Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 30–36
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2022. No. 4. P. 30–36
DOI: 10.17076/mat1561

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.21, 515.12

О РАЗМЕРНОСТЯХ ФИНИТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ФУНКТОРАХ, СОХРАНЯЮЩИХ ε-СЕТИ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Размерность финитной аппроксимации $\dim_{\mathcal{F}} \xi$ определена для любой точки ξ пространства вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ – метризуемый полунормальный функтор, а X – метрический компакт. Такими точками могут быть замкнутые подмножества, вероятностные меры, максимальные сцепленные системы замкнутых множеств и т. д. Проведенные исследования показывают, что для многих функториальных конструкций общей топологии (функторов экспоненты, вероятностных мер, суперрасширения и др.) размерность финитной аппроксимации $\dim_{\mathcal{F}} \xi$ не превосходит емкостной размерности $\dim_B$ носителя $\mathrm{supp}(\xi)$ данной точки. В связи с этим естественно возникает задача описания класса функторов, для которых выполняется указанное ограничение на размерность финитной аппроксимации. В работе введено понятие метризуемого функтора, сохраняющего ε-сети. Условие сохранения ε-сетей функтором $\mathcal{F}$ оказывается достаточным для выполнения неравенства $\dim_{\mathcal{F}} \xi \leqslant \dim_B(\mathrm{supp}(\xi))$ для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$. Доказано, что ряд известных метризуемых функторов сохраняет ε-сети.

Ключевые слова: полунормальный функтор; метризуемый функтор; размерность финитной аппроксимации; емкостная размерность; размерность квантования

Для цитирования: Иванов А. В. О размерностях финитной аппроксимации и функторах, сохраняющих ε-сети // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 30–36. doi: 10.17076/mat1561

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. V. Ivanov. ON DIMENSIONS OF FINITE APPROXIMATION AND FUNCTORS PRESERVING ε-NETS

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

The dimension of finite approximation $\dim_{\mathcal{F}} \xi$ is defined for any point ξ of the space $\mathcal{F}(X)$, where $\mathcal{F}$ is a metrizable seminormal functor and X is a metric compactum. Such points can represent closed subsets, probability measures, maximal linked systems of closed sets, etc. The analysis shows that for many functorial constructions of general topology (exponential functor, probability measures functor, superextension functor, etc.) the dimension of finite approximation $\dim_{\mathcal{F}} \xi$ does not exceed the box dimension $\dim_B$ of the support $\mathrm{supp}(\xi)$ of this point. In this connection, the problem naturally arises of how to describe the class of functors for which the indicated restriction on the dimensionality of the finite approximation holds. This paper introduces the notion of a metrizable functor that preserves ε-nets. The condition that ε-nets be preserved by the functor $\mathcal{F}$ proved to be sufficient for the inequality $\dim_{\mathcal{F}} \xi \leqslant \dim_B(\mathrm{supp}(\xi))$ for any point $\xi \in \mathcal{F}(X)$. It is proved that a number of well-known metrizable functors preserve ε-nets.

Keywords: seminormal functor; metrizable functor; dimension of finite approximation; box dimension; quantization dimension

For citation: Ivanov A. V. On dimensions of finite approximation and functors preserving ε-nets. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2022;4:30–36. doi: 10.17076/mat1561

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Введение

Размерность финитной аппроксимации $\dim_{\mathcal{F}} \xi$ определена для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ – метризуемый полунормальный функтор в категории компактов и непрерывных отображений, а X – метрический компакт. Функтор $\mathcal{F}$ называется полунормальным, если он сохраняет точку и пустое множество, мономорфен, сохраняет пересечения и непрерывен в смысле Е. В. Щепина. Если $\mathcal{F}$ – полунормальный функтор, то для любого замкнутого подмножества A компакта X пространство $\mathcal{F}(A)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(X)$, т. е. можно считать, что $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$. Для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определен ее носитель $\mathrm{supp}(\xi)$ как наименьшее (по включению) замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Для $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |\mathrm{supp}(\xi)| \leqslant n\}.$$

Известно, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$ и $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$. Доказательство всех этих фактов дано в работе [10].

Полунормальный функтор $\mathcal{F}$ называется метризуемым (по В. В. Федорчуку [6]), если для любого метрического компакта (X, ρ) существует продолжение $\rho_{\mathcal{F}}$ метрики ρ на $\mathcal{F}(X)$ (сохраняющее диаметр X), при котором под действием функтора $\mathcal{F}$ сохраняются изометрические вложения. В дальнейшем речь идет только о функторах бесконечной степени, для которых $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого бесконечного компакта X.

Пусть (X, ρ) – метрический компакт. Для каждой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ положим

$$N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leqslant \varepsilon\}. \quad (1)$$

Если $\xi \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$, то число $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность финитной аппроксимации точки ξ

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}. \quad (2)$$

Размерность $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ определяет «точку переключения» предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N(\xi, \varepsilon)\varepsilon^{\alpha}$$

– при $\alpha < \dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ этот предел равен бесконечности, а при $\alpha > \dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ он равен нулю.

Заметим, что предел в формуле (2) может не существовать. Тогда мы рассматриваем верхний или нижний пределы и получаем, соответственно, верхнюю $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ или нижнюю $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ размерности финитной аппроксимации точки ξ.

Определение размерности финитной аппроксимации позволяет установить общую функториальную природу таких известных математических понятий, как емкостная размерность $\dim_B X$ метрического компакта X и размерность квантования $D(\mu)$ вероятностной меры μ. Оказывается, что емкостная размерность $\dim_B F$ любого замкнутого подмножества $F \subset X$ совпадает с размерностью финитной аппроксимации $\dim_{\exp}(F)$, определенной для функтора экспоненты $\exp$ с метрикой Хаусдорфа, а размерность квантования вероятностной меры является размерностью финитной аппроксимации для функтора вероятностных мер P с метрикой Канторовича–Рубинштейна. Свойства емкостной размерности и размерности квантования подробно изучены (см. [5] и [11]). Размерности финитной аппроксимации для функторов суперрасширения и идемпотентных (вероятностных) мер рассматривались в работах [4] и [13] соответственно. Для всех указанных функторов выполняется общее неравенство

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) \leqslant \dim_B(\mathrm{supp}(\xi)) \quad (3)$$

для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$. В связи с этим встает вопрос о справедливости неравенства (3) для любого метризуемого функтора. Надо заметить, что определение метризуемости налагает весьма слабые ограничения на функтор, поэтому представляет интерес формулировка дополнительных требований на функтор $\mathcal{F}$, которые гарантируют выполнение неравенства (3).

В работе предложено условие сохранения ε-сетей, имеющее естественную формулировку: метризуемый функтор $\mathcal{F}$ сохраняет ε-сети, если для любой ε-сети A подмножества $B \subset X$ множество $\mathcal{F}(A)$ является ε-сетью для $\mathcal{F}(B)$. Это условие можно ослабить, а именно, требовать, чтобы множество $\mathcal{F}(A)$ было $p\varepsilon$-сетью для $\mathcal{F}(B)$, где $p \geqslant 1$ – некоторая константа, зависящая от $\mathcal{F}$. Показано, что данное условие является достаточным для выполнения неравенства (3). Установлено, что все упомянутые выше функторы сохраняют ε-сети.

Предварительные определения

Определение 1 (В. В. Федорчук [6]). Полунормальный функтор $\mathcal{F}$ называется метризуемым, если для любого метрического компакта (X, ρ) может быть указана совместимая с топологией метрика $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ так, что выполняются следующие условия:

1) для любого изометрического вложения $i : (X_1, \rho_1) \to (X_2, \rho_2)$ отображение $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$ также является изометрическим вложением;

2) $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$;

3) $\mathrm{diam}(X) = \mathrm{diam}(\mathcal{F}(X))$.

При этом семейство метрик $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$ по определению задает метризацию функтора $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ – метризуемый функтор и (X, ρ) – метрический компакт, то согласно формуле (1) для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ определено число $N(\xi, \varepsilon)$.

Определение 2 (см. [3] и [12]). Размерностями финитной аппроксимации (верхней $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ и нижней $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$) точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ называются следующие величины:

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что всегда $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \geqslant \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$. В случае выполнения равенства $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ используется обозначение $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$.

Приведем необходимые сведения о конкретных функторах, которые рассматриваются в работе.

Функтор exp. Для компакта X через $\exp X$ обозначается пространство непустых замкнутых подмножеств X с топологией Вьеториса. Каждому непрерывному отображению компактов $f : X \to Y$ соответствует непрерывное отображение $\exp(f) : \exp X \to \exp Y$, действующее по правилу: $\exp(f)(A) = f(A)$, где $A \in \exp X$. Для метрического компакта (X, ρ) на $\exp X$ определена метрика Хаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(F, G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G, \varepsilon), G \subset B(F, \varepsilon)\}, \quad (4)$$

где $B(F, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, F) \leqslant \varepsilon\}$ – замкнутый ε-шар множества F (аналогично через $B(x, \varepsilon)$ мы обозначаем замкнутый ε-шар точки $x \in X$). Известно [5], что семейство метрик $\{\rho_H\}$ задает метризацию функтора exp.

Напомним, что подмножество $A \subset X$ метрического компакта называется ε-сетью для $F \subset X$, если $B(A, \varepsilon) \supset F$. Нетрудно показать, что для любого $F \in \exp X$ число $N(F, \varepsilon)$ равно наименьшему количеству точек в ε-сети для F, откуда сразу следует [4] совпадение размерностей финитной аппроксимации для функтора exp с классическими емкостными размерностями:

$$\overline{\dim}_{\exp}(F) = \overline{\dim}_B F, \ \underline{\dim}_{\exp}(F) = \underline{\dim}_B F.$$

Для любого $F \in \exp X$ носителем $\mathrm{supp}(F)$ является само множество F. Следовательно, для функтора exp неравенство (3) выполняется.

Функтор вероятностных мер P. Через $P(X)$ обозначается множество вероятностных мер на компакте X, наделенное слабой* топологией. Если вероятностную меру μ отождествить (согласно теореме Рисса) с функционалом $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, действующим на пространстве $C(X)$ непрерывных функций на X по формуле $\mu(g) = \int g \, d\mu$, то для любого непрерывного отображения компактов $f : X \to Y$ образ $P(f)(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ при отображении $P(f) : P(X) \to P(Y)$ определяется по формуле: $P(f)(\mu)(g) = \mu(g \circ f)$, где $g \in C(Y)$. Для метрического компакта (X, ρ) на $P(X)$ определена совместимая с топологией метрика Канторовича – Рубинштейна ρ_P:

$$\rho_P(\mu.\nu) = \sup\{|\mu(g) - \nu(g)| : g \in \mathrm{Lip}_1(X)\},$$

где $\mathrm{Lip}_c(X)$ – множество вещественных функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой c. Известно [6], что семейство метрик $\{\rho_P\}$ определяет метризацию функтора P. В [3] показано, что размерность финитной аппроксимации $\dim_P(\mu)$ меры μ совпадает с размерностью квантования $D(\mu)$, определенной в рамках теории квантования вероятностных мер [11].

Носителем меры $\mu \in P(X)$ является наименьшее (по включению) замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\mu(A) = 1$. Известно, что

$$\begin{aligned} \overline{D}(\mu) &\leqslant \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)), \\ \underline{D}(\mu) &\leqslant \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)) \end{aligned} \qquad (5)$$

(см. [3], для мер в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем – [11]).

Функтор идемпотентных мер I. Для $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначается постоянная функция на X со значением c.

Определение 3 (см. [1]). Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется идемпотентной (вероятностной) мерой, определенной на компакте X, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$

1) $\mu(c_X) = c$;

2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;

3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X, наделенное слабой* топологией, всегда является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $f : X \to Y$ отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$ определяется по схеме приведенного выше определения отображения $P(f)$. Как показал М. Заричный [1], функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина (в частности, функтор I полунормален).

Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \to \mathbb{R}_{\max}$ по формуле $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leqslant 0_X,\ f(x) = 0\}$, где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную идемпотентную меру μ:

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \qquad (6)$$

где $f \in C(X)$. (Формула (6) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X). И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \to \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (6) определяет идемпотентную меру μ_g:

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [8]). Носителем идемпотентной меры μ является множество

$$\mathrm{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

В работе Л. Базилевич, Д. Реповша и М. Заричного [9] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определена метрика ρ_I. В [13] показано, что семейство $\{\rho_I\}$ задает метризацию функтора I. Метрика ρ_I строится в [9] с помощью семейства непрерывных псевдометрик ρ_n $(n \in \mathbb{N})$, определение которых аналогично определению метрики Канторовича – Рубинштейна на $P(X)$:

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \mathrm{Lip}_n(X)\},$$

где $\mu, \nu \in I(X)$. По определению

$$\rho_I(\mu, \nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(\mu, \nu)}{n 2^n}. \qquad (7)$$

Размерности финитной аппроксимации идемпотентных мер, определенные по метризации $\{\rho_I\}$, в работе [13] были названы размерностями квантования (по аналогии с вероятностными мерами) и обозначены через $D_I(\mu)$.

Для размерностей квантования идемпотентных мер имеют место неравенства, аналогичные (5) (см. [13]):

$$\overline{D}_I(\mu) \leqslant \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)),$$

$$\underline{D}_I(\mu) \leqslant \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)).$$

Функтор суперрасширения. Система замкнутых подмножеств компакта X называется сцепленной, если любые два ее элемента пересекаются. Любая максимальная (по включению) сцепленная система (мсс) замкнутых подмножеств компакта X является точкой пространства $\exp(\exp X)$. Таким образом, множество λX максимальных сцепленных систем является подмножеством $\exp(\exp X)$ и может быть наделено топологией подпространства. Для любого компакта X пространство λX также компактно. Если (X, ρ) – метрический компакт, то на $\exp(\exp X)$ определена метрика Хаусдорфа $(\rho_H)_H$, ограничение которой на $\lambda(X)$ обозначается через ρ_λ. Известно, что

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi\ B(F, \varepsilon) \in \eta\}.$$

Для непрерывного отображения компактов $f : X \to Y$ отображение $\lambda(f) : \lambda(X) \to \lambda(Y)$ определяется по правилу: $\lambda(f)(\xi)$ есть единственная мсс в Y, содержащая сцепленную систему $\{f(F) : F \in \xi\}$. Носитель мсс $\xi \in \lambda(X)$ есть наименьшее (по включению) замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого система $\{F \cap A : F \in \xi\}$ является сцепленной. Функтор λ является метризуемым полунормальным функтором с метризацией $\{\rho_\lambda\}$ (см. [6, 7]).

В [4] показано, что для размерностей финитной аппроксимации максимальных сцепленных систем $\xi \in \lambda X$ выполняются неравенства (3):

$$\overline{\dim}_\lambda(\xi) \leqslant \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)),$$

$$\underline{\dim}_\lambda(\xi) \leqslant \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)).$$

Метризуемые функторы, сохраняющие ε-сети

Определение 4. Будем говорить, что полунормальный метризуемый функтор $\mathcal{F}$ с метризацией $\{\rho_\mathcal{F}\}$ сохраняет ε-сети, если существует константа $p \geqslant 1$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$, любого метрического компакта (X, ρ), любого его замкнутого подмножества A и любой замкнутой ε-сети B для A множество $\mathcal{F}(B)$ является $p\varepsilon$-сетью для $\mathcal{F}(A)$ в $\mathcal{F}(X)$.

Теорема 1. *Если полунормальный метризуемый функтор $\mathcal{F}$ с метризацией $\{\rho_\mathcal{F}\}$ сохраняет ε-сети, то для любого метрического компакта (X, ρ) и любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ имеют место неравенства:*

$$\overline{\dim}_\mathcal{F}(\xi) \leqslant \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)),$$

$$\underline{\dim}_\mathcal{F}(\xi) \leqslant \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)).$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и $\mathrm{supp}(\xi) = A \in \exp X$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $n = N(A, \varepsilon)$ (речь здесь идет о числе N для функтора exp). Тогда существует $D \in \exp_n X$, для которого $\rho_H(A, D) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $A \subset B(D, \varepsilon)$[1], т. е. D является ε-сетью для A. При этом $|D| \leqslant n$. В силу условий, наложенных на функтор $\mathcal{F}$, множество $\mathcal{F}(D)$ является $p\varepsilon$-сетью для $\mathcal{F}(A)$ в $\mathcal{F}(X)$, где p – константа из определения 4. Поскольку $\xi \in \mathcal{F}(A)$, в $\mathcal{F}(D)$ найдется точка η, для которой $\rho_\mathcal{F}(\xi, \eta) \leqslant p\varepsilon$. Следовательно, $\rho_\mathcal{F}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leqslant p\varepsilon$, и значит, $N(\xi, p\varepsilon) \leqslant n = N(A, \varepsilon)$.

Имеем:

$$\overline{\dim}_\mathcal{F}(\xi) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

$$= \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\xi, p\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

$$= \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)).$$

Неравенство для нижних размерностей доказывается аналогично. $\square$

Для вероятностной меры $\mu \in P(X)$ известна следующая формула [3], выражающая расстояние ρ_P от μ до $P(A)$, где A – произвольное конечное подмножество X:

$$\rho_P(\mu, P(A)) = \mu(\rho(x, A)) = \int_X \rho(x, A)\, d\mu.$$

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Предложение. Для любой меры $\mu \in P(X)$ и любого замкнутого подмножества A метрического компакта X имеет место равенство

$$\rho_P(\mu, P(A)) = \mu(\rho(x, A)).$$

Доказательство. Заметим, что функция $\rho(x, A)$ принадлежит множеству $\mathrm{Lip}_1(X)$. Интеграл от функции $\rho(x, A)$ по любой мере $\nu \in P(A)$ равен нулю, поскольку $\rho(x, A) = 0$ при $x \in A$. Следовательно,

$$\rho_P(\mu, \nu) \geqslant |\mu(\rho(x, A)) - \nu(\rho(x, A))| = \mu(\rho(x, A)).$$

Докажем обратное неравенство. Пусть F – конечная ε-сеть для A, причем $F \subset A$. Покажем, что

$$\rho(x, F) \leqslant \rho(x, A) + \varepsilon.$$

Возьмем точку $a \in A$, для которой $\rho(x, a) = \rho(x, A)$. Существует точка $b \in F$ такая, что $\rho(a, b) \leqslant \varepsilon$. Имеем $\rho(x, F) \leqslant \rho(x, b) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, b) \leqslant \rho(x, A) + \varepsilon$, что и требовалось.

Поскольку $P(F) \subset P(A)$ и утверждение предложения выполняется для конечных множеств, мы получаем

$$\begin{gathered}\rho_P(\mu, P(A)) \leqslant \rho_P(\mu, P(F)) \\ = \mu(\rho(x, F)) \leqslant \mu(\rho(x, A)) + \varepsilon.\end{gathered} \tag{8}$$

Неравенство (8) выполняется для любого ε. Следовательно, $\rho_P(\mu, P(A)) \leqslant \mu(\rho(x, A))$. $\square$

Теорема 2. *Функторы* exp, *P, I и λ сохраняют ε-сети. Для всех этих функторов $p = 1$.*

Доказательство. **Функтор exp.** Пусть A, B – замкнутые подмножества X, B – ε-сеть для A и $F \in \exp A$. Для $\varepsilon' > \varepsilon$ рассмотрим систему множеств

$$\alpha = \{O(x, \varepsilon') : x \in B,\ O(x, \varepsilon') \cap F \neq \varnothing\},$$

где $O(x, \varepsilon') = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon'\}$ – открытый ε'-шар с центром в x. Поскольку B – ε-сеть для A, система α является открытым покрытием

[1] В определении метрики ρ_H по формуле (4) inf можно заменить на min, поскольку $\bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} B(D, \varepsilon') = B(D, \varepsilon)$.

множества F. Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие $\{O(x_1,\varepsilon'),\ldots,O(x_n,\varepsilon')\}$ и рассмотрим множество $G=\{x_1,\ldots,x_n\}\in \exp B$. Из построения следует, что $\rho_H(F,G)\leqslant \varepsilon'$. Таким образом, $\rho_H(F,\exp B)\leqslant\varepsilon'$ для любого $\varepsilon'>\varepsilon$. Следовательно, $\rho_H(F,\exp B)\leqslant\varepsilon$, что и требовалось.

Функтор P. Пусть $A,B\in\exp X$ и B – ε-сеть для A. В силу предложения для любой меры $\mu\in P(A)$ имеет место равенство

$$\rho_P(\mu,P(B))=\mu(\rho(x,B))=\int_{\mathrm{supp}(\mu)}\rho(x,B)\,d\mu.$$

При этом $\rho(x,B)\leqslant\varepsilon$ для любой точки $x\in\mathrm{supp}(\mu)$, поскольку B – ε-сеть для A. Следовательно, $\rho_P(\mu,P(B))\leqslant\varepsilon$.

Функтор I. Пусть множества $A,B\subset X$ такие же, как и выше, и $\mu\in I(A)$. Пусть $F=\mathrm{supp}(\mu)\subset A$. Как и в рассуждениях о функторе exp, для множества F построим конечное подмножество $G=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset B$ для $\varepsilon'>\varepsilon$. Пусть d_μ – функция плотности идемпотентной меры μ и $\lambda_i=\max\{d_\mu(x):x\in B(x_i,\varepsilon')\}$. Определим функцию плотности d_ν по формуле: $d_\nu(x_i)=\lambda_i$, $d_\nu(x)=-\infty$ при $x\notin G$. Функция d_ν задает идемпотентную меру $\nu\in I(B)$ по формуле (6).

Оценим расстояние $\rho_I(\mu,\nu)$. Пусть $f\in\mathrm{Lip}_n(X)$ и $\mu(f)=d_\mu(x)+f(x)$, где $x\in F$. Существует точка $x_i\in G$ такая, что $x\in B(x_i,\varepsilon')$. Имеют место неравенства: $d_\mu(x)\leqslant\lambda_i$, $f(x)-n\varepsilon'\leqslant f(x_i)$. Следовательно,

$$\nu(f)\geqslant\lambda_i+f(x_i)\geqslant\mu(f)-n\varepsilon'. \tag{9}$$

В силу формулы (6) $\nu(f)=\lambda_j+f(x_j)$ для некоторой точки $x_j\in G$. При этом $\lambda_j=d_\mu(x)$, где $x\in B(x_j,\varepsilon')$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\nu(f)=d_\mu(x)+f(x_j)&\leqslant d_\mu(x)+f(x)+n\varepsilon'\\&\leqslant\mu(f)+n\varepsilon'.\end{aligned}\tag{10}$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что

$$|\mu(f)-\nu(f)|\leqslant n\varepsilon'$$

для любой функции $f\in\mathrm{Lip}_n(X)$. Таким образом, $\rho_n(\mu,\nu)\leqslant n\varepsilon'$ для любого n. Значит, $\rho_I(\mu,\nu)\leqslant\varepsilon'$ согласно формуле (7).

Итак, доказано, что $\rho_I(\mu,I(B))\leqslant\varepsilon'$ для любого $\varepsilon'>\varepsilon$. Следовательно, $\rho_I(\mu,I(B))\leqslant\varepsilon$.

Функтор суперрасширения. Пусть D – ε-сеть для A в X и $\xi\in\lambda(A)$. Рассмотрим систему $\eta_1=\{B(F,\varepsilon)\cap D:F\in\xi\}$ и докажем, что она является сцепленной. В самом деле, для любых множеств $F_1,F_2\in\xi$

$$\begin{gathered}B(F_1,\varepsilon)\cap B(F_2,\varepsilon)\cap D\\ \supset B(F_1\cap F_2\cap A,\varepsilon)\cap D\neq\varnothing.\end{gathered}$$

Дополним систему η_1 до мсс η_2 в D, а систему η_2 дополним до мсс η в X. По построению $\eta\in\lambda(D)$ и $B(F,\varepsilon)\cap D\in\eta$ для любого $F\in\xi$. Из максимальности η следует, что $B(F,\varepsilon)\in\eta$ для любого $F\in\xi$, и значит, $\rho_\lambda(\xi,\eta)\leqslant\varepsilon$. Следовательно, $\lambda(D)$ – ε-сеть для $\lambda(A)$. □

Замечание. В работе [2] предложен вариант метризации функтора I с помощью следующего семейства метрик $\{\rho_{I2}\}$:

$$\begin{gathered}\rho_{I2}(\mu,\nu)\\ =\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(nf)-\nu(nf)|}{n2^n}:f\in\mathrm{Lip}_1(X)\right\},\end{gathered}$$

где $\mu,\nu\in I(X)$. В [2] показано, что $\rho_{I2}(\mu,\nu)\leqslant\rho_I(\mu,\nu)$ для любых идемпотентных мер $\mu,\nu\in I(X)$. Следовательно, функтор I с метризацией $\{\rho_{I2}\}$ также сохраняет ε-сети. Из теоремы 1 следует, что для размерностей квантования идемпотентных мер, определенных по метрике ρ_{I2}, справедливы неравенства:

$$\overline{D}_{I2}(\mu)\leqslant\overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)),$$

$$\underline{D}_{I2}(\mu)\leqslant\underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\mu)).$$

Литература

1. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 45–64. doi: 10.4213/im2785

2. *Иванов А. В.* О метризации функтора идемпотентных вероятностных мер // Труды Карельского научного центра РАН. 2021. № 6. С. 20–25. doi: 10.17076/mat1412

3. *Иванов А. В.* О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

4. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034

5. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.

6. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 396–417.

7. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.

8. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. of Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.

9. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology and its Applications. 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

10. *Fedorchuk V. V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. Vol. 76. P. 125–150.

11. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

12. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form F(X) // Topology and its Applications. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

13. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology and its Applications. 2022. Vol. 306. Article 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

References

1. *Zarichnyi M. M.* Spaces and maps of idempotent measures. *Izv. RAN. Ser. Mat.* 2010;74(3):45–64. doi: 10.1070/IM2010V074N03ABEH002495 (In Russ.)

2. *Ivanov A. V.* On metrization oft he functor of idempotent probability measures. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2021;6:20–25. doi: 10.17076/mat1412 (In Russ.)

3. *Ivanov A. V.* On the functor of probability measures and quantization dimensions. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matematika i Mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2020;63:15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2 (In Russ.)

4. *Ivanov A. V., Fomkina O. V.* On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

5. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

6. *Fedorchuk V. V.* Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.* 1991;36(2):411–433. (In Russ.)

7. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* General topology. Core structures. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta; 1988. 252 p. (In Russ.)

8. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. of Amer. Math. Soc.* 1999;351(11):4515–4543.

9. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topology and its Applications.* 2010;157(1):136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

10. *Fedorchuk V. V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors. *Topology and its Applications.* 1997;76:125–150.

11. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag; 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

12. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form F(X). *Topology and its Applications.* 2017;221:107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

13. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topology and its Applications.* 2022;306:107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

Поступила в редакцию / received: 24.03.2022; принята к публикации / accepted: 11.05.2022.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Alexander
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher