналогично в силу неравенства $\underline{\dim}_B X > r$ получаем, что при малых ε

$$N(X, 2\varepsilon) > \varepsilon^{-r}. \tag{3}$$

Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполнялись неравенства (2) и (3). Для $n \in N$ положим $\varepsilon_n = \varepsilon_0 2^{-n}$.

Пусть $\delta_0 = \operatorname{diam} X$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим величину

$$\delta_n = \sup\{\delta : N(B(F, \delta), 2\varepsilon_n) \leqslant \varepsilon_n^{-r}\}.$$

Легко проверить, что ε-сеть для F является 2ε-сетью для $B(F, \varepsilon)$. Следовательно, $N(B(F, \varepsilon), 2\varepsilon) \leqslant N(F, \varepsilon)$. Откуда в силу (2) получаем, что $\delta_n \geqslant \varepsilon_n$ для любого n. При этом в силу неравенства (3) $\delta_n \leqslant \delta_0$.

Покажем, что $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. Предположим противное. Тогда для некоторого числа $\delta > 0$ множество $S = \{n : \delta_n > \delta\}$ бесконечно. Поскольку по условию теоремы $\underline{\dim}_B B(F, \delta) > r$, при малых ε

$$N(B(F,\delta), 2\varepsilon) > \varepsilon^{-r}.$$

Таким образом, существует $k \in S$, для которого

$$N(B(F,\delta), 2\varepsilon_k) > \varepsilon_k^{-r}.$$

Откуда из определения δ_n следует, что $\delta_k \leqslant \delta$ – получено противоречие.

Определим теперь числа δ_n'. Если $\delta_n = \delta_0$, то $\delta_n' = \delta_n$. При $\delta_n < \delta_0$ положим

$$\delta_n' = \frac{1}{2}(\delta_n + \min\{\delta_i : \delta_i > \delta_n, i < n\}).$$

Поскольку $\delta_n' > \delta_n$ или $\delta_n' = \delta_0$, из определения чисел δ_n следует выполнение неравенства

$$N(B(F,\delta_n'), 2\varepsilon_n) > \varepsilon_n^{-r} \tag{4}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, очевидно, что $\lim_{n\to\infty}\delta_n' = 0$.

В силу неравенства (4) и предложения 1 для каждого $n \in \mathbb{N}$ в множестве $B(F, \delta_n')$ можно выделить $2\varepsilon_n$-разделенное подмножество E_n мощности $|E_n| = [\varepsilon_n^{-r}]$. Положим

$$A = F \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Легко проверить, что A – замкнутое подмножество компакта X.

Покажем, что $\underline{\dim}_B A = r$. В силу предложения 2 для любого $n \in \mathbb{N}$

$$N(A, \varepsilon_n) \geqslant |E_n|. \tag{5}$$

Из неравенства (5) и предложения 3 следует, что

$$\underline{\dim}_B A = \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log N(A,\varepsilon_n)}{-\log\varepsilon_n}$$

$$\geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log[\varepsilon_n^{-r}]}{-\log\varepsilon_n} = r.$$

Для доказательства обратного неравенства $\underline{\dim}_B A \leqslant r$ рассмотрим множество

$$M = \{n : \delta_i < \delta_n \text{ для любого } i > n\}.$$

Легко показать, что M бесконечно. Занумеруем точки M в порядке возрастания:

$$M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\xi_k = \max\{\delta_i' : i > n_k\}.$$

Из определения чисел δ_n' следует, что $\xi_k < \delta_{n_k}$ для любого k. Следовательно, имеет место неравенство

$$N(B(F,\xi_k), 2\varepsilon_{n_k}) \leqslant \varepsilon_{n_k}^{-r}.$$

Таким образом, в множестве $B(F,\xi_k)$ можно выделить подмножество C_k мощности $|C_k| \leqslant \varepsilon_{n_k}^{-r}$, которое является $2\varepsilon_{n_k}$-сетью для $B(F,\xi_k)$. Положим

$$G_k = C_k \cup \bigcup_{i\leqslant n_k} E_i.$$

По построению множеств E_i и определению ξ_k при $i > n_k$

$$E_i \subset B(F,\delta_i') \subset B(F,\xi_k).$$

Следовательно, G_k является $2\varepsilon_{n_k}$-сетью для A.

Оценим мощность G_k:

$$|G_k| \leqslant |C_k| + \sum_{i\leqslant n_k}|E_i| \leqslant \varepsilon_{n_k}^{-r}$$

$$+ \sum_{i\leqslant n_k}[\varepsilon_i^{-r}] \leqslant 2\sum_{i\leqslant n_k}\varepsilon_i^{-r}$$

$$= 2\varepsilon_0^{-r}\sum_{i\leqslant n_k}2^{ir} = 2\varepsilon_0^{-r}2^r\frac{2^{n_k r}-1}{2^r-1}.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$N(A, 2\varepsilon_{n_k}) \leqslant 2\varepsilon_0^{-r}2^r\frac{2^{n_k r}-1}{2^r-1}.$$

Таким образом,

$$\underline{\dim}_B A \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log N(A,2\varepsilon_{n_k})}{-\log 2\varepsilon_{n_k}}$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log 2\varepsilon_0^{-r}2^r\frac{2^{n_k r}-1}{2^r-1}}{-\log 2\varepsilon_{n_k}} = r.$$

□

Напомним, что для замкнутого подмножества $A \subset X$

$$\underline{\dim}_B(A,X) = \inf\{\underline{\dim}_B B(A,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

и

$$z\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(A,X) : A = \overline{A} \subset X,$$

$$\underline{\dim}_B A = 0\}.$$

Следствие 1. *Для любого $r \in [0, z\underline{\dim}_B X)$ в компакте X существует замкнутое подмножество $A \subset X$ размерности $\underline{\dim}_B A = r$.*

Доказательство. Для $r = 0$ утверждение очевидно. Пусть $r \in (0, z\underline{\dim}_B X)$. Тогда по определению $z\underline{\dim}_B X$ в X существует замкнутое подмножество F, для которого $\overline{\dim}_B F = 0 < r$ и $\underline{\dim}_B(F, X) > r$. $\square$

В [5] было введено понятие локальной нижней емкостной размерности метрического компакта X:

$$l\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(\{x\}, X) : x \in X\}.$$

Очевидно, что всегда

$$l\underline{\dim}_B X \leqslant z\underline{\dim}_B X,$$

причем существуют компакты, для которых это неравенство является строгим. Примером такого компакта может служить построенное в [2, глава 2, пример 6.2] пространство X, которое является объединением двух счетных замкнутых непересекающихся подмножеств числовой прямой. Как отмечено в [5, пример 5.3], $l\underline{\dim}_B X < \underline{\dim}_B X$. При этом множество предельных точек компакта X состоит из двух элементов, поэтому $z\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$. Таким образом, следствие 1 является усилением теоремы 5.5 из [5], в которой установлено существование замкнутых подмножеств $A \subset X$ размерности $\underline{\dim}_B A = r$ для всех $r \in [0, l\underline{\dim}_B X)$ при некоторых дополнительных ограничениях на метрику компакта X.

Литература

1. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034

2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.

3. *Федорчук В. В.* Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.

4. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form F(X) // Topol. Its Appl. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

5. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topol. Its Appl. 2022. Vol. 306, no. 1. Art. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

References

1. *Ivanov A. V., Fomkina O. V.* On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

2. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. Chicago: The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

3. *Fedorchuk V. V.* Bicompacta with no intermediate dimensions. *Dokl. Acad. Nauk SSSR = Proceedings AS of the USSR.* 1973;213(4):795–797. (In Russ.)

4. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form F(X). *Topol. Its Appl.* 2017;221:107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

5. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topol. Its Appl.* 2022;306(1):107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

Поступила в редакцию / received: 18.03.2023; принята к публикации / accepted: 20.04.2023.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Alexander
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher