Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 57–66
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2022. No. 4. P. 57–66
DOI: 10.17076/mat1562

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 517.938, 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ ПО УРОВНЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ

А. М. Сазонов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

В статье рассмотрена задача оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой фондов с двумя уровнями эффективности на бесконечном времени. На основе принципа максимума Понтрягина найдены оптимальные в смысле максимизации прибыли объемы инвестиций для каждого уровня. Проведен качественный анализ динамической системы с произвольным переключением управления. Для каждого значения оптимального управления показана глобальная устойчивость соответствующего положения равновесия. Найдено инвариантное множество для исследуемой системы с переменной структурой. Получена оценка для момента времени, после которого прибыль будет сколь угодно мала. Поставлена задача о выживаемости экономической системы для двух и произвольного числа уровней эффективности. Найдены допустимые управления, обеспечивающие выживаемость.

Ключевые слова: управление; динамические системы; шумпетеровская динамика

Для цитирования: Сазонов А. М. Об оптимальном управлении распределением ресурсов по уровням эффективности // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 57–66. doi: 10.17076/mat1562

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. M. Sazonov. ABOUT OPTIMAL CONTROL OF RESOURCE ALLOCATION BY EFFICIENCY LEVELS

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

The paper addresses the problem of the optimal control of the investment policy with Schumpeterian dynamics of capital stocks with two efficiency levels over infinite time. Pontryagin's maximum principle was used to find the investment volumes that are optimal for maximizing profit for each level. Qualitative analysis of the dynamical system with a variable structure characterized by optimal control values was carried out. The corresponding equilibrium for each optimal control value was proved to possess global stability. The invariant set for the investigated system with variable structure was identified. The time instant after which the profit will be arbitrarily small was estimated. The viability problem for the economic system with two and an arbitrary number of efficiency levels was formulated. The admissible controls that ensure viability were identified.

Keywords: control; dynamic systems; Schumpeterian dynamics

For citation: Sazonov A. M. About optimal control of resources distribution over efficiency levels. *Trudy Karel′skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:57–66. doi: 10.17076/mat1562

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Введение

В начале XX века Й. Шумпетер предложил концепцию эндогенного экономического роста, в основе которого лежат два процесса: создание новых технологий – инновации и их заимствование – имитации. Математическая формализация теории эндогенного экономического роста предложена в работах [2, 4–6].

В статье А. А. Шананина и Г. М. Хенкина [6] описана модель динамики мощностей следующего вида:

$$\dot{M}_i = (1-\varphi_i)\lambda_i M_i + \varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, \ldots$ с граничными и начальными условиями

$$M_0(t) \equiv 0, M_i(0) \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N} M_i(0) > 0, \qquad (2)$$
$$M_i(0) = 0 \text{ при } i > N.$$

Здесь $M_i(t)$ – объем мощностей предприятий на уровне i, φ_i – доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на уровне $i+1$, λ_i – удельная прибыль, получаемая на уровне i (прибыль от единицы товара в единицу времени), $i = 1, \ldots, N$. При этом $\varphi_i(t) = \alpha + \beta(1 - \frac{\sum_{k=0}^{i} M_k}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k})$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – константы, обозначающие интенсивность инноваций и имитаций соответственно.

В представленной модели уровни различаются прибылью, получаемой за единицу времени от единичной мощности. Переход предприятий с уровня i возможен только на следующий более высокий уровень $i+1$. При этом число предприятий, переходящих за единицу времени с уровня i на уровень $i+1$, пропорционально количеству предприятий на уровне i в данный момент времени. Первое слагаемое $(1-\varphi_i)\lambda_i M_i$ характеризует экономический рост на уровне i за счет производства на данном уровне, а второе $\varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}$ характеризует вклад с предыдущего уровня $i-1$. В работе [6] был получен вид предельного распределения мощностей.

В настоящей статье предлагается оптимальная в некотором смысле модель шумпетеровской динамики. При этом стимулом для построения предлагаемой модели послужила работа С. М. Асеева и А. В. Кряжимского [1], в которой предложена модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды вида

$$\dot{x} = u - \delta x, u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant u \leqslant u_{max}\}, \qquad (3)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (4)$$

$$J(x,u) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}[ax(t) - bx^2(t) - cu(t)]dt \to max, \qquad (5)$$

где x – основные производственные фонды (капитал), управление $u(t)$ – количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени t (инвестиционная политика), постоянные $\delta > 0$ – удельная скорость износа оборудования, $\rho > 0$ – коэффициент дисконтирования, $a = \overline{\pi} - \zeta > 0$, где $\overline{\pi} > 0$ – максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке, $\zeta > 0$ – стоимость производства единицы продукта, величина $b > 0$ такая, что $\frac{\overline{\pi}}{b}$ – максимальный доступный объем рынка, $c > 0$ – стоимость единицы капитала, $x_0 > 0$ – начальное состояние, $u_{max} > 0$ – максимально возможный объем инвестиций.

В работе [1] на основе принципа максимума Понтрягина было построено оптимальное управление в задаче (3)–(5).

В настоящей работе представлено развитие модели (3)–(5) с шумпетеровской динамикой вида (1). Рассматривается экономическая система из двух уровней эффективности такая, что часть средств на каждом уровне используется для производства на текущем уровне, а другая часть – для развития производства на следующем уровне. При этом предполагается, что часть средств на втором уровне эффективности, используемая для развития производства на следующем уровне, накапливается для создания нового уровня эффективности. Эти средства могут вкладываться в научные разработки или накапливаться для формирования начального капитала на новом уровне эффективности.

Модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия с шумпетеровской динамикой

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 - \delta_1 x_1 + (1-\varphi_1)x_1, \\ \dot{x_2} = u_2 - \delta_2 x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \\ y_i \geqslant 0, y_1 + y_2 \leqslant u_{max}, i = 1, 2\}, \tag{8}$$

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$J(x,u) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{2} a_i(1-\varphi_i)x_i(t) \right. \\ \left. - b_i(1-\varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t) \right] dt \to max. \tag{10}$$

Здесь x_i – основные производственные фонды (капитал) на уровне i; управления $u_i(t)$ – количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени t на уровне i (инвестиционная политика). Функции u_i измеримы (по Лебегу). Заданные постоянные: $\delta_i > 0$ – удельная скорость износа оборудования на уровне i; $\rho > 0$ – коэффициент дисконтирования; $a_i = \overline{\pi}_i - \zeta > 0$, где $\overline{\pi}_i > 0$ – максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке, для уровня i; $\zeta_i > 0$ – стоимость производства единицы продукта на уровне i; величины $b_i > 0$ такие, что $\frac{\overline{\pi}_i}{b}$ – максимальный доступный объем рынка для уровня i; φ_i – доля средств на уровне i, используемая для развития производства на следующем уровне $i+1$; $c_i > 0$ – стоимость единицы капитала на уровне i; $x_i^0 > 0$ – начальный объем фондов на уровне i; $u_{max} > 0$ – максимально возможный объем инвестиций. Обозначим $f(x,u) = (f_1(x,u), f_2(x,u))$ вектор правых частей системы (6), $g(x,u) = \sum_{i=1}^{2} (a_i(1-\varphi_i)x_i(t) - b_i(1-\varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t))$, где $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$.

Замечание 1. В отличие от модели (1)–(2) в данной работе величины φ_i, $i = 1, 2$, полагаются постоянными.

Замечание 2. Величины φ_i, δ_i в модели (6)–(10) в данной работе полагаются такими, что $\delta_i > 1 - \varphi_i$, поскольку в случае $\delta_i < 1 - \varphi_i$ имеем $x_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит экономической интерпретации $x_i(t)$, а случай $\delta_i = 1 - \varphi_i$ не имеет смысла рассматривать по причине его аналитической очевидности. С экономической точки зрения это означает, что скорость износа оборудования δ_i на каждом уровне превышает скорость роста фондов за счет внутренних резервов $1 - \varphi_i$. В рассматриваемой задаче это ограничение экономически обосновано, поскольку инвестиции из внешних источников, u_i, необходимы в том случае, когда собственные средства не покрывают износ. В противном случае экономический рост обеспечивается за счет внутренних резервов, и вследствие этого привлечение дополнительных внешних вложений требуется только для значительного расширения производства. Зачастую привлечение внешних вложений может быть убыточно для развития предприятия, если, например, речь идет о банковском кредите, который требует выплаты процентов. В данной статье задача расширения производства не рассматривается.

Для решения поставленной задачи (6)–(10) используется принцип максимума Понтрягина.

Проверим выполнение достаточных условий существования оптимального управления, полученных в [1].

Условие 1 (A1)**.** Существует такое $C_0 > 0$, что скалярное произведение

$$(x, f(x,u)) \leqslant C_0(1 + ||x||^2)$$

для любых x, u.

Покажем, что это верно. Рассмотрим скалярное произведение

$$(x, f(x,u)) = x_1 u_1 - \delta_1 x_1^2 + (1-\varphi_1)x_1^2 + x_2 u_2 \\ - \delta_2 x_2^2 + (1-\varphi_2)x_2^2 + \varphi_1 x_1 x_2.$$

Поскольку $u_1 + u_2 \leqslant u_{max}$, имеем следующую верхнюю оценку для скалярного произведения (x, f):

$$(x, f(x,u)) \leqslant u_{max}x_1 + x_1^2 + (1-\delta_1-\varphi_1)x_1^2 + u_{max}x_2 + (1-\delta_2-\varphi_2)x_2^2 + \varphi_1 x_1 x_2.$$

Рассмотрим евклидову метрику $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2$. Вычтем из $C_0(1+||x||^2)$ полученную верхнюю оценку для (x, f).

$$\begin{aligned} C_0(1+||x||^2) &- u_{max}x_1x_1^2 + (1-\delta_1-\varphi_1)x_1^2 \\ &+ u_{max}x_2 + (1-\delta_2-\varphi_2)x_2^2 + \varphi_1x_1x_2 \\ &= (C_0+\delta_1+\varphi_1-1)x_1^2 - u_{max}x_1 \\ &+ (C_0+\delta_2+\varphi_2-1)x_2^2 - u_{max}x_2 \\ &+ C_0 - \varphi_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Выделим полные квадраты

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\varphi_1}{2}x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_1\sqrt{C_0+\varphi_1+\delta_1-\frac{\varphi_1^2}{4}-1}\right. \\ &\left. - \frac{u_{max}}{2\sqrt{C_0+\varphi_1+\delta_1-\frac{\varphi_1^2}{4}-1}}\right)^2 \\ &+ \left(x_2\sqrt{C_0+\varphi_2+\delta_2-2} - \frac{u_{max}}{2\sqrt{C_0+\varphi_2+\delta_2-2}}\right)^2 \\ &+ C_0 - \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0+\varphi_1+\delta_1-\frac{\varphi_1^2}{4}-1)}\right) \\ &- \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0+\varphi_2+\delta_2-2)}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при $C_0 \geqslant \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0+\frac{\varphi_1^2}{4}+\delta_1-1)}\right) + \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0+\varphi_2+\delta_2-2)}\right)$ условие (A1) выполняется. Очевидно, что если C_0 достаточно большое, то данное неравенство и, следовательно, условие (A1) выполнено. Рассмотрим в качестве примера $C_0 = u_{max}^2 + 2$. Ясно, что $u_{max}^2 + 2 > \frac{1}{2}$. Подставим $C_0 = u_{max}^2 + 2$ в правую часть неравенства. Учитывая $\varphi_1 < 1$, имеем

$$\left(\frac{u_{max}^2}{4(u_{max}^2+\varphi_1+\delta_1+1-\frac{\varphi_1^2}{4})}\right) + \left(\frac{u_{max}^2}{4(u_{max}^2+\varphi_2+\delta_2)}\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, показано, что при $C_0 = u_{max}^2 + 2$ условие (A1) выполнено.

Условие 2 (A2). Для любого x множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^3 : z^0 \leqslant g(x,u), \\ z = f(x,u), u \in U\}$$

выпукло.

Согласно (1.7) из [1, с. 12] условие (A2) в рассматриваемой задаче выполнено автоматически, поскольку управляемая система аффинна по управлению.

Условие 3 (A3). Существуют такие положительные функции ω и μ, заданные на $[0, \infty)$, что $\omega(t) \to +0$, $\mu(t) \to +0$ при $t \to \infty$, и для любой допустимой пары (x, u) выполняются неравенства

$$e^{-\rho t}\max_{u\in U}|g(x(t),u(t))| \leqslant \mu(t), t \geqslant 0,$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho t}|g(x(t),u(t))|dt \leqslant \omega(T), T \geqslant 0. \quad (11)$$

При этом, если функция $\mu(t)$ суммируемая, (11) выполняется автоматически. В этом случае функцию ω можно определить как

$$\omega(T) = \int_T^\infty \mu(t)dt, T \geqslant 0.$$

Проверим выполнение условия (A3). Покажем, что $x_i(t)$ ограничены. Решив систему (6), имеем

$$x_1(t) = e^{-(\delta_1+\varphi_1-1)t} \times \left(x_1^0 + \int_0^t u_1(\tau)e^{(\delta_1+\varphi_1-1)\tau}d\tau\right),$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = e^{-(\delta_2+\varphi_2-1)t}&\left(x_2^0 + \int_0^t \left(u_2(\tau_1)\right.\right. \\ &+ \varphi_1 e^{-(\delta_1+\varphi_1-1)\tau_1}\left(x_1^0\right. \\ &\left.\left.\left.+ \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2)e^{(\delta_1+\varphi_1-1)\tau_2}d\tau_2\right)\right)e^{(\delta_2+\varphi_2-1)\tau_1}d\tau_1\right). \end{aligned}$$

Поскольку $u_i \leqslant u_{max}$, получим

$$x_1(t) \leqslant e^{-(\delta_1+\varphi_1-1)t}x_1^0 + \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) \leqslant\ & e^{-(\delta_2+\varphi_2-1)t}x_2^0 + \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} \\ &+ e^{-(\delta_1+\varphi_1-1)}\frac{\varphi_1 x_1^0}{\delta_2+\varphi_2-\delta_1-\varphi_1} \\ &+ \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) очевидно, что $x_i(t)$ ограничены. Следовательно, функция $g(x,u) = a_1(1-\varphi_1)x_1(t) - b_1(1-\varphi_1)^2x_1^2(t) - c_1u_1(t) + a_2(1-\varphi_2)x_2(t) - b_2(1-\varphi_2)^2x_2^2(t) - c_2u_2(t)$ также ограничена.

Очевидно, $\max\limits_{u\in U}|g(x,u)| \leqslant |a_1(1-\varphi_1)x_1(t) - b_1(1-\varphi_1)^2x_1^2(t) + a_2(1-\varphi_2)x_2(t) - b_2(1-\varphi_2)^2x_2^2(t) + (c_1+c_2)u_{max}|$. Рассмотрим функцию $\mu(t) = e^{-\rho t}|(a_1(1-\varphi_1)x_1(t) - b_1(1-\varphi_1)^2x_1^2(t) + a_2(1-\varphi_2)x_2(t) - b_2(1-\varphi_2)^2x_2^2(t)) + (c_1+c_2)u_{max}| + k$, где константа $k > 0$. Ясно, что $e^{-\rho t}\max\limits_{u\in U}|g(x(t),u(t))| < \mu(t)$. Поскольку $\mu(t)$ суммируемая, то условие (A3) выполнено.

Таким образом, по теореме 2.1 из [1] в рассматриваемой задаче существует оптимальное допустимое управление.

Гамильтониан имеет вид

$$H = (\psi_1 - c_1e^{-\rho t})u_1 + (\psi_2 - c_2e^{-\rho t})u_2 + h(x,\psi),$$

где $\psi = (\psi_1,\psi_2)$ – вектор сопряженных переменных, а слагаемое $h(x,\psi)$ не содержит управления u. Уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{cases}\dot{\psi_1} = -\delta_1\psi_1 + u_1\psi_1 - u_1\psi_2 + e^{-\rho t}a_1u_1 - \\ -2b_1u_1^2x_1 \\ \dot{\psi_2} = -\delta_2\psi_2 + u_2\psi_2 + e^{-\rho t}a_2u_2 - 2b_2u_2^2x_2.\end{cases} \tag{14}$$

Система (6), (14) – линейная неоднородная, ее решение $(x_1(t),x_2(t),\psi_1(t),\psi_2(t))$ удовлетворяет условию асимптотической стационарности, представленному в [1]:

$$H = \lim_{t\to\infty} H(x_1^*,x_2^*,t,\psi_1(t),\psi_2(t)) = 0.$$

Обозначим $q_i = \psi_i - c_ie^{-\rho t}$, $i = 1,2$. Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление u^* имеет вид

$$u^* = \begin{cases}(0,0), & \text{если } q_1 < 0, q_2 < 0,\\ (0,u_{max}), & \text{если } q_1 < 0, q_2 > 0,\\ (u_{max},0), & \text{если } q_1 > 0, q_2 < 0,\\ (\hat{u}_1,\hat{u}_2), & \text{если } q_1 > 0, q_2 > 0,\end{cases} \tag{15}$$

где

$$(\hat{u}_1,\hat{u}_2) = \begin{cases}(u_{max},0), & \frac{q_1}{q_2} > 1,\\ (0,u_{max}), & \frac{q_1}{q_2} < 1,\\ (\hat{u^*}_1,\hat{u^*}_2), & \hat{u^*}_1 + \hat{u^*}_2 = u_{max},\\ \frac{q_1}{q_2} = 1.\end{cases}$$

Очевидно, с экономической точки зрения, если некоторое $q_i < 0$, то это означает, что инвестирование в фонды на данном уровне эффективности i нецелесообразно. В случае, когда $q_i > 0$, $i = 1,2$, распределение инвестиций определяется соотношением $\frac{q_1}{q_2}$, которое показывает, вложения в какой уровень обеспечат большую прибыль. В такой доминирующий уровень оптимально инвестировать все доступные средства. Если $q_1 = q_2$, т. е. уровни равнозначны, то конкретное распределение (u_1^*,u_2^*), где $u_1^* + u_2^* = u_{max}$, не имеет значения, поскольку прибыль будет одинакова. Следует заметить, что на практике случаи равенства $q_1 = q_2$, $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ невозможны хотя бы потому, что в экономике все величины вычисляются приближенно. Таким образом, при дальнейшем анализе откажемся от рассмотрения этих случаев. Вид решения (6), (14) не позволяет использовать его для дальнейшего уточнения оптимального управления.

Исследуем динамику системы при u, принимающем одно из значений, которое дается принципом максимума Понтрягина, т. е. определяемое по формуле (15). Для этого рассмотрим системы, получаемые при возможных значениях оптимального управления $u^* = (u_1^*,u_2^*)$. Рассмотрим первый случай $u^* = (0,0)$. Имеем

$$\begin{cases}\dot{x_1} = -\delta_1x_1 + (1-\varphi_1)x_1,\\ \dot{x_2} = -\delta_2x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1.\end{cases} \tag{16}$$

При $u^* = (0,u_{max})$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x_1} = -\delta_1x_1 + (1-\varphi_1)x_1\\ \dot{x_2} = u_{max} - \delta_2x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1.\end{cases} \tag{17}$$

Если $u^* = (u_{max},0)$, то система имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x_1} = u_{max} - \delta_1x_1 + (1-\varphi_1)x_1\\ \dot{x_2} = -\delta_2x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1.\end{cases} \tag{18}$$

Таким образом, для каждого возможного значения оптимального управления $u^* = (u_1^*,u_2^*)$ получаем положение равновесия соответствующей системы

$$(x_1^*,x_2^*) = \begin{cases}(0,0), \quad (u_1^*,u_2^*) = (0,0),\\ (0,\frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1}), \quad (u_1^*,u_2^*) = (0,u_{max}),\\ (\frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1},\frac{u_{max}\varphi_1}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}),\\ (u_1^*,u_2^*) = (u_{max},0).\end{cases}$$

Исследуем полученные равновесия на предмет глобальной устойчивости. Для этого используем теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению. Поскольку u_i^* – константы во всех случаях, то матрица Якоби f' для каждого оптимального управления u^* имеет вид

$$f' = \begin{pmatrix}-\delta_1-\varphi_1+1 & 0\\ \varphi_1 & -\delta_2-\varphi_2+1\end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа: $\lambda_1 = -\delta_1 - \varphi_1 + 1 < 0$, $\lambda_2 = -\delta_2 - \varphi_2 + 1 < 0$. Следовательно, поскольку системы (16)–(18) линейны, каждое из равновесий (x_1^*, x_2^*), соответствующее своим значениям оптимального управления $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, глобально асимптотически устойчиво.

Исходя из вышесказанного, имеем динамику системы следующего вида: при каждом оптимальном $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ траектория будет приближаться к своему глобально устойчивому равновесию $(x_1^*(u^*), x_2^*(u^*))$, положение которого будет изменяться при переключении управления согласно формуле (15).

Рассмотрим систему с переменной структурой при условии (15) следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_{1j}^* - \delta_1 x_1 + (1-\varphi_1)x_1 \\ \dot{x_2} = u_{2j}^* - \delta_2 x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1, \\ j = 1,2,3. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} (u_{11}^*, u_{21}^*) = (0,0) \\ (u_{12}^*, u_{22}^*) = (0, u_{max}) \\ (u_{13}^*, u_{23}^*) = (u_{max}, 0). \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 1 (об инвариантном множестве)**.** *Система (19) при любом из условий (20) имеет инвариантное множество* $\Pi = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, 0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}\}$.

Замечание 3. Смысл теоремы 1 состоит в том, что хотя мы не знаем моменты переключения системы, мы можем определить, где сосредоточено движение системы (множество П). Таким образом, мы локализовали движение, т. е. оптимальную траекторию. На практике крайне затруднительно реализовать конкретные моменты переключения в экономических системах, следовательно, невозможно реализовать оптимальную траекторию, и тем самым мы получаем неоптимальное движение. Однако, согласно теореме 1, при любых моментах переключения движение находится в П.

Доказательство. Поскольку $\dot{x}_1 < 0$ при $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$ для любого управления u^*, траектории пересекают прямую $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$ справа налево (в направлении убывания x_1). Значит, все траектории входят в полосу $x_1 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$ и не выходят из нее. Кроме того, поскольку $\dot{x}_1 < 0$ при $x_1 = R_1$ для любой постоянной $R_1 \geqslant \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$, траектории входят в любую полосу $x_1 \leqslant R$ и не выходят из нее. Следовательно, полоса $x_1 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$ является притягивающим множеством.

Рассмотрим поведение траекторий внутри данной полосы. Найдем точки пересечения прямой $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}$ с изоклиной $\dot{x}_2 = 0$ при различном оптимальном управлении:

- при $(u_1^*, u_2^*) = (0,0)$:
  $Q_1 = (\frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)})$;
- при $(u_1^*, u_2^*) = (0, u_{max})$:
  $Q_2 = (\frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)})$;
- при $(u_1^*, u_2^*) = (u_{max}, 0)$:
  $Q_3 = (\frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}) = Q_1$.

Значит, наивысшая точка пересечения (с наибольшим x_2) – это точка $Q_2 = (\frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)})$. Рассмотрим поведение траекторий на прямой $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}$. Очевидно, данная прямая находится выше всех возможных изоклин $\dot{x}_2 = 0$, за исключением единственной точки Q_2 ее пересечения с изоклиной $x_2 = \frac{u_{max}+\varphi_1 x_1}{\delta_2+\varphi_2-1}$ (при $(u_1^*, u_2^*) = (0, u_{max})$). Следовательно, при $x_1 \in [0, \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}]$ имеем $\dot{x}_2 < 0$ при $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}$, что означает, что все траектории пересекают прямую $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}$ сверху вниз (в направлении убывания x_2). Рассмотрим отдельно точку Q_2. Имеем $\dot{x}_1(Q_2) < 0$, $\dot{x}_2(Q_2) = 0$, следовательно, получаем движение по прямой $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}$ в направлении убывания x_1. Кроме того, $\dot{x}_2 < 0$ при $x_2 = R_2$ для любой постоянной $R_2 \geqslant \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)}$. Следовательно, траектории входят в любое множество $\Pi(R_1, R_2) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant R_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant R_2\}$ и не выходят из него.

Таким образом, множество

$$\Pi = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_1+\varphi_1-1}, \right.$$
$$\left. 0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{u_{max}}{\delta_2+\varphi_2-1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1+\varphi_1-1)(\delta_2+\varphi_2-1)} \right\}$$

является инвариантным и притягивающим. □

Естественно, модель (6)–(10) функционирует на конечном промежутке времени. Это связано с тем, что коэффициенты δ_i, φ_i, a_i, b_i, c_i определяются конкретными экономическими условиями и технологиями. Но бесконечный промежуток времени управления позволяет управлять так, что к концу промежутка существования модели (6)–(10) экономическая система имеет некоторый объем ресурсов для дальнейшего развития и реструктуризации, которая приводит к изменению указанных коэффициентов. Получим оценку прибыли начиная с достаточно большого момента времени, которую можно использовать при решении вопроса о реструктуризации.

Покажем, что функционал $J \leqslant \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого момента T. Представим J в виде $J = J_1 + J_2$, где

$$J_i = \int\limits_T^{+\infty} e^{-\rho t}[a_i(1-\varphi_i)x_i(t) - b_i(1-\varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t)]dt,$$

$i = 1, 2$. Слагаемые J_1, J_2 относятся к первому и второму уровням эффективности соответственно.

Замечание 4. В данной работе исследуется случай, когда получаемая прибыль положительна ($J > 0$). Случай убыточного производства ($J < 0$) не рассматривается.

Обозначим $k_i = \delta_i + \varphi_i - 1 > 0$. Напомним,

$$x_1(t) = e^{-k_1 t}(x_1^0 + \int\limits_0^t (u_1(\tau)e^{k_1\tau}d\tau)),$$

$$x_2(t) = e^{-k_2 t}(x_2^0 + \int\limits_0^t (u_2(\tau_1) + \varphi_1 e^{-k_1\tau_1} \times \left(x_1^0 + \int\limits_0^{\tau_1} u_1(\tau_2)e^{k_1\tau_2}d\tau_2)) e^{k_2\tau_1}d\tau_1 \right).$$

Таким образом, имеем

$$J_1 = \int\limits_T^{+\infty} e^{-\rho t}\left[e^{-k_1 t}a_1(1-\varphi_1)\left(x_1^0 + \int\limits_0^t u_1 e^{k_1\tau}d\tau\right) - c_1 u_1 - e^{-2k_1 t}b_1(1-\varphi_1)^2\left(x_1^0 + \int\limits_0^t u_1 e^{k_1\tau}d\tau\right)^2\right]dt$$
$$\leqslant \int\limits_T^{+\infty} e^{-\rho t}e^{-k_1 t}a_1(1-\varphi_1)\left(x_1^0 + \int\limits_0^t u_1 e^{k_1\tau}d\tau\right)dt \leqslant \int\limits_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_1)t}a_1(1-\varphi_1)\left(x_1^0 + u_{max}\int\limits_0^t e^{k_1\tau}d\tau\right)dt$$
$$= \int\limits_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_1)t}a_1(1-\varphi_1)\left(x_1^0 + u_{max}\left(\frac{e^{k_1 t}-1}{k_1}\right)\right)dt$$
$$= a_1(1-\varphi_1)\left(\frac{x_1^0}{\rho+k_1}e^{-(\rho+k_1)T} + \frac{u_{max}}{\rho k_1}e^{-\rho T} - \frac{u_{max}}{k_1(\rho+k_1)}e^{-(\rho+k_1)T}\right)$$
$$= a_1(1-\varphi_1)e^{-\rho t}\left(\frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho+k_1)}e^{-k_1 T} + \frac{u_{max}}{\rho k_1}\right) \leqslant a_1(1-\varphi_1)e^{-\rho t}\left(\frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho+k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_1}\right) \leqslant \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Имеем $J_1 \leqslant \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при $T \geqslant T_1 = -\frac{1}{\rho}\ln\frac{\varepsilon}{a_1(1-\varphi_1)\left(\frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho+k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_1}\right)}$.

$$J_2 \leqslant \int\limits_T^{+\infty} e^{-\rho t}e^{-k_2 t}a_2(1-\varphi_2)\left[x_2^0 + \int\limits_0^t \left(u_2 + \varphi_1 e^{-k_1\tau_1}\left(x_1^0 + \int\limits_0^{\tau_1} u_1 e^{k_1\tau_2}d\tau_2\right)e^{k_2\tau_1}\right)d\tau_1\right]dt$$
$$\leqslant a_2(1-\varphi_2)\int\limits_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_2)t}\left(x_2^0 + \int\limits_0^t \left(u_{max} + \varphi_1 e^{-k_1\tau_1}(x_1^0 + u_{max}\int\limits_0^{\tau_1}(e^{k_1\tau_2}d\tau_2)e^{k_2\tau_1})d\tau_1\right)\right)dt$$
$$= a_2(1-\varphi_2)\left(\frac{x_2^0}{\rho+k_2}e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{u_{max}}{\rho k_2}e^{-\rho T} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho+k_2)}e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)}e^{-(\rho+k_1)T}\right.$$
$$\left. - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)}e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho}e^{-\rho T} - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2-k_1)(\rho+k_1)e^{-(\rho+k_1)T}}\right)$$

$$
= a_2(1-\varphi_2)e^{-\rho T}\left(e^{-k_2 T}\left(\frac{x_2^0}{\rho+k_2} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho+k_2)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)}\right)\right.
$$

$$
\left. + e^{-k_1 T}\left(\frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)} - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2-k_1)(\rho+k_1)}\right) + \frac{u_{max}}{\rho k_2} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho}\right)
$$

$$
\leqslant a_2(1-\varphi_2)e^{-\rho T}\left(\frac{x_2^0}{\rho+k_2} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho+k_2)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)} + \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)}\right.
$$

$$
\left. - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2-k_1)(\rho+k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_2} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho}\right) \leqslant \varepsilon
$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Имеем $J_2 \leqslant \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при

$$
T \geqslant T_2 = -\frac{1}{\rho}\ln\frac{\varepsilon}{a_2(1-\varphi_2)\left(\frac{k_2 x_2^0 - u_{max}}{k_2(\rho+k_2)} + \frac{(k_1+\varphi_1)u_{max}}{\rho k_1 k_2} - \frac{k_1\varphi_1 x_1^0 + \varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2-k_1)(\rho+k_1)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2-k_1)(\rho+k_2)}\right)}.
$$

Получаем $J \leqslant \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при $T \geqslant \max(T_1, T_2)$.

Задача о выживаемости экономической системы

Поставим задачу о выживаемости двухуровневой экономической системы. Выживаемость экономической системы означает, что ни один из уровней эффективности не исчезает, т. е. объем фондов на каждом уровне должен быть отделен от нуля в любой момент времени. Таким образом, на управление накладывается дополнительное ограничение, обеспечивающее выживаемость системы.

Обозначим $\widetilde{x}_i = const > 0$ минимально допустимый объем производственных фондов на i-м уровне. Тогда получаем задачу о выживаемости следующего вида:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = u_1 - \delta_1 x_1 + (1-\varphi_1)x_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2), \\
\dot{x_2} = u_2 - \delta_2 x_2 + (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1 \\
= f_2(x_1, x_2, u_1, u_2),
\end{cases}
$$

$$
\begin{gathered}
x_i(t) \geqslant \widetilde{x}_i, \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \\
x_i(0) = x_i^0 \geqslant \widetilde{x}_i, \quad i = 1, 2, \\
u = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \\
y_1 + y_2 \leqslant u_{max}, y_i \geqslant 0, i = 1, 2\}, \\
0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти такое управление $u = (u_1, u_2)$, при котором траектория не выходит из множества $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i(t) \geqslant \widetilde{x}_i, t \geqslant 0, i = 1, 2\}$, т. е. множество X должно быть инвариантным. Для этого необходимо, чтобы все траектории пересекали границу ∂X снаружи внутрь. Это означает, что вектор скорости f должен составлять острый угол с каждой нормалью n_i на границе ∂X, т. е. скалярное произведение каждой нормали на вектор правых частей $(n_i, f) > 0, i = 1, 2$.

$$
\begin{gathered}
(n_1, f) = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2) = u_1 - \delta_1 \widetilde{x}_1 \\
+ (1-\varphi_1)\widetilde{x}_1 > 0.
\end{gathered}
$$

Получаем $u_1 > \widetilde{x}_1(\delta_1 + \varphi_1 - 1) = \widetilde{u}_1$.

$$
\begin{gathered}
(n_2, f) = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) = u_2 - \delta_2 x_2 \\
+ (1-\varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1 > 0.
\end{gathered}
$$

Получаем $u_2 > \widetilde{x}_2(\delta_2 + \varphi_2 - 1) - \varphi_1 x_1$. Поскольку $\varphi_1 x_1 > 0$, можно рассматривать условие $u_2 > \widetilde{x}_2(\delta_2 + \varphi_2 - 1) = \widetilde{u}_2$. Учитывая ограничение (21), имеем следующую область допустимых управлений, обеспечивающих выживаемость $U_v = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \widetilde{u}_1 \leqslant u_1 \leqslant u_{max} - \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_2 \leqslant u_2 \leqslant u_{max} - \widetilde{u}_1\}$.

Обобщим задачу о выживаемости, рассмотрев систему из n уровней эффективности вида

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = u_1 - \delta_1 x_1 + (1-\varphi_1)x_1 = f_1(x, u), \\
\dot{x_i} = u_i - \delta_i x_i + (1-\varphi_i)x_i + \varphi_{i-1}x_{i-1} \\
= f_i(x, u),
\end{cases}
$$

$$
\begin{gathered}
x = (x_1, \ldots, x_n), u = (u_1, \ldots, u_n), \\
x_i(t) \geqslant \widetilde{x}_i, \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\
x_i(0) = x_i^0 \geqslant \widetilde{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\
u = (u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in U = \left\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\right. \\
\left.\sum_{i=1}^n y_i \leqslant u_{max}, y_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\right\},
\end{gathered} \tag{22}
$$

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Требуется найти такое управление $u = (u_1, \ldots, u_n)$, при котором траектория не выходит из множества $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i(t) \geqslant \widetilde{x}_i, t \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\}$, т. е. множество X должно быть инвариантным. Для этого необходимо, чтобы все траектории пересекали ∂X снаружи внутрь. Это означает, что вектор скорости f должен составлять острый угол с каждой нормалью n_i на границе ∂X, т. е. скалярное произведение каждой нормали на вектор правых частей $(n_i, f) > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$$(n_1, f) = f_1(x, u) = u_1 - \delta_1 \widetilde{x}_1 + (1 - \varphi_1)\widetilde{x}_1 > 0.$$

Получаем $u_1 > \widetilde{x}_1(\delta_1 + \varphi_1 - 1) = \widetilde{u}_1$.

$$(n_i, f) = f_i(x, u) = u_i - \delta_i x_i + (1 - \varphi_i) x_i + \varphi_{i-1} x_{i-1} > 0.$$

Получаем $u_i > \widetilde{x}_i(\delta_i + \varphi_i - 1) - \varphi_{i-1} x_{i-1}$. Поскольку $\varphi_{i-1} x_{i-1} > 0$, можно рассматривать условие $u_i > \widetilde{x}_i(\delta_i + \varphi_i - 1) = \widetilde{u}_i$. Учитывая ограничение (22), имеем следующую область допустимых управлений, обеспечивающих выживаемость:

$$U_v = \Bigg\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \widetilde{u}_1 \leqslant u_1 \leqslant u_{max} - \sum_{j=2}^{n} \widetilde{u}_i, \widetilde{u}_i \leqslant u_i \leqslant u_{max} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \widetilde{u}_i, i = 1, \ldots, n\Bigg\}.$$

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой фондов с двумя уровнями эффективности на бесконечном времени. Для решения поставленной задачи используется принцип максимума Понтрягина. Показано существование оптимального управления. Получены и проанализированы необходимые условия оптимальности управления. Проведен качественный анализ динамической системы с произвольным переключением управления, принимающего значения (20). Для каждого значения оптимального управления показана глобальная устойчивость соответствующего положения равновесия. Найдено инвариантное множество для исследуемой системы с переменной структурой. Получена оценка момента времени, начиная с которого прибыль будет сколь угодно мала. Поставлена задача о выживаемости экономической системы для двух и произвольного числа уровней эффективности. Найдены допустимые управления, обеспечивающие выживаемость.

Литература

1. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН имени В. А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 3–271.

2. *Гельман Л. М., Левин М. И., Полтерович В. М., Спивак В. А.* Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29, № 3. С. 460–469.

3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

4. *Полтерович В. М.* Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 2. С. 3–19. doi: 10.1007/s11135-017-0624-2

5. *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. № 24. С. 1071–1083.

6. *Хенкин Г. М., Шананин А. А.* Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 193–201.

References

1. *Aseev S. M., Kryazhimskii A. V.* The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Trudy MIAN imeni V. A. Steklova = Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2007;257(3):3–271. (In Russ.)

2. *Gelman L. M., Levin M. I. Polterovich V. M., Spivak V. A.* Modeling of the dynamics of the enterprises distribution by efficiency levels (on an example of ferrous metallurgy). *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods.* 1993;29(3):460–469. (In Russ.)

3. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. Moscow: Nauka; 1972. 576 p. (In Russ.)

4. *Polterovich V. M.* The theory of endogenous economic growth and equations of mathematical physics. *Zhurnal Novoi ekonomicheskoi assotsiatsii = The Journal of the New Economic Association.* 2017;2(34):193–201. (In Russ.)

5. *Polterovich V. M., Henkin G. M.* Evolutionary model of the interaction of creating and borrowing technologies processes. *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods.* 1988;24:1071–1083. (In Russ.)

6. *Henkin G. M., Shananin A. A.* Mathematical modeling of the Schumpeterian dynamics of innovation. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations.* 2014;26(8):3–19. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 28.03.2022; принята к публикации / accepted: 11.05.2022.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Сазонов Александр Михайлович
канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

e-mail: sazon-tb@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Sazonov, Alexander
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher