Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 64–70
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2023. No. 4. P. 64–70
DOI: 10.17076/mat1730

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПОДСТАНОВОК С ЦИКЛАМИ ЗАДАННЫХ РАЗМЕРОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

В данной схеме решаются все задачи перечислительной комбинаторики, включающие в себя построение процедуры перечисления ее исходов, определение их числа, нахождение их вероятностного распределения и решение задачи нумерации в прямой и обратной постановках, на основании результатов которой предлагается проводить универсальное моделирование ее исходов.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: схема подстановок; цикловая структура подстановки; составы циклов; задача нумерации; моделирование

Д л я   ц и т и р о в а н и я: Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы подстановок с циклами заданных размеров // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 64–70. doi: 10.17076/mat1730

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORAL ANALYSIS OF A SUBSTITUTION SCHEME WITH CYCLES OF GIVEN SIZES

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

In this scheme, all tasks of enumerative combinatorics are solved, which include the construction of a procedure for listing its outcomes, determining their number, finding their probability distribution, and solving the numbering task in direct and reverse formulations. It is suggested that the results are used as the basis for universal modeling of its outcomes.

K e y w o r d s: substitution scheme; cyclic structure of substitution; cycle formulations; numbering task; modeling

F o r   c i t a t i o n: Enatskaya N. Yu. Combinatoral analysis of a substitution scheme with cycles of given sizes. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:64–70. doi: 10.17076/mat1730

Введение

Введем параметры схемы: n – размер подстановки, k – число ее циклов, μ_i – число циклов размера i, где $i = \overline{1,n}$, $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, при $\sum_{i=1}^n \mu_i = k$, $\sum_{i=1}^n i\mu_i = n$, или μ_{i_r} – число циклов размера i_r, где $r = \overline{1,s}$, s – число разных размеров заданных циклов, $\bar{\mu}_{i_r} = (\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s})$, все $\mu_{i_r} > 0$ при $\sum_{r=1}^s \mu_{i_r} = k$,

$\sum_{r=1}^{s} i_r \mu_{i_r} = n$ – две формы записи заданной цикловой структуры подстановки, которую иногда удобно задавать еще в виде вариационного ряда заданных размеров циклов $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, N – число исходов схемы.

Здесь и в дальнейшем номера элементов перестановки для краткости будем называть элементами.

Отображения в циклах будем задавать перестановками элементов в них с замыканием (последний элемент отображается в первый), поэтому начальный элемент перестановки для заданного состава цикла несуществен и будет для удобства сравнения исходов схемы задаваться минимальным из элементов цикла.

Составы циклов в исходе подстановки можно перечислять в любом порядке, поэтому для удобства сравнения исходов схемы будем перечислять в порядке роста их размеров, а при их совпадающих размерах – в порядке роста их минимальных элементов.

1. Вспомогательные результаты

Приведем кратко результаты анализа основных используемых здесь схем в принятых для них обозначениях.

1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемой схемы лежит ПМ (см. [2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), состоящая в установлении взаимно-однозначного соответствия между видами и номерами исходов схемы, и универсальное моделирование исходов (УМ), состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации. Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

Перечислим используемые здесь результаты (со своими обозначениями) ранее изученных схем по решению задачи нумерации (ЗН).

1.2. Схема последовательных действий (ПД)

Схема k ПД с результатом анализа в [1] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если i-е действие $(i = \overline{1,k})$ совершается d_i числом способов, то число исходов схемы $N = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через R_{ij_i}, где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij_i} определяется характером действия. Исход совершения r действий $(r \leqslant k)$ обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2,j_2}, \ldots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $r = k$.

Теорема 1. Прямая ЗН. *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \ldots, d_k$ дан номер $N^{(k)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \ldots, R_{kj_k}\}$, определяемый номерами $(j_1, \ldots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$ находится по формуле $j_i = t_i + I(t_i)d_i$, где $t_i = N^{(i)} \mod d_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;*

$$N^{(i-1)} = \left[\frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i}\right],$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z и $i = k, k-1, \ldots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Теорема 2. Обратная ЗН. *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \ldots, d_k$ дан вид ее исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \ldots, R_{kj_k}\}$, определяющий номера $(j_1, \ldots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$. Тогда его номер вычисляется по формуле*

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^{k} d_i + j_k.$$

1.3. Схема сочетаний

В [1] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы сочетаний из n элементов по r с числом исходов C_n^r. Номера элементов в каждом исходе схемы $R = (n_1 n_2 \ldots n_r)$ упорядочены по возрастанию, и значение n_m $(m = \overline{1,r})$ определяет величина l_m – порядковый номер n_m по возрастанию среди значений от $(n_{m-1} + 1)$ до n.

Теорема 3. Прямая ЗН. *Дан номер N исхода схемы сочетаний. Тогда в его искомом виде $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$ значение l_m $(m = \overline{1,r})$ при $j_0 = 1$, $n_0 = 0$, $C_0^0 = 1$ есть*

$$l_m = \min j_m :$$

$$\left\{ N \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s_i = n_{i-1}+J(i-1)}^{l_m - 1} C_{n-s_i}^{r-i} + \sum_{s_m = n_{m-1}}^{j_m} C_{n-s_m}^{r-m} \right\},$$

где $J(Z) = 1$ при $Z = 0$ и $J(Z) = 0$ при $Z > 0$.

Теорема 4. Обратная ЗН. *Дан исход $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$. Тогда его номер N находится (при $n_0 = 0$) по формуле*

$$N = \sum_{i=1}^{r} \sum_{s_i = n_{i-1}+1}^{n_i - 1} C_{n-s_i}^{r-i} + 1.$$

1.4. Схема перестановок

Схема состоит в установлении всех взаимных порядков n различимых элементов между собой.

Решена задача нумерации в прямой и обратной постановках (см. [1]), представленных в виде теорем. Приведем их, например, для перечисления исходов схемы методом графов. (При перечислении исходов схемы методом графов каждый следующий добавляемый элемент ставится до, между и после всех ранее установленных элементов).

Прямая задача нумерации решена следующей теоремой.

Теорема 5. *Дан номер $N = N_r$ перестановки R размера r. Тогда определяющие исход R значения числа M_i (порядковый номер места элемента i $(i = \overline{1,r})$ среди элементов перестановки от 1 до i (слева направо) в данном исходе R) находятся по формуле*

$$M_i = 1 + (N_i - 1) \mod i,$$

где N_i – номер перестановки длины i в процедуре перечисления исходов схемы, порождающей искомую перестановку длины r с данным номером $N = N_r$.

Обратная задача нумерации решена следующей теоремой.

Теорема 6. *Дана перестановка размера r или соответствующий ей исход R. Тогда его номер N определяется формулой*

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r,$$

где M_i – порядковый номер места элемента i $(i = \overline{1,r})$ среди элементов перестановки от 1 до i (слева направо) в данном исходе R.

1.5. Схема перестановок с повторением

Классическая схема перестановок с повторением (см. [1]) возникает при делении n различимых элементов на k различимых частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров) численностями $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, что соответствует схеме размещений n различимых частиц по k различимым ячейкам с заданными уровнями их заполнения: $n_1, n_2, \dots, n_k$, $(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$.

Наряду с этой схемой рассматривается аналогичная схема, отличная от первой неразличимостью порядка частей при делении элементов или неразличимостью ячеек при размещении частиц. Указанные отличия схем и означают укрупнение состояний второй схемы по сравнению с первой. Для краткости называем первую схему схемой A, а вторую – схемой B.

Число N_A исходов схемы A известно, а число исходов схемы B легко вычисляется: введем обозначение $w = \prod_{i=1}^{t} (\mu_i!)$, где $t = max\{n_k\}$, а μ_i – число частей деления в схеме A размером i. Тогда общее число исходов схемы B N_B (в силу неразличимости порядков частей деления совокупности) вычисляется по формуле

$$N_B = \frac{N_A}{w}.$$

Предлагается две процедуры перечисления исходов схемы A, использующих перебор исходов схемы перестановок или схем сочетаний, следующих из известной формулы для N_A. Перечисление исходов схемы B, частично объединяющих исходы схемы A, производится из их перечисления путем перезаписи в форме исходов схемы B с отбрасыванием повторяющихся.

Прямая и обратная задачи нумерации в схеме A решены следующими теоремами.

Теорема 7. *Пусть в схеме с параметрами k, $\bar{n}$ дан номер N исхода. Тогда его вид $R = (R_1, \dots, R_k)$, где $R_1, \dots, R_k$ – исходы k схем сочетаний, составляющих изучаемую схему, определяемые номерами исходов в этих схемах $N_1, \dots, N_k$ по результатам решения прямой задачи нумерации в них и находятся по рекуррентным формулам*

$$N_i = t_i + d_i I(t_i), \quad i = \overline{1,k},$$

где d_i – размер пучка на i-й итерации, содержащего траекторию T в графе перечисления исходов схемы от ее начального исхода к искомому на k-й итерации (т. е. число исходов

i-й схемы сочетаний – одной из составляющих схему); $I(Z) = 1$ при $Z = 0$ и $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$; s_i – номер исхода в T на i-й итерации; $t_i = s_i \mod d_i$;

$$s_{i-1} = \left[\frac{s_i + d_i - 1}{d_i}\right].$$

Теорема 8. *Пусть в схеме с параметрами k, $\bar{n}$ дан вид исхода $R = R_1, \ldots, R_k$, компоненты которого по результатам обратной задачи нумерации в схеме сочетаний из п. 1.3 определяют их номера в этой схеме $N_1, \ldots, N_k$. Тогда номер N исхода данного вида изучаемой схемы A вычисляется по формуле*

$$N = \sum_{i=1}^{k-1}(N_i - 1)\prod_{l=i}^{k} d_{l+1} + N_k.$$

При установленном равновероятном распределении исходов схемы A с использованием результата ЗН можно проводить быстрое моделирование ее исходов.

2. Вид исходов схемы и их прямое перечисление

Исходы схемы зависят только от составов циклов и последовательностей отображений в них, поэтому исход схемы будем записывать в виде перечисления составов (в круглых скобках) со всеми отображениями – перестановками в них в порядке, описанном во Введении.

Предлагается прямое перечисление исходов (без отбраковки исходов более общей схемы – перестановки с повторением), состоящее из объединения каждого с каждым результатов трех следующих этапов по схеме ПД:

1) деления n различимых элементов на суммарные группы элементов совпадающих по размеру заданных частей-циклов – схема S_1 с числом исходов $N^{(1)}$, перечисляемых в порядке роста этих исходных частей;

2) деления каждой суммарной группы элементов на части одинаковых размеров без учета их порядка – схема S_2 с числом исходов $N^{(2)}$;

3) перечисления перестановками всех порядков отображений с замыканием (последнего в первый) в каждом из исходов п. 2) – схема S_3 с числом исходов $N^{(3)}$ (например, с минимальным первым элементом в каждой перестановке).

Изучаемая схема представляет собой три ПД данных выше трех этапов перечисления ее исходов. Тогда ЗН для схемы решена по формулам п. 1.2, если известны численности исходов этих трех этапов, являющиеся размерами пучков соответствующих трех итераций этого перечисления, и решена ЗН для каждого из этапов.

С этих позиций будем рассматривать схемы S_1, S_2, S_3.

2.1. Анализ схемы S_1

Схема S_1 представляет собой известную из [1] схему перестановок с повторением с числом исходов при $n_0 = 0$

$$N^{(1)} = \prod_{i=1}^{k} C^{n_i}_{n-\sum_{j=0}^{i-1} n_j} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(i_r!)^{\mu_{i_r}}}. \tag{1}$$

ЗН в схеме решена в [1] с результатами анализа в п. 1.5, как в схеме ПД (п. 1.2) схем сочетаний из данного представления числа $N^{(1)}$.

2.2. Анализ схемы S_2

Схема S_2 представляет собой схему ПД (см. [1]) схем C_{i_r} – деления каждой группы циклов-частей $i_r\mu_{i_r}$ на μ_{i_r} частей одинаковых размеров по i_r элементов без учета их порядка или в одном заранее установленном порядке, например, в порядке роста содержащихся в них минимальных элементов. Таким образом, анализ второго этапа перечисления сводится к изучению схемы C_{i_r}, которую исследуем отдельно.

Анализ схемы C_{i_r}

Схема C_{i_r} состоит из последовательных шагов выбора растущих минимальных элементов в этих равных частях с добором (i_r-1) элементов к нему из остальных элементов до заданного размера i_r части по соответствующей схеме сочетаний, так что в следующей части минимальным элементом берется наименьший из не вошедших в предыдущую.

При заданном размере i_r частей деления совокупности различимых $i_r\mu_{i_r}$ элементов будем записывать исход в виде наборов элементов каждой части деления через запятую в круглых скобках в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов.

С учетом этой формы записи исходов прямое их перечисление будем конструировать последовательным перебором номеров элементов в круглых скобках. Тогда элементы в первых круглых скобках должны начинаться с 1, а остальные $(i_r - 1)$ элементов могут быть набраны $C^{i_r-1}_{i_r\mu_{i_r}-1}$ способами по схеме сочетаний, для которой из п. 1.3 известна процедура их перечисления. Элементы во вторых круглых скобках должны начинаться с минимального из элементов, не вошедших в первую скобку, а остальные $(i_r - 1)$ элементов могут быть набраны $C^{i_r-1}_{(\mu_{i_r}-1)i_r-1}$ способами и т. д. Аналогично получаем, что элементы $(\mu_{i_r} - 1)$-й круглой скобки начинаются с минимального элемента, не вошедшего в предыдущие круглые скобки, а остальные $(i_r - 1)$ элементов могут быть набраны $C^{i_r-1}_{2i_r-1}$ способами, в последнюю μ_{i_r}-ю круглую скобку войдут оставшиеся i_r элементов одним способом. Тогда полученные числа исходов набора частей есть размеры одинаковых пучков схемы ПД, составляющих схему C_{i_r}, для которой в п. 1.2 приведено решение ЗН.

Из процедуры перечисления исходов схемы C_{i_r} следует явная формула их числа $N_{C_{i_r}}$:

$$N_{C_{i_r}} = \prod_{j=0}^{\mu_{i_r}-1} C^{i_r-1}_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1} = \frac{(i_r\mu_{i_r}-1)!}{((i_r-1)!)^{\mu_{i_r}} i_r^{\mu_{i_r}-1}(\mu_{i_r}-1)!}. \qquad (2)$$

Замечание 1. Число исходов в схеме C_{i_r}, очевидно, можно получить и из числа исходов с теми же параметрами в схеме перестановок с повторением (см. п. 1.5), уменьшив его в $(\mu_{i_r})!$ раз, т. е.

$$N_{C_{i_r}} = (i_r\mu_{i_r})!/(i_r!)^{\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!, \qquad (3)$$

что получается и непосредственным преобразованием, и из формулы (2) для $N_{C_{i_r}}$ домножением числителя и знаменателя на $i_r\mu_{i_r}$.

Приведем примеры перечисления МГ исходов схемы C_{i_r} с просчетом для сравнения числа исходов схемы и по формулам (1) и (2). Пусть $\bar{M} = (M_1, \dots, M_s)$ – растущие минимальные элементы в циклах (всегда $M_1 = 1$).

Пример 1. А. Пусть $i_r\mu_{i_r} = 6$, $i_r = 3$, $\mu_{i_r} = 2$. Число вариантов первой части деления $C_5^2 = 10$, которая однозначно определяет вторую часть деления, т. к. частей – две. Тогда будем перебирать исходы, добавляемые к 1 при формировании первой части, а остальные элементы отнесем ко второй части и сразу выпишем все 10 исходов схемы:

$\{(1,2,3),(4,5,6)\},\{(1,2,4),(3,5,6)\},$
$\{(1,2,5),(3,4,6)\},\{(1,2,6),(3,4,5)\},$
$\{(1,3,4),(2,5,6)\},\{(1,3,5),(2,4,6)\},$
$\{(1,3,6),(2,4,5)\},\{(1,4,5),(2,3,6)\},$
$\{(1,4,6),(2,3,5)\},\{(1,5,6),(2,3,4)\}.$

Вычислим для сравнения число исходов схемы по формулам (1) и (2): $N_{C_{i_r}} = 5!/(2!)^2 \cdot 3^1 \cdot 1! = 10$ и $N_{C_{i_r}} = 6!/(3!)^2 \cdot 2! = 10$, что совпало по формулам с прямым перечислением.

В. Пусть $i_r\mu_{i_r} = 6$, $i_r = 2$, $\mu_{i_r} = 3$. $M_1 = 1$, а число вариантов набора первой части деления $C_5^1 = 5$ – это исходы $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, которые однозначно определяют минимальные элементы второй части, как минимальные из оставшихся, и которые с добавлением к ним любого другого из оставшихся дают по 3 варианта наборов вторых частей, соответствующие каждой первой части: $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,3)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$. Теперь составы третьих частей определяются первыми двумя однозначно и есть соответственно $(5,6)$, $(4,6)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(4,6)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(3,6)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(3,6)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(3,5)$, $(3,4)$.

Вычислим для сравнения число исходов схемы по формулам (2) и (3): $N_{C_{i_r}} = 5!/(1!)^3 \cdot 2^2 \cdot 2! = 15$ и $N_{C_{i_r}} = 6!/(2!)^3 \cdot 3! = 15$, что совпало по формулам и с прямым перечислением.

ЗН в схеме C_{i_r} решена по п. 1.5 с полученной здесь пучковой структурой перечисления ее исходов с размерами пучков чисел исходов соответствующих схем сочетаний из представления формулы (2) $C^{i_r-1}_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}$ при $r = \overline{1,s}$, для каждой из которых в п. 1.3 решена ЗН.

Вернемся к анализу схемы S_2.

По схеме ПД схем C_{i_r} общее число исходов схемы S_2 есть

$$N^{(2)} = \prod_{r=1}^{s} N_{C_{i_r}} = \prod_{r=1}^{s} (i_r\mu_{i_r})!/(i_r!)^{\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!, \qquad (4)$$

а это означает, что каждый исход схемы S_2 соответствует $\prod_{r=1}^{s}(\mu_{i_r})!$ равновероятным исходам схемы S_1, откуда исходы схемы S_2 соответственно имеют вероятности $\prod_{r=1}^{s}\mu_{i_r}!/N^{(1)}$.

Замечание 2. С учетом очевидных равенств

$$\prod_{r=1}^{s}(i_r!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{j=1}^{k} n_j!; \quad \prod_{r=1}^{s}\mu_{i_r}! = \prod_{j=1}^{k}\mu_j! \qquad (5)$$

из (4) следует, что

$$N^{(1)}N^{(2)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i! \prod_{j=1}^{t}\mu_j!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!\mu_j!},$$

а это дает формулу числа делений совокупности n различимых элементов на k частей заданных размеров $\bar{n}$ без учета их порядка, что совпадает с формулой для N_B из п. 1.5.

ЗН в схеме S_2 (как схемы ПД схем C_{i_r}) проводится при известной пучковой структуре перечисления ее исходов с размером пучков на $(j+1)$-й итерации $(j = \overline{0, k-1})$ равной

$C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1}$ в соответствии с п. 1.2 по решенной ЗН для схем C_{i_r}.

2.3. Анализ схемы S_3

Схема S_3 представляет собой схему ПД схем перестановок элементов как порядка отображений в циклах с замыканием из элементов каждой части деления в каждом исходе схемы S_2 известной численностью по $(i_r-1)!$, соответствующей числу перестановок элементов части с фиксированным в начале минимальным элементом. Тогда общее число исходов схемы

$$N^{(3)} = \prod_{r=1}^{s}((i_r-1)!)^{\mu_{i_r}}. \tag{6}$$

3. Число исходов схемы N и их вероятностное распределение

Число исходов всей схемы N как схемы ПД определяется как произведение численностей трех этапов перечисления ее исходов $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$, описанных в начале п. 2, откуда из (1), (4), (6) с учетом равенств (5) с добавлением очевидного равенства $\prod_{r=1}^{s}((i_r-1)!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{j=1}^{k}(n_j-1)!$ получаем формулу

$$N = N^{(1)}N^{(2)}N^{(3)} = n!\prod_{r=1}^{s}\frac{((i_r-1)!)^{\mu_{i_r}}}{(i_r)^{\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!} = n!\prod_{j=1}^{k}\frac{(n_j-1)!}{n_j!\mu_j!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k}n_j\mu_j!}. \tag{7}$$

Приведем примеры вычислений числа N с наглядной визуальной проверкой.

Пример 2.
A. Пусть $n = 5$, $k = 3$, $\bar{n} = (1,1,3)$ или $\bar{\mu} = (2,0,1,0,0)$.

Тогда по (7) $N = 5!/1\cdot 1\cdot 3\cdot 2! = 20$. По данной в п. 1 процедуре перечисления исходов легко получаем следующие 10 исходов составов циклов схемы: $\{(1)(2)(3,4,5)\}; \{(1)(3)(2,4,5)\}; \{(1)(4)(2,3,5)\}; \{(1)(5)(2,3,4)\}; \{(2)(3)(1,4,5)\}; \{(2)(4)(1,3,5)\}; \{(2)(5)(1,3,4)\}; \{(3)(4)(1,2,5)\}; \{(3)(5)(1,2,4)\}; \{(4)(5)(1,2,3)\}$, а с учетом того, что в последнем цикле каждого исхода имеем по два разных отображения, получаем общее число исходов равное 20, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).
B. Пусть $n = 6$, $k = 3$, $\bar{n} = (2,2,2)$ или $\bar{\mu} = (0,3,0,0,0,0)$.

Тогда по (4) $N = 6!/2\cdot 2\cdot 2\cdot 3! = 15$. По данной в п. 2 процедуре перечисления исходов легко получаем следующие 15 исходов составов циклов схемы: (1,6)(2,5)(3,4); (1,5)(2,6)(3,4); (1,6)(2,4)(3,5); (1,4)(2,6)(3,5); (1,5)(2,4)(3,6); (1,4)(2,5)(3,6); (1,6)(2,3)(4,5); (1,3)(2,6)(4,5); (1,5)(2,3)(4,6); (1,3)(2,5)(4,6); (1,4)(2,3)(5,6); (1,3)(2,4)(5,6); (1,2)(3,6)(4,5); (1,2)(3,5)(4,6); (1,2)(3,4)(5,6), а с учетом того, что в каждом цикле каждого исхода имеем по одному отображению, получаем общее число исходов равное 15, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).
C. Пусть $n = 6$, $k = 2$, $\bar{n} = (3,3)$ или $\bar{\mu} = (0,0,2,0,0,0)$.

Тогда по (7) $N = 6!/3\cdot 3\cdot 2! = 40$. По данной в п. 2 процедуре перечисления исходов легко получаем следующие 10 исходов составов циклов схемы:
(1,3,4)(2,5,6); (1,3,5)(2,4,6); (1,3,6)(2,4,5); (1,4,5)(2,3,6); (1,4,6)(2,3,5); (1,5,6)(2,3,4); (1,2,6)(3,4,5); (1,2,5)(3,4,6); (1,2,4)(3,5,6); (1,2,3)(4,5,6); а с учетом того, что в каждом из двух циклов каждого исхода имеем по два отображения, получаем общее число исходов равное 40, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).

В завершение дадим пример без визуальной проверки из-за ее громоздкости, но более общего вида и вычислим число исходов схемы только по формуле (7).
D. Пусть $n = 12$, $k = 5$, $\bar{n} = (2,2,2,3,3)$ или $\bar{\mu} = (0,0,3,2,0,0,0,0,0,0,0,0)$.

Тогда по (7) $N = 12!/2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3!\cdot 2! = 554400$.

4. Вероятностное распределение исходов схемы

Теорема 9. *Исходы нашей схемы равновероятны с вероятностью каждого исхода*

$$p = 1/N = \frac{\prod_{j=1}^{k}n_j\mu_j!}{n!}. \tag{8}$$

Доказательство. Все исходы нашей схемы отличаются от всех исходов схемы перестановки с повторением неразличимостью взаимных порядков среди частей деления совпадающих размеров в количестве $\prod_{j=1}^{k}\mu_j!$ и различимостью порядков элементов в частях деления, начинающихся с фиксированного (например, минимального) элемента в количестве $\prod_{j=1}^{k}(n_j-1)!$. А это приводит к пересчету вероятностей исходов нашей схемы из соответствующей вероятности исхода схемы перестановки с повторением $p^* = \prod_{j=1}^{k}n_j!/n!$ (при равновероятном распределении ее исходов) умножением p^* на $\prod_{j=1}^{k}\mu_j!$ и делением на $\prod_{j=1}^{k}(n_j-1)!$, откуда получаем (8). □

5. Моделирование исходов схемы

Будем проводить его общим приемом, названным в п. 1.1 УМ – универсальным методом в перечислительном методе (ПМ) доасимптотического анализа нашей схемы, на основе установленного в п. 4 вероятностного распределения нумерованных исходов схемы и обсужденного решения для них прямой задачи нумерации (ЗН) по теореме 1 п. 1.2 в схеме ПД с изученной в п. 2 структурой графа перечисления исходов. Тогда конкретный вид каждого смоделированного исхода будем получать из его соответствия (по прямой ЗН) с разыгранным по полученному вероятностному распределению номером.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750

2. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)

2. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Bulletin of the South Urals State University. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 07.12.2022; принята к публикации / accepted: 13.04.2023.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor