Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 71–76
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2023. No. 4. P. 71–76
DOI: 10.17076/mat1733

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.115:519.2

СХЕМА ПЕРЕСТАНОВОК С ВЕРХНИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ИНТОВ ДЛЯ ЕЕ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

Для предложенной схемы решаются задачи перечислительной комбинаторики, т. е. находится число ее исходов, строится их прямое перечисление, решается задача нумерации, устанавливается вероятностное распределение исходов схемы и предлагается процедура их моделирования.

Ключевые слова: схема перестановок; набор интов перестановки; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Схема перестановок с верхним ограничением интов для ее фиксированных элементов // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 71–76. doi: 10.17076/mat1733

N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH AN UPPER LIMITATION OF INTS FOR ITS FIXED ELEMENTS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

Problems of enumerative combinatorics are solved for the proposed scheme, i. e. the number of its outcomes is determined, their direct listing is constructed, the numbering problem is solved, the probability distribution of the scheme outcomes is found, and a procedure for their modeling is proposed.

Keywords: permutation scheme; set of permutation ints; numbering task; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Permutation scheme with an upper limitation of ints for its fixed elements. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:71–76. doi: 10.17076/mat1733

Введение

Для любой пары элементов перестановки введем понятие *инта* как числа ее элементов между ними.

Рассматривается схема n-размерных перестановок с нумерацией элементов от 1 с n и, например, с номерами фиксированных элементов от 1 до t, для каждой пары которых инты соседних в перестановке ограничены числом k.

Для данной схемы будем решать перечисленные в аннотации задачи на основе перечисления всех ее исходов.

Такая схема может возникать при составлении разного рода расписаний при соответствующем ограничении.

1. Вспомогательные результаты

Кратко приведем используемые здесь результаты ранее опубликованных статей в принятых там обозначениях.

1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) [2], состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов по [2], дающее его единый прием, состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающему специфику схемы. (В более ранних публикациях УМ называлось также БМ – быстрое моделирование.) Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

1.2. Схема перестановок

Схема перестановок (см. [1]) состоит в установлении всех взаимных порядков n различимых элементов между собой.

Решена задача нумерации в прямой и обратной постановках (см. [1]), представленных в виде теорем. Приведем их, например, для перечисления исходов схемы методом графов. (При перечислении исходов схемы методом графов каждый следующий добавляемый элемент ставится до, между и после всех ранее установленных элементов.)

Прямая задача нумерации (ПЗН) решена теоремой 1.

Теорема 1. *Дан номер $N = N_r$ перестановки R размера r. Тогда определяющие исход R значения числа M_i (порядковый номер места элемента i $(i = \overline{1,r})$ среди элементов перестановки от 1 до i (слева направо) в данном исходе R) находятся по формуле*

$$M_i = 1 + (N_i - 1) \mod i,$$

где N_i – номер перестановки длины i в процедуре перечисления исходов схемы, порождающей искомую перестановку длины r с данным номером $N = N_r$.

Обратная задача нумерации (ОЗН) решена теоремой 2.

Теорема 2. *Дана перестановка размера r или соответствующий ей исход R. Тогда его номер N определяется формулой*

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1)\frac{r!}{i!} + M_r,$$

где M_i – порядковый номер места элемента i $(i = \overline{1,r})$ среди элементов перестановки от 1 до i (слева направо) в данном исходе R.

1.3. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

Схема k ОПД (см. [1]) возникает, когда исходы каждого следующего действия (итерации) зависят от характера действия и вида предшествующего исхода. Результатом этого являются неодинаковые размеры $N^{(i)}$ пучков в графе перечисления исходов схемы каждой i-й итерации $(i = \overline{1,k})$.

Анализ схемы приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i-е из которых $(i = \overline{1,k})$ на i-м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{n}^{(i)} = (n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \ldots, n_{N^{(k-1)}}^{(i)})$, т. е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} n_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i}, где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения.

ПЗН и ОЗН решены следующими теоремами 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории T в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до k-й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i $(i = \overline{1,k})$*

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий $\bar{n}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^{t} n_l^{(k)} = A_k \leqslant N_*^{(k)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$; заменяя k на i, доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной задаче нумерации для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

Теорема 4. *Пусть совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \ldots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k$, $i = \overline{1,k}$*

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)} + j_i$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

1.5. Схема сочетаний с ограниченными степами

Исходы схемы сочетания представляют собой наборы t значений выбранных элементов в возрастающем порядке: $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_t)$ из n. В изучаемой схеме (см. [3]) вводится верхнее ограничение на абсолютные разности соседних элементов в исходах схемы сочетаний, называемые далее *степами*, обозначаемые вектором $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_{t-1})$, где $s_i = |n_{i+1} - n_i|$, $\max\limits_{i=\overline{1,t-1}} s_i = S = k + 1$.

Прямое перечисление исходов нашей схемы производим процессом поединичного выбора его элементов в возрастающем порядке в последовательно зависимых диапазонах, задающих размеры пучков в графе перечисления исходов схемы (под пучковой структурой графа понимаются последовательные численности исходов из состояний каждого этапа в состояния следующего этапа) и обеспечивающих их возрастание, возможность выбора остальных элементов и заданную ограниченность степов в исходе схемы по рекуррентным соотношениям:

$1 \leqslant n_1 \leqslant (n - t + 1)$;

$n_1 + 1 \leqslant n_2 \leqslant \min(n - t + 2, n_1 + S)$;

$n_2 + 1 \leqslant n_3 \leqslant \min(n - t + 3, n_2 + S)$ и т. д., откуда следует, что

$$n_{i-1}+1 \leqslant n_i \leqslant \min(n-t+i, n_{i-1}+S) \ i=\overline{2,t}, \quad (1)$$

где на i-м шаге добавляется элемент n_i, $i = \overline{2,t}$.

Конкретное значение n_i зависит от выбора n_{i-1}.

Размеры пучков на i-м шаге процесса перечисления $a_i(n_{i-1})$ зависят от последнего n_{i-1}-го добавленного элемента. $a_1(n_0) = a_1 = n - t + 1$ при $n_0 = 0$, а для $i = 2, 3, \ldots, t$ – вычисляются по формуле

$$a_i(n_{i-1}) = \min(n - t + i, n_{i-1} + S) - n_{i-1}. \quad (2)$$

Число исходов схемы M вычисляется суммой размеров пучков предпоследней итерации в графе перечисления исходов схемы.

1.6. Процедура перечисления значений интов при заданном k, их влияние на вид исхода схемы

Лемма 1. *Диапазон возможных значений k зависит от параметров схемы и определяется соотношением*

$$0 \leqslant k \leqslant (n - t). \quad (3)$$

Доказательство. Оно следует из того, что k принимает наименьшее значение 0, когда фиксированные t элементов перестановки стоят подряд, а наибольшее, равное $(n - t)$ – когда остальные $(n - t)$ элементов перестановки стоят подряд на местах перестановки, исключая первое и последнее.

Прямое перечисление возможных наборов интов (с проверкой (3)) при заданном значении k производится по изученной в [3] схеме сочетаний с ограниченными степами по результатам приведенных рекуррентных соотношений (1) п. 1.5 для них при $S = k + 1$. □

2. Вид исхода схемы, прямое перечисление ее исходов и их число

Вид исхода схемы представляем последовательностью n номеров ее элементов в получаемом порядке.

Прямое перечисление исходов схемы будет состоять из объединения каждого с каждым результатов трех этапов по схеме ОПД (см. п. 1.3):

1) перестановок t фиксированных элементов числом способов $t!$;

2) перестановок всех остальных $(n-t)$ элементов числом способов $(n-t)!$;

3) выбор всех допустимых наборов номеров $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_t)$ мест t фиксированных элементов в перестановке (по схеме сочетаний с ограниченными степами $\leqslant k+1$ (см. [3] и формулы (1), (2) п. 1.5)).

Процедуру прямого перечисления исходов схемы можно представить в виде графа (см. [1, 2]) последовательной реализации описанных этапов перечисления с пучковой структурой, определяемой числами способов их проведения.

Нумерацию исходов проводим в порядке их реализации.

Теорема 5. *Число N исходов схемы вычисляется по формуле*

$$N = t!(n-t)!\sum_j d_j, \tag{4}$$

где $\{d_j\}$ – последовательные размеры пучков предпоследней итерации, т. е. чисел возможных значений в выборе мест последнего из t фиксированных элементов в исходах схемы при заданных перестановках среди фиксированных и среди остальных элементов.

Доказательство. Оно следует из предложенной процедуры 3-этапного перечисления исходов схемы, где первые два сомножителя дают числа независимых перечислений среди фиксированных и среди остальных элементов перестановки, их произведение – число их совместных порядков, а сумма в (4) – сумма чисел допустимых (по заданному значению k) взаимных позиций элементов перестановок фиксированных и остальных элементов, зависящих от наборов $\bar{n}$ по рекурренте (1), где $S = k+1$. □

Приведем числовой пример проведения прямого перечисления исходов схемы и определения их числа N.

Пример 1. Пусть $n = 5$, $t = 3$, $k = 1$ (проверка задания значения $k = 1$: $0 \leqslant k \leqslant (5-3) = 2$).

В силу большого объема исходов схемы (даже при данных небольших значениях параметров схемы) опишем получение фрагмента перечисления всех исходов схемы для первой перестановки из $t!$ по вышеописанным остальным этапам. По (4) число N всех исходов схемы по числу исходов фрагмента примера 1 получим умножением его на $t! = 6$. Сравним его с непосредственно вычисленным по (4).

В соответствии с приведенной последовательностью трех этапов перечисления получим результаты:

1) 3!=6 для фиксированных элементов 1,2,3 дают перестановки между собой (321), (231),(213),(312),(132),(123) – 1-я итерация;

2) 2!=2 для остальных элементов 4,5 дают перестановки между собой (54), (45) – 2-я итерация;

3) по (4) п. 1.5 определяем диапазоны возможных значений мест (n_1, n_2, n_3) фиксированных элементов 1,2,3 этого этапа в заданном на первом этапе порядке среди $n = 5$ мест перестановки, разбивая его на три итерации выбора мест для трех из них на итерациях 3,4,5 при исходе второго этапа (итерации) (5,4):

на 3-й итерации

$1 \leqslant n_1 \leqslant 3$, откуда по (4) с пучком 2-й итерации размера 3;

на 4-й итерации с пучками 3-й итерации размеров (2,2,1):

при $n_1 = 1$ получаем $2 \leqslant n_2 \leqslant \min(4,3) = 3$ с пучком размера 2;

при $n_1 = 2$ получаем $3 \leqslant n_2 \leqslant \min(4,4) = 4$ с пучком размера 2;

при $n_1 = 3$ получаем $4 \leqslant n_2 \leqslant \min(4,5) = 4$ с пучком размера 1;

на 5-й итерации с пучками 4-й итерации размеров (2,2,2,1,1):

при $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ получаем $3 \leqslant n_3 \leqslant \min(5,4) = 4$ с пучком размера 2;

при $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ получаем $4 \leqslant n_3 \leqslant \min(5,5) = 5$ с пучком размера 2;

при $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ получаем $4 \leqslant n_3 \leqslant \min(5,5) = 5$ с пучком размера 2;

при $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ получаем $5 \leqslant n_3 \leqslant \min(5,6) = 5$ с пучком размера 1;

при $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ получаем $5 \leqslant n_3 \leqslant \min(5,6) = 5$ с пучком размера 1.

Результаты п. 3 дают все взаимные расположения фиксированных $t = 3$ и остальных $(n-t) = 2$ элементов их перестановок (каждая в одном порядке) (см. рис. 1) с пучковой структурой по приведенным здесь итерациям: (3), (2,2,1), (2,2,2,1,1).

Аналогично при исходе второй итерации (4,5) получаем ту же цикловую структуру второго участка фрагмента графа.

Приведенный фрагмент графа перечисления исходов схемы на рисунке 1 учитывает и перестановки нефиксированных элементов, т. е. представляет первую (1/3!=1/6) часть всего графа исходов схемы с числом исходов, равным сумме размеров пучков предпоследней итерации. Тогда общее число исходов схемы $N = 2(2+2+2+1+1) \cdot 6 = 96$.

По (4): $N = 3!2!(2+2+2+1+1) = 96$. Результаты для числа N совпали.

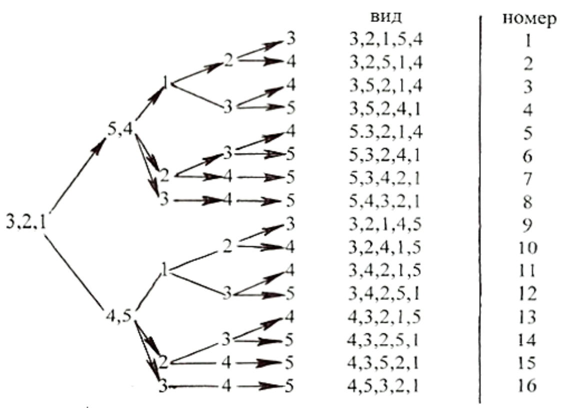

Рис. 1. Фрагмент графа перечисления исходов схемы примера 1
Fig. 1. Fragment of the graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

3. Задача нумерации (ЗН) для исходов схемы

Рассматриваемая схема представляет собой схему с решенной ЗН в схеме ОПД для трех последовательных действий, которыми являются приведенные выше три этапа перечисления ее исходов, для каждого из которых ЗН решена с результатами соответственно по п. 1.3, или в [1] и [3], и пучковая структура графа перечисления исходов нашей схемы получена. Приведем решение ЗН на числовом примере.

Пример 2. В условиях примера 1 ($n = 5$, $t = 3$, $k = 1$) решим прямую и обратную ЗН.

Приведем начальный фрагмент графа перечисления исходов схемы с первым порядком взаимного расположения фиксированных элементов.

ПЗН. Пусть дан номер исхода схемы $N_* = 14$, найти его вид R_*.

По рисунку 1 $R_* = 43251$. Найдем его по теореме 3 п. 1.3:

$N_* = N_*^{(5)} = 14$, $N_*^{(4)} = 8$, $N_*^{(3)} = 5$, $N_*^{(2)} = 2$, $N_*^{(1)} = 1$;

$j_5 = 2$, $j_4 = 1$, $j_3 = 2$, $j_2 = 2$, $j_1 = 1$.

Теперь по этапам перечисления исходов схемы:

1. При $j_1 = 1$ перестановка трех фиксированных элементов: 321;

2. При $j_2 = 2$ перестановка двух остальных элементов: 45;

3. По итерациям 3), 4), 5) находим последовательные места n_1, n_2, n_3 элементов 3, 2, 1 в перестановке, обозначая не заполненные пока места звездочками в искомом R_*:

при $j_3 = 2$ для $1 \leqslant n_1 \leqslant 3$ получаем второе значение места $n_1 = 2$ элемента 3, т. е. $R_* = *3***$;

при $j_4 = 1$ для $n_1 = 2$, $3 \leqslant n_2 \leqslant 4$ получаем первое значение места $n_2 = 3$ элемента 2, т. е. $R_* = *32**$;

при $j_3 = 2$ для $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $4 \leqslant n_3 \leqslant 5$ получаем второе значение места $n_1 = 2$ элемента 1, т. е. $R_* = *32*1$;

теперь для нахождения R_* достаточно в последнем результате для него заменить звездочки на 4 и 5 в этом порядке – получим вид исхода $R_* = 43251$, что совпадает с результатом по рисунку 1.

ОЗН. Пусть дан вид исхода схемы $R^* = 43251$, найти его номер N_*.

По рисунку 1 $N_* = N_*^{(5)} = 14$. Найдем его по теореме 4 п. 1.3.

Для этого сначала из данного вида $R^* = 43251$ выпишем номера последовательных мест фиксированных элементов в данном порядке 3,2,1: $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, откуда их номера в своих пучках (см. решение примера 1) $j_3 = 2$, $j_4 = 1$, $j_5 = 2$.

Зная пучковую структуру фрагмента графа перечисления исходов схемы с одной перестановкой фиксированных элементов (см. п. 2 примера 1), расширим ее на две перестановки остальных ее элементов, повторив их дважды, – получим ее для первых 16 исходов схемы, что даст пучковую структуру графа перечисления всех исходов ее 3!=6-кратным повтором. Будем последовательно по рекуррентe теоремы 4 п. 1.3 определять номера исходов траектории, ведущей в графе их перечисления от начала к исходу данного вида, используя начальные участки полученной пучковой структуры графа и номера исходов траектории в своих пучках итераций $j_3 = 2$, $j_4 = 1$, $j_5 = 2$, откуда: $N_*^{(1)} = 1$, $N_*^{(2)} = 2$, $N_*^{(3)} = 3 + 2 = 5$, $N_*^{(4)} = 2 + 2 + 1 + 2 = 8$, $N_*^{(5)} = N^* = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 14$, что совпадает с результатом по графу на рисунке 1.

4. Вероятность исходов схемы среди исходов схемы перестановок и их вероятностное распределение

При равновероятности всех исходов схемы перестановок размера n следует, что вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов перестановки есть $P = N/n!$, а при любом другом заданном распределении исходов схемы перестановок равна сумме вероятностей исходов нашей схемы среди исходов схемы перестановок.

Вероятностное распределение исходов схемы по ПМ рассчитывается из графа перечисления исходов схемы перестановок размера n с их заданным распределением путем удаления траекторий, не ведущих к исходам нашей схемы с пересчетом вероятностей итерационных переходов в каждом пучке каждой итерации делением на сумму прежних итерационных вероятностей оставшихся в пучке переходов, из которых по траекториям вычисляются вероятности исходов схемы.

Пример 3. Пусть $n = 4$, $t = 2$, $k = 1$. Приведем полный граф перечисления исходов схемы перестановки размера 4.

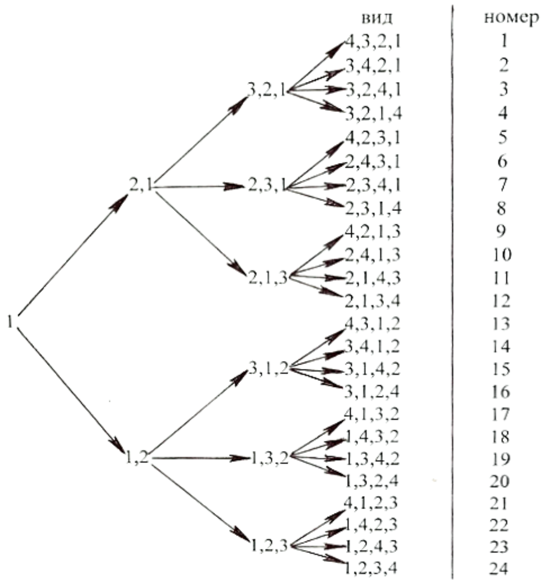

Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы перестановок ($n = 4$)
Fig. 2. The graph of outcomes enumeration of the permutation scheme ($n = 4$)

При равновероятном распределении исходов схемы перестановок размера 4 (см. граф перечисления на рис. 2) приведем перерасчет распределения исходов нашей схемы. В результате удаления не удовлетворяющих ограничениям схемы исходов, получаемых по пучкам итераций в графе перечисления всех исходов схемы перестановок размера 4 (см. рис. 2): на 3-й итерации во 2-м пучке – это исходы (2431) и (2341), в 5-м – (1432) и (1342), получаем вероятности оставшихся в этих пучках итоговых исходов по их траекториям по $(1/2)(1/3)(1/2) = 1/12$, а вероятности остальных исходов – по $(1/2)(1/3)(1/4) = 1/24$. Проверку на распределение производим сравнением с 1 суммы их итоговых вероятностей: $4(1/12) + 16(1/24) = 1$.

5. Моделирование исхода схемы

Универсальное моделирование каждого исхода нашей схемы можно производить по результату решения ПЗН для ее исходов или по результату решения ПЗН в схеме перестановок [1]. Тогда разыгрывание номера исхода одним случайным числом производится соответственно среди номеров нашей схемы с их вероятностным распределением, или – среди номеров исходов перестановки с добавлением к этому же распределению нулевых вероятностей переходов в недопустимые в нашей схеме состояния.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750

2. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченными степами // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 134–139. doi: 10.17076/mat747

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)

2. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Bulletin of the South Urals State University. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3): 103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

3. *Enatskaya N. Yu.* Combinatorial analysis of a combination scheme with restricted steps. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:134–139. doi: 10.17076/mat747 (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 08.12.2022; принята к публикации / accepted: 23.03.2023.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor