Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 51–56
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2022. No. 4. P. 51–56
DOI: 10.17076/mat1560

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.175.4

УСЛОВИЯ СВЯЗНОСТИ ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Рассматривается конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону, зависящему от медленно меняющейся функции. Они равны числу исходящих из вершин занумерованных полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели можно использовать для адекватного описания различных сетей коммуникаций и топологии сети Интернет. В статье исследуются условия, при выполнении которых случайный конфигурационный граф асимптотически связен при $N \to \infty$. Найдены также оценки скорости сходимости к нулю вероятности того, что граф не связен.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; медленно меняющаяся функция; связность графа

Для цитирования: Павлов Ю. Л. Условия связности Интернет-графов // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 51–56. doi: 10.17076/mat1560

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. CONNECTIVITY CONDITIONS OF INTERNET GRAPHS

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider a configuration graph with N vertices whose degrees are independent and identically distributed according to the power law which depends on a slowly varying function. They are equal to the number of each vertex's numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. The paper investigates the conditions under which the random configuration graph is asymptotically connected as $N \to \infty$. In addition, the rate at which the probability that the graph is not connected convergences to zero was estimated.

Keywords: configuration graph; vertex degree; slowly varying function; graph connectivity

F o r   c i t a t i o n: Pavlov Yu. L. Connectivity conditions of Internet graphs. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:51–56. doi: 10.17076/mat1560

F u n d i n g. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Введение

В настоящее время случайные графы широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, социальные, транспортные сети, системы мобильной связи. Наиболее полный обзор соответствующих результатов можно найти, например, в [8]. Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали, что в моделях сетей степени вершин можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Обнаружено, что число узлов сети, степени которых не меньше, чем k, при достаточно больших k пропорционально $k^{-\tau}$, где $\tau > 0$. Поэтому возникла идея считать, что распределение случайной величины ξ, равной степени любой вершины моделирующего сеть графа, задается равенством

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Одним из наиболее часто используемых для моделирования сложных сетей видов случайных графов является конфигурационный граф, конструкция которого предложена Б. Боллобашем в [7]. Обозначим N число вершин графа. Степень каждой вершины задается случайной величиной ξ и равна числу полуребер, т. е. ребер, инцидентных этой вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. Все полуребра различимы (занумерованы в произвольном порядке). Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, а в случае нечетной суммы в граф добавляется вспомогательная вершина единичной степени или вспомогательное полуребро добавляется к равновероятно выбранной вершине. В работе [11] отмечалось, что такие вспомогательные элементы, в случае их появления, не влияют на асимптотическое поведение основных числовых характеристик графов при $N \to \infty$, поэтому далее мы будем учитывать только основные полуребра. Заметим также, что в таких графах возможно появление петель и кратных ребер. Поскольку с помощью конфигурационных моделей нередко описывают топологию сети Интернет, эти графы иногда называют Интернет-графами (см., например, [10]).

Обозначим

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (2)$$

В теореме 3.15 из [9] рассматривались условия, при выполнении которых конфигурационный граф является асимптотически связным. Доказано, что если $p_1 = p_2 = 0$, то с вероятностью, стремящейся к единице, т. е. асимптотически достоверно, граф состоит из единственной компоненты связности, содержащей все N вершин. Дана также оценка скорости сходимости вероятности связности к единице. Обозначим A_N событие, состоящее в том, что граф не связен. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/N).$$

В [8] показано, что если параметр τ распределения (1) принадлежит интервалу $(1, 2)$, то граф содержит единственную компоненту связности, объем которой пропорционален числу вершин графа при $N \to \infty$, а объемы других компонент бесконечно малы по сравнению с наибольшей компонентой. Такая максимальная компонента связности получила название гигантской.

В статье [6] получены результаты об асимптотической связности конфигурационных графов, в которых распределение (2) степеней вершин обладает свойством:

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^v}, \quad (3)$$

где $d > 0$, $g > 1$, $v \geqslant 0$. Найдены условия асимптотической связности в случае $p_2 > 0$, включая и случай $p_1 > 0$, и даны оценки скорости сходимости $\mathbf{P}\{A_N\}$ к нулю. В частности, показано, что граф асимптотически связен, если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ и $1 < g < 3/2$.

Недавно появились работы, в которых обсуждаются сети с распределением (1), но не с фиксированным τ, а в случае $\tau = \tau(N)$. В [5] рассматривалась модель, предложенная в [11], но с изменяющимся параметром. В этой модели

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Из (4) следует, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{\tau}{k^{\tau+1}},$$

поэтому (4) обладает свойством (3), если $d = \tau$, $g = \tau - 1$, $v = 0$. В [5] найдены условия асимптотической связности графа в случае $\tau \uparrow 1/2$.

В последнее время разворачиваются исследования предельного поведения конфигурационных графов с наиболее общим степенным распределением степеней вершин:

$$p_k = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \tau > 1 \qquad (5)$$

и с неизвестной медленно меняющейся на бесконечности функцией $h(x)$. Впервые степенная структура моделей с распределением (5) рассматривалась в [4].

В настоящей статье будут найдены условия асимптотической связности конфигурационного графа с распределением (5) степеней вершин. При этом будем считать, что $h(x)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией с остаточным членом. Приведем определение такой функции, следуя работе [1].

Определение 1. Пусть положительная возрастающая функция $f(x)$ задана на полуоси $[0, \infty)$ и обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \to \infty$, если $x \to \infty$;

2) для некоторого положительного числа θ и некоторого положительного X функция $x^{-\theta} f(x)$ не возрастает на полуоси $[X, \infty)$.

Положительная измеримая функция $h(x)$, определенная на $[0, \infty)$, называется *медленно меняющейся с остаточным членом*, если для каждого $\lambda > 0$ при $x \to \infty$

$$\frac{h(\lambda x)}{h(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{f(x)}\right). \qquad (6)$$

Примером медленно меняющейся функции с остаточным членом может служить любая положительная степень функции $1/\ln x$. Будем также считать для простоты, что максимальный шаг распределения (5) равен единице.

Результаты

Ниже доказана теорема, в которой найдены условия асимптотической связности рассматриваемого случайного конфигурационного графа. Далее термин медленно меняющейся функции с остаточным членом будем понимать чуть шире, чем в приведенном выше определении, допуская, что при $x \in [0, 1]$ возможно равенство $h(x) = 0$. Нетрудно убедиться, что результаты статьи [5] являются частными случаями доказанных ниже утверждений.

Введем стремящуюся к бесконечности последовательность B_N, $N = 1, 2, \ldots$, которая при $N \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$B_N \sim (N h(B_N))^{1/(\tau-1)}. \qquad (7)$$

Теорема. *Пусть $N \to \infty$ и $h(2) > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $h(1) = 0$ и $1 < \tau < 2$, то*
   $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(N^{2-\tau} h(B_N))^{1/(\tau-1)})$.
2. *Если $h(1) = 0$, $\tau = 2$, то*
   $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(h(B_N) \ln N))$.
3. *Если $h(1) > 0$, $1 < \tau < 3/2$, то*
   $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(N^{3-2\tau} h(B_N))^{1/(\tau-1)})$.

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы из статьи [6] и использовать ту же систему обозначений. Предположим, что рассматриваемый граф не связен. Разобьем множество вершин на два непустых непересекающихся подмножества Ω и $\widetilde{\Omega}$ таких, что не существует ребер, соединяющих вершины из Ω с вершинами из $\widetilde{\Omega}$. Мы можем считать, что число вершин в множестве Ω не превосходит $N/2$. Обозначим Λ множество всех таких возможных разбиений множества вершин графа на два подмножества. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и равны степеням вершин $1, \ldots, N$ соответственно и пусть ζ_N равно сумме этих случайных величин:

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N. \qquad (8)$$

Обозначим

$$\zeta_N(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} \xi_i, \quad \zeta_N(\widetilde{\Omega}) = \sum_{i \in \widetilde{\Omega}} \xi_i. \qquad (9)$$

Легко видеть, что общее число различных графов с суммой степеней вершин ζ_N равно $(\zeta_N - 1)!!$ Поскольку полуребра соединяются равновероятно,

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{\Omega \in \Lambda} \frac{(\zeta_N(\Omega) - 1)!!(\zeta_N(\widetilde{\Omega}) - 1)!!}{(\zeta_N - 1)!!}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{\Omega \in \Lambda} \prod_{j=1}^{\zeta_N(\Omega)/2} \frac{\zeta_N(\Omega) - 2j + 1}{\zeta_N - 2j + 1}. \qquad (10)$$

Пусть $F(x)$ означает функцию распределения случайной величины ξ. Очевидно, что при $x < 0$

$$F(x) = 0. \tag{11}$$

Из (5) следует, что при $x > 0$

$$F(x) = 1 - \sum_{k \geqslant x} \frac{h(k)}{k^\tau}. \tag{12}$$

Функция $h(x)$ обладает свойством (6), поэтому из первого утверждения леммы A.1.1 статьи [1] вытекает, что существуют не зависящие от λ и x числа M и Z такие, что для всех $x \geqslant Z$ и $\lambda \in [1, \infty)$

$$\left| \frac{h(\lambda x)}{h(x)} - 1 \right| \leqslant \frac{M\lambda}{f(x)}.$$

Отсюда и из (12) нетрудно получить, что при $x \to \infty$

$$F(x) = 1 - h(x)(1 + o(1)) \sum_{k \geqslant x} \frac{1}{k^\tau}.$$

Заменяя суммирование интегрированием, видим, что

$$F(x) = 1 - \frac{h(x)(1 + o(1))}{(\tau - 1)x^{\tau - 1}}.$$

Отсюда и из (11) следует, что $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.6.1 из [2] и, значит, принадлежит области притяжения устойчивого закона $G(x)$ с показателем $\tau - 1$. Поэтому из теоремы 2.2.2 [2] вытекает, что логарифм характеристической функции $\varphi_G(t)$ устойчивого закона $G(x)$ при $1 < \tau < 2$ представим в виде:

$$\ln \varphi_G(x) = i\gamma t - c|t|^{\tau-1} \left(1 - i\frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau - 1)}{2} \right), \tag{13}$$

где γ – некоторая константа, при этом в доказательстве теоремы 2.2.2 [2] показано, что

$$c = -\Gamma(1 - \tau) \cos \frac{\pi(\tau - 1)}{2}, \tag{14}$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция. Если $\tau = 2$, то для нахождения $\ln \varphi_G(x)$ используем теорему 5.7.3 из [3], откуда

$$\ln \varphi_G(x) = i\gamma t - \frac{\pi}{2}|t| \left(1 + i\frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right). \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что константу γ в (13) и (15) можно сделать равной нулю, выбирая соответствующим образом нормирующие постоянные из определения области притяжения закона распределения.

Теперь из (13), (15) и теоремы 2.6.5 [2] следует, что в окрестности нуля характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(t) = \exp\left\{ -c|t|^{\tau-1} \widetilde{h}(t) \left(1 - i\frac{t}{|t|} w(t, \tau) \right) \right\}, \tag{16}$$

где c определено в (14) при $1 < \tau < 2$ и $c = \pi/2$, если $\tau = 2$,

$$w(t, \tau) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2}, & 1 < \tau < 2; \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t|, & \tau = 2, \end{cases}$$

а $\widetilde{h}(t)$ – медленно меняющаяся функция. В ходе доказательства теоремы 2.6.5 [2] показано, что

$$\widetilde{h}(t) = h(1/|t|). \tag{17}$$

Пусть $1 < \tau < 2$. Тогда из (7), (16), (17) следует, что при любом фиксированном $t \neq 0$

$$\varphi^N \left(\frac{t}{B_N} \right) \to$$

$$\exp\left\{ -c|t|^{\tau-1} \left(1 - i\frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau - 1)}{2} \right) \right\}. \tag{18}$$

Согласно (8) и теореме 4.2.1 из [2], соотношение (18) означает, что имеет место локальное сближение распределений сумм ζ_N с устойчивым законом с показателем $\tau - 1$. Отсюда следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого A

$$\mathbf{P}\{1/A \leqslant \zeta_N/B_N \leqslant A\} > 1 - \varepsilon. \tag{19}$$

Положим,

$$u(x) = \prod_{j=1}^{x} \frac{2x - 2j + 1}{\zeta_N - 2j + 1} = \prod_{j=0}^{x-1} \frac{2j + 1}{\zeta_N - 2j - 1}. \tag{20}$$

Пусть $h(1) = 0$. Поскольку максимальный шаг распределения (5) равен единице, из (9) и (19) вытекает, что

$$\zeta_N(\Omega) > 2|\Omega|, \tag{21}$$

где $|\Omega|$ – число вершин в множестве Ω. Поскольку

$$\frac{u(s + 1)}{u(s)} = \frac{2s + 1}{\zeta_N - 2s - 1}, \tag{22}$$

эта величина растет вместе с s. Кроме того, при $s \leqslant \zeta_N/4 - 1$

$$\frac{2s + 1}{\zeta_N - 2s - 1} < 1. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что это неравенство остается в силе и при $\zeta_N/4 - 1 < s < \zeta_N(\Omega)/2$. Действительно, из (19) следует, что в этом случае

$|\Omega| \to \infty$ и оценка вида (19) сохраняет силу при замене N на Ω в (7), а также B_N на $B_{|\Omega|}$ и ζ_N на $\zeta_N(\Omega)$ в (19).

Случай $\tau = 2$ рассмотрим аналогично. Из (16), (17) прямыми вычислениями получаем, что при любом фиксированном $t \neq 0$

$$\varphi^N\left(\frac{t}{B_N}\right)\exp\{-it\ln B_N\} \to$$

$$\exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1 - i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\}.$$

Отсюда и из теоремы 4.2.1 [2] следует, что

$$\zeta_N \sim B_N \ln B_N, \tag{24}$$

и, как и выше, приходим к (23). Из (22), (23) видим, что при достаточно больших N и $s < \zeta_N(\Omega)/2$ функция $u(s)$ убывает. Тогда из (10), (20), (21) находим, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{\Omega\in\Lambda} u(|\Omega|) = \sum_{s=1}^{\lfloor N/2\rfloor} R_N(s), \tag{25}$$

где

$$R_N(s) = \binom{N}{s}u(s). \tag{26}$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\frac{R_N(s+1)}{R_N(s)} = \frac{(N-s)(2s+1)}{(s+1)(\zeta_N - 2s - 1)}. \tag{27}$$

Используя (7), (19) и (24), из (27) нетрудно получить, что существует такое положительное число $q < 1$, что

$$\frac{R_N(s+1)}{R_N(s)} \leqslant q. \tag{28}$$

Если $2 \leqslant s \leqslant \lfloor N/2\rfloor - 1$, то из (28)

$$R_N(s+1) = R_N(2)\prod_{j=2}^{s}\frac{R_N(j+1)}{R_N(j)} \leqslant R_N(2)q^{s-1}$$

и, согласно (25),

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant R_N(1) + R_N(2)(1-q)^{-1}. \tag{29}$$

Если $1 < \tau < 2$, то из (19), (20), (26) видим, что

$$\begin{gathered} R_N(1) = O(N/B_N), \\ R_N(2) = O((N/B_N)^2), \end{gathered} \tag{30}$$

а если $\tau = 2$, то (7), (20), (24), (26) дают нам

$$\begin{gathered} R_N(1) = O(1/(h(B_N)\ln N)), \\ R_N(2) = O(1/(h(B_N)\ln N)^2). \end{gathered} \tag{31}$$

Теперь первое и второе утверждения теоремы очевидным образом следуют из (29)–(31).

Осталось рассмотреть случай $h(1) > 0$, $1 < \tau < 3/2$. В этом случае $\zeta_N(\Omega) > |\Omega|$. Обозначим

$$R_N^{(1)}(s) = \binom{N}{s}u\left(\left\lceil\frac{s}{2}\right\rceil\right). \tag{32}$$

Рассуждая как и выше, находим, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{s=1}^{\lfloor N/2\rfloor} R_N^{(1)}(s). \tag{33}$$

Проводя элементарные вычисления (см. также доказательство теоремы в [6]) отдельно для четных и нечетных s, получаем, что при достаточно больших N

$$\frac{R_N^{(1)}(s+2)}{R_N^{(1)}(s)} < q, \tag{34}$$

где q – сколь угодно малое положительное число. Тогда из (33) и (34) видим, что

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\{A_N\} \leqslant R_N^{(1)}(1) + R_N^{(1)}(2) + R_N^{(1)}(3) \\ + R_N^{(1)}(2)\prod_{j\geqslant 1}\frac{R_N^{(1)}(2j+2)}{R_N^{(1)}(2j)} \\ + R_N^{(1)}(3)\prod_{j\geqslant 2}\frac{R_N^{(1)}(2j+1)}{R_N^{(1)}(2j-1)} \\ \leqslant R_N^{(1)}(1) + (R_N^{(1)}(2) + R_N^{(1)}(3))(1-q)^{-1}. \end{gathered}$$

Для завершения доказательства третьего утверждения теоремы осталось только заметить с помощью (19), (20), (32) и элементарных свойств медленно меняющихся функций, что

$$\begin{gathered} R_N^{(1)}(1) = O(1/(N^{2-\tau}h(B_N))^{1/(\tau-1)}), \\ R_N^{(1)}(2) = O(1/(N^{3-2\tau}h(B_N))^{1/(\tau-1)}), \\ R_N^{(1)}(3) = O(1/(N^{5-3\tau}h(B_N))^{1/(\tau-1)}). \end{gathered}$$

□

Литература

1. *Золотарев В. М., Шиганов И. С.* Дополнения // Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. С. 100–131.

2. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

3. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с.

4. *Павлов Ю. Л.* Об асимптотике степенной структуры условных Интернет-графов // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 77–83. doi: 10.17076/mat1202

5. *Павлов Ю. Л.* Об условии связности Интернет-графа с изменяющимся параметром распределения степеней вершин // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 84–88. doi: 10.17076/mat1170

6. *Павлов Ю. Л.* О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, вып. 2. С. 115–123. doi: 10.4213/dm1008

7. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2021. URL: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

10. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs // GLOBECOM'02 IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

References

1. *Zolotarev V. M., Shiganov I. S.* Supplement. *Seneta E.* Regularly Varying Functions. Moscow: Nauka; 1985. P. 100–131. (In Russ.)

2. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordho; 1971. 443 p.

3. *Lukacs E.* Characteristic functions. London: Griffin; 1970. 358 p.

4. *Pavlov Yu. L.* On the asymptotics of the degree structure of conditional Internet graphs. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2020;7:77–83. doi: 10.17076/mat1202 (In Russ.)

5. *Pavlov Yu. L.* On the connectivity condition for an Internet graph with a variable parameter of the vertex degree distribution. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2020;7:84–88. doi: 10.17076/mat1170 (In Russ.)

6. *Pavlov Yu. L.* On the connectivity of configuration graphs. *Discrete Math. Appl.* 2021;30(1):43–49. doi: 10.1515/dma-2021-0004

7. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge University Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2021. URL: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf (accessed: 15.03.2022).

10. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs. *GLOBECOM'02 IEEE.* 2002:2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004;55(1-2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 17.03.2022; принята к публикации / accepted: 26.04.2022.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher