**Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 67–74**
**Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2022. No. 4. P. 67–74**
**DOI: 10.17076/mat1528**

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

*УДК 519.115:519.2*

# ДОАСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ С УСЛОВИЯМИ

**Н. Ю. Энатская**

*Московский институт электроники и математики,*
*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*
*(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

Обобщение классической схемы размещения частиц комплектами по ячейкам означает расширение ее условий на возможность разных размеров комплектов. Отдельно рассматривается эта схема размещения без пустых ячеек и по выделенным ячейкам. Исследование производится перечислительным методом на основе построения и анализа итерационного случайного процесса прямого бесповторного нумерованного перечисления его исходов в доасимптотической области изменения параметров по следующим направлениям: решения задачи нумерации в прямой и обратной постановках, состоящих в установлении взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами исходов схемы, определения вероятностного распределения числа пустых ячеек и на множестве исходов схемы по введенным вероятностям итерационных переходов процесса их перечисления и разработки процедуры их моделирования.

Ключевые слова: размещение частиц комплектами; размеры комплектов; выделенные ячейки

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Доасимптотический анализ обобщения классической схемы размещения частиц комплектами с условиями // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 67–74. doi: 10.17076/mat1528

## N. Yu. Enatskaya. PREASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE GENERALIZATION OF THE CLASSICAL SCHEME OF PARTICLE ALLOCATION BY SETS WITH CONDITIONS

*National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)*

Generalization of the classical scheme of allocating particles into cells by sets implies extending its conditions to allow different sizes of sets. This allocation scheme is studied separately for cases without empty cells and by selected cells. The study is carried out by the enumeration method based on the construction and analysis of an iterative random process of direct non-repetitive numbered enumeration of its outcomes in the pre-asymptotic region of parameter change in the following directions: solving the numbering problem in direct and inverse formulations which consist in finding one-to-one correspondence between the numbers and types of outcomes of the scheme, determining the probabilistic distribution of the number of empty cells and on the set of outcomes of the scheme according to the introduced probabilities of iterative transitions of the process of their enumeration and developing a procedure for their modeling.

K e y w o r d s: allocation of particles by sets; set sizes; selected cells

F o r c i t a t i o n: Enatskaya N. Yu. Preasymptotic analysis of the generalization of the classical scheme of particle allocation by sets with conditions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2022;4:67–74. doi: 10.17076/mat1528

## Введение

Классическая схема размещения частиц комплектами [1] описывает размещения по $n$ различимым ячейкам неразличимых частиц $m$ различимыми комплектами по $r$ частиц в каждом. Частицы каждого комплекта размещаются независимо и равновероятно по $n$ различимым ячейкам так, что все частицы каждого комплекта попадают в разные ячейки.

Для этой схемы в [1] представлен ее асимптотический анализ и получены точные формулы для распределения и моментов (математического ожидания и дисперсии) числа $\mu_0(rm, n)$ пустых ячеек в исходах схемы, вид которых записывается уровнями заполнений ячеек в порядке роста их нумерации. Приведем здесь из [1] точные формулы для распределения числа $\mu_0(rm, n)$:

$$P(\mu_0(rm, n) = k) \\ = C_n^k (C_{n-k}^r / C_n^r)^m P(\mu_0(rm, n-k) = 0); \tag{1}$$

$$P(\mu_0(rm, n) = 0) \\ = (1/C_n^r)^m \sum_{t=0}^{n} C_n^t (-1)^t (C_{n-t}^r)^m, \tag{2}$$

где $r \leqslant n - k \leqslant min(rm, n)$, откуда

$$l = max(0, n - mr) \leqslant k \leqslant n - r = L \tag{3}$$

есть диапазон для числа пустых ячеек в исходах схемы.

Пространство элементарных исходов схемы представляют все наборы номеров комплектов частиц, попавших в каждую ячейку в порядке нумерации ячеек.

Цели доасимптотического анализа изучаемых здесь схем определены в аннотации, а их результаты дополняют ранее полученные для классической схемы с заменой $r$ частиц в каждом комплекте на вектор $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ размеров комплектов в условиях изучаемых здесь ограничений.

Для краткости далее будем называть обобщение классической схемы размещения частиц комплектами разных размеров без ограничений **схема A**, без пустых ячеек – **схема B**, а по выделенным $M$ ячейкам – **схема C**.

## 1. Вспомогательные результаты

### 1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ [3], суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) [3], состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов по [3], дающее его единый прием, состоящий в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению ЗН, учитывающему специфику схемы. (В более ранних публикациях УМ также называлось БМ – быстрое моделирование). Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

Перечислим используемые здесь результаты (со своими обозначениями) ранее изученных схем по решению ЗН.

### 1.2. Схема сочетаний

В [2] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы сочетаний из $n$ элементов по $r$ с числом исходов $C_n^r$. Номера элементов в каждом исходе схемы $R = (n_1 n_2 \ldots n_r)$

упорядочены по возрастанию, и значение $n_m$ $(m = \overline{1,r})$ определяет величина $l_m$ – порядковый номер $n_m$ по возрастанию среди значений от $(n_{m-1}+1)$ до $n$.

**Теорема 1. Прямая ЗН.** *Дан номер $N$ исхода схемы сочетаний. Тогда в его искомом виде $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$ значение $l_m$ $(m = \overline{1,r})$ при $j_0 = 1$, $n_0 = 0$, $C_0^0 = 1$ есть*

$$l_m = \min j_m :$$
$$\left\{ N \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s_i = n_{i-1}+J(i-1)}^{l_m - 1} C_{n-s_i}^{r-i} + \sum_{s_m = n_{m-1}}^{j_m} C_{n-s_m}^{r-m} \right\},$$

*где $J(Z) = 1$ при $Z = 0$ и $J(Z) = 0$ при $Z > 0$.*

**Теорема 2. Обратная ЗН.** *Дан исход $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$. Тогда его номер $N$ находится (при $n_0 = 0$) по формуле*

$$N = \sum_{i=1}^{r} \sum_{s_i = n_{i-1}+1}^{n_i - 1} C_{n-s_i}^{r-i} + 1.$$

### 1.3. Схема последовательных действий (ПД)

Схема $k$ ПД с результатом анализа в [2] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия, и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если $i$-е действие $(i = \overline{1,k})$ совершается $d_i$ числом способов, то число исходов схемы $N = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

Вид исхода после совершения $i$ действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через $R_{ij_i}$, где $i$ – номер действия, а $j_i$ – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид $R_{ij_i}$ определяется характером действия. Исход совершения $r$ действий $(r \leqslant k)$ обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2,j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $r = k$.

**Теорема 3. Прямая ЗН.** *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \dots, d_k$ дан номер $N^{(k)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$, определяемый номерами $(j_1, \dots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$ находится по формуле*

$$j_i = t_i + I(t_i) d_i,$$

*где $t_i = N^{(i)} mod\, d_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;*

$$N^{(i-1)} = \left[ \frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i} \right],$$

*где $[Z]$ – целая часть числа $Z$ и $i = k, k-1, \dots, 1$; $N^{(0)} = 1$.*

**Теорема 4. Обратная ЗН.** *Пусть в схеме с параметрами $d_1, \dots, d_k$ дан вид ее исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$, определяющий номера $(j_1, \dots j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1,k}$. Тогда его номер вычисляется по формуле*

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^{k} d_i + j_k.$$

### 1.4. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

Схема ОПД с результатом анализа [2] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) неодинаковы, т. е. зависят от характера действия и вида предыдущего исхода. Результатом этого являются разные размеры пучков внутри итерации в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему, т. е. числа исходов из каждого состояния на следующей итерации.

Анализ схемы ОПД приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится $k$ последовательных действий, $i$-е из которых $(i = \overline{1,k})$ на $i$-м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих $k$ действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(k)})$, т. е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения $i$ действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через $R_{ij_i}$, где $i$ – номер действия, а $j_i$ – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из $k$ действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Под траекторией $T$ исхода схемы понимается последовательность исходов, ведущая в графе их перечисления от начала к исследуемому исходу.

**Прямая и обратная задачи нумерации** решены следующими теоремами.

**Теорема 5.** *Пусть совершается $k$ действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории $T$ в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до $k$-й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для $j_i$ $(i = \overline{1,k})$:*

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

*где все пучковые структуры действий $\bar{d}^{(i)}$ заданы и*

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max\ t : \left(\sum_{l=1}^{t} d_l^{(k)} = A_k \leqslant N_*^{(k)}\right),$$

*где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$; заменяя $k$ на $i$, доходим по рекурренте до первого шага.*

По решенной ЗН для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

**Теорема 6.** *Пусть совершается $k$ действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \ldots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k$, $i = \overline{1,k}$:*

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i$$

*начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.*

## 2. Анализ схемы А

### 2.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы в исходе схемы

Прямое бесповторное перечисление $N = \prod_{i=1}^{m} C_n^{r_i}$ исходов схемы будем производить по п. 1.3 итерационным случайным процессом для схемы ПД, где действиями – итерациями будут последовательные поединичные добавления независимых равновероятных размещений следующих комплектов частиц по ячейкам в соответствии с условиями схемы – по схеме сочетаний до последнего $m$-го комплекта. Получение результатов анализа схемы требует определения пучковой структуры графа данного процесса перечисления ее исходов при решении ЗН по п. 1.3 и вероятностного распределения на множестве ее исходов при проведении их моделирования по УМ.

Тогда пучковая структура графа данного перечисления исходов схемы определяется пучковой структурой итераций, где на $i$-й итерации $(i = \overline{1,m})$ все размеры пучков по $C_n^{r_i}$.

При этом бесповторность исходов каждой (а значит, и итоговой) итерации такого перечисления обеспечивается неизменяемыми далее, заложенными в процессе перечисления исходов, отличиями: по пучкам – в разных добавленных исходах схемы сочетаний последней размещенной на выполняемой итерации частицы, а в пучках одной итерации – в разных наборах заполнений ячеек при размещении предшествующих комплектов.

Исходы итераций будем записывать в виде составов номеров комплектов принадлежащих им частиц в ячейках в порядке ячеек, заключая в круглые скобки составы ячеек, содержащие более одной частицы, и перечисляя их через запятую в ячейке в порядке размещения комплектов. Пустые ячейки в исходе обозначаем нулями.

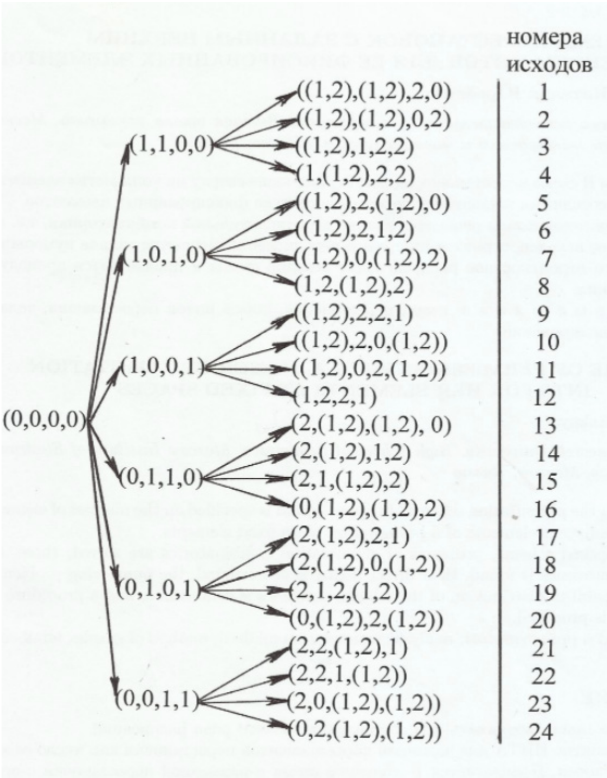
Диапазон возможных значений $k$ – числа пустых ячеек в исходе схемы определяются по аналогии с формулой (3) из [1]:

$$l = max\left(0, n - \sum_{i=1}^{m} r_i\right) \leqslant k \leqslant (n - max_{i=1}^{m} r_i) = L.$$

Для отражения различимости комплектов частиц при неразличимости частиц внутри каждого комплекта для описания результата исхода любой итерации перечислительного процесса исходов схемы будем далее обозначать все частицы $i$-го комплекта через $i$, где $i = \overline{1,m}$.

Приведем числовой пример наглядного графического представления и записи бесповторного формирования с итогом перечисления всех разных исходов схемы.

**Пример 1.** Пусть $n = 4$, $\bar{r} = (2,3)$, $m = 2$. Тогда число размещений первого комплекта $C_4^2 = 6$, а второго – $C_4^3 = 4$, что дает число исходов схемы $N = 6 \cdot 4 = 24$. Граф перечисления последовательных исходов итераций схемы размещения частиц комплектами с заданными параметрами с учетом их суммирования по результатам размещения со всеми предшествующими комплектами представлен на рисунке.




Граф перечисления исходов схемы $A$ в примере 1
The graph of outcomes enumeration of scheme $A$ in example 1

Здесь число $N$ исходов схемы по рисунку совпадает с его теоретическим значением $N = (C_4^3)^2 = 24$.

### 2.2. Решение ЗН для исходов схемы

По предложенной в п. 2.1 процедуре бесповторного перечисления исходов схемы она соответствует схеме ПД с действиями – итерациями последовательного поединичного добавления результатов размещения по схеме сочетаний комплектов частиц по ячейкам с изученной пучковой структурой графа перечисления исходов схемы – и в общем виде решена в п. 1.3.

Приведем численный пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях примера 1 с наглядной проверкой по рисунку, считая решенной ЗН для действий – схем сочетания размещения каждого комплекта (см. п. 1.2).

**Пример 2.**

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы $N^* = N^{(2)} = 14$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$. По рисунку $R^* = (2,(1,2),1,2)$. Найдем $R^*$ по формулам п. 1.4.

**Шаги решения:**

1) по данному $N^{(2)} = 14$ находим по п. 1.4 номер предшествующего ему исхода схемы на 1-й итерации $N^{(1)} = 4$, т. к. $t = 3$, $\delta = 1$, чему соответствует добавляемый результат размещения первого комплекта по ячейкам вида $(0,1,1,0)$;

2) по данному $N^{(2)} = 14$ по п. 1.4 в 4-м пучке второй итерации находим номер искомого исхода $j_2 = 14 - 12 = 2$, что соответствует добавлению второго комплекта $(2,2,0,2)$;

3) тогда, суммируя результаты независимых размещений двух комплектов, получаем итоговый искомый вид исхода схемы $R^* = (2,(1,2),1,2)$, что совпадает с результатом по рисунку.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы $R^* = R^{(2)} = (2,(1,2),1,2))$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$. По рисунку $N^* = 14$. Найдем $N^*$ по формулам п. 1.4.

**Шаги решения:**

1) по данному $R^{(2)} = (2,(1,2),1,2)$ находим виды первого комплекта $(0,1,1,0)$, а второго комплекта – $(2,2,0,2)$, откуда $j_1 = 4$, $j_2 = 2$;

2) по п. 1.4 получаем $N^* = N^{(2)} = (4-1)4 + 2 = 14$, что совпадает с результатом по рисунку.

### 2.3. Распределение вероятностей на множестве исходов схемы и числа пустых ячеек

В силу заданных равновероятных итерационных переходов при симметричной структуре графа перечисления исходов итоговые исходы схемы также равновероятны с вероятностью каждого по $1/\prod_{i=1}^m C_n^{r_i}$.

**Замечание 1.** Расчет распределения итоговых исходов схемы в более общих условиях заданных, отличных от равновероятного независимого размещения частиц комплектами по ячейкам, производится по тому же графу итерационного перечисления при формировании исходов схемы путем произведений их вероятностей по последовательным переходам в графе по итерациям в траекториях, ведущих к каждому итоговому исходу схемы.

Вероятностное распределение числа $k$ пустых ячеек в исходе схемы выводится по аналогии с формулами (1) и (2) из [1]:

$$P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n\right) = k\right)$$

$$= C_n^k \prod_{i=1}^m \left(C_{n-k}^{r_i}/C_n^{r_i}\right) P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n-k\right) = 0\right);$$

$$P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n\right) = 0\right)$$

$$= \left(1/\prod_{i=1}^{m} C_n^{r_i}\right) \sum_{t=0}^{n} C_n^t (-1)^t \prod_{i=1}^{m} C_{n-t}^{r_i}.$$

Диапазон возможных значений $k$ указан в п. 2.1.

### 2.4. Моделирование исхода схемы

Его предлагается проводить приемом УМ [3] путем разыгрывания его номера одним случайным числом с равновероятным вероятностным распределением в схеме (или по полученному по замечанию в более общей схеме) и по нему по результату решения ЗН находить вид смоделированного исхода схемы.

## 3. Анализ схемы B

Схема B существует при $\sum_{i=1}^{m} r_i \geqslant n$.

### 3.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы

Вид исхода схемы записывается как в схеме A. Бесповторное перечисление исходов получаем отбраковкой из их перечисления исходов схемы A с хотя бы одной нулевой компонентой. В результате в общем случае получаем граф перечисления исходов схемы B другой пучковой структуры и в общем случае с неодинаковыми размерами пучков в итерациях. А это значит, что схема B представляет собой ОПД с действиями итераций. Тогда ЗН в прямой и обратной постановках здесь будем решать по формулам п. 1.4, а число исходов схемы получается сложением размеров пучков предпоследней итерации.

Приведем численный пример описанных расчетов результатов перечисления исходов схемы B.

**Пример 3.** Пусть, как и в примере 1, $n = 4$, $\bar{r} = (2, 3)$, $m = 2$. Тогда при перечислении по рисунку исходов схемы B после отбраковки из исходов схемы A в первом пучке итоговых исходов остаются 2 исхода: ((1,2),1,2,2), (1,(1,2),2,2), во втором – 2 исхода: ((1,2),2,1,2), (1,2,(1,2),2), в третьем – 2 исхода: ((1,2),2,2,1), (1,2,2,1), в четвертом – 2 исхода: (2,(1,2),1,2), (2,1,(1,2),2), в пятом – 2 исхода: (2,(1,2),2,1), (2,1,2,(1,2)), в шестом – 2 исхода: (2,2,(1,2),1), (2,2,1,(1,2)) – всего 12 исходов, как сумма размеров пучков итерации после этой отбраковки. Их последовательные номера в схеме A $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$.

### 3.2. Решение ЗН для исходов схемы

ЗН решаем по АЛГОРИТМУ 1 пересчетом результатов ЗН в схеме A путем установления номеров ее последовательных исходов без пустых ячеек $\bar{S}$ в качестве исходов исследуемой схемы B. Пусть эти номера фиксируются в процессе проведенной отбраковки исходов схемы A для схемы B с пустыми ячейками.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы B $N^* = N^{(2)}$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$.

**Шаги решения:**

1) среди номеров исходов схемы A $\bar{S}$ находим по порядку $N^*$-й номер;

2) по найденному в 1) номеру по результату решения прямой ЗН в схеме A получаем его вид в схеме A, совпадающий с искомым в схеме B.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы B $R^* = R^{(2)}$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$.

**Шаги решения:**

1) сравниваем данный вид исхода схемы B с подряд идущими исходами схемы A, с номерами из $\bar{S}$, считая число сравнений до их совпадения включительно, которое и дает искомый номер исхода схемы B.

### 3.3. Вероятностное распределение на множестве исходов схемы

Вероятностное распределение исходов схемы будем получать по вероятностям траекторий, оставшихся после отбраковки исходов схемы A, вычисляемых произведением вероятностей составляющих их итерационных переходов, которые получаются пропорциональным пересчетом оставшихся в пучках переходов каждой итерации с сохранением суммарной единицы.

### 3.4. Моделирование исходов схемы

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную прямую ЗН, будем моделировать ее исходы по УМ [3], т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату прямой ЗН.

Приведем числовой пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях примера 1 для исходов схемы B и перерасчет вероятностей ее исходов.

**Пример 4.** Пусть снова $n = 4$, $\bar{r} = (2, 3)$, $m = 2$.

Предварительное перечисление видов и номеров оставшихся из исходов схемы A в качестве исходов схемы B см. в примере 3.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы B $N^* = N^{(2)} = 8$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$. По примеру 3 $R^* = (2, (1, 2), 1, 2)$. Найдем $R^*$ по АЛГОРИТМУ 1.

**Шаги решения:**

1) среди номеров исходов схемы А (см. пример 3) $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$ 8-м порядковым номером стоит номер 15;

2) по результату решения прямой ЗН в схеме А ей соответствует исход $(2, 1, (1, 2), 2)$, который совпадает с искомым видом исхода $R^* = R^{(2)}$ схемы В, что совпадает с результатом по примеру 3.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы $R^* = R^{(2)} = (2, 1, (1, 2), 2))$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$. По примеру 3 $N^* = 8$. Найдем $N^*$ по АЛГОРИТМУ 1.

**Шаги решения:**

1) находим 8-й по порядку из видов исходов схемы А с номерами $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$, совпадающий с данным видом схемы В $R^{(2)} = (2, 1, (1, 2), 2)$, равный 15-му номеру исхода в схеме А, который соответствует 8-му номеру данного вида схемы В, что совпадает с результатом по примеру 3.

Произведем перерасчет вероятностного распределения на множестве исходов схемы В из равновероятного распределения исходов схемы А по рисунку.

В примере 3 показано, что после отбраковки исходов схемы А по ограничению в схеме В в пучках итоговых исходов остается по два исхода из четырех, откуда получаем число всех исходов равное 12, а их вероятности – по 1/12.

## 4. Анализ схемы С

### 4.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы

Не нарушая общности, считаем выделенные $M$ ячеек первыми.

Вид исхода схемы записывается первыми $M$ компонентами исхода схемы А.

Бесповторное перечисление исходов схемы С получаем отбраковкой повторов в результате их получения из перечисления исходов схемы А. В результате в общем случае получаем граф перечисления исходов схемы С другой пучковой структуры и в общем случае с неодинаковыми размерами пучков в итерациях. А это значит, что схема С представляет собой ОПД с действиями итераций. Тогда ЗН в прямой и обратной постановках здесь будем решать по формулам п. 1.4, а число исходов схемы получается сложением размеров пучков предпоследней итерации.

Приведем численный пример описанных расчетов результатов перечисления исходов схемы С.

**Пример 5.** Пусть, как и в примере 1, $n = 4$, $\bar{r} = (2, 3)$, $m = 2$. Тогда при перечислении по рисунку разных исходов схемы С после отбраковки из исходов схемы А: $((1, 2), (1, 2))$ 2 раза, $((1, 2), 1)$ 1 раз, $(1, (1, 2))$ 1 раз, $((1, 2), 2)$ 4 раза, $((1, 2), 0)$ 2 раза, $(1, 2)$ 2 раза, $(2, (1, 2))$ 2 раза, $(0, (1, 2))$ 2 раза, $(2, 2)$ 2 раза, $(2, 0)$ 1 раз, $(0, 2)$ 1 раз – всего 12 разных исходов. Количество повторов разных исходов приведено для перерасчета вероятностей исходов схемы С. Их последовательные номера в схеме А $\bar{T} = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 21, 23, 24)$.

### 4.2. Решение ЗН для исходов схемы

Вводим и решаем ЗН по АЛГОРИТМУ 2 пересчетом результатов ЗН в схеме А для исходов схемы С путем установления соответствия первых номеров исходов схемы А $\bar{T}$, порождающих разные последовательные исходы схемы С. Пусть эти номера фиксируются в процессе проведенной отбраковки исходов схемы А для схемы С.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы В $N^* = N^{(2)}$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$.

**Шаги решения:**

1) среди номеров исходов схемы А $\bar{S}$ находим по порядку $N^*$-й номер;

2) по найденному в 1) номеру по результату решения прямой ЗН в схеме А получаем его вид в схеме А, первые две компоненты которого дают искомый вид исхода в схеме С.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы В $R^* = R^{(2)}$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$.

**Шаги решения:**

1) сравниваем данный вид исхода схемы С с подряд идущими исходами схемы А, с номерами из $\bar{S}$, считая число сравнений до их совпадения включительно, которое и дает искомый номер исхода схемы С.

### 4.3. Вероятностное распределение на множестве исходов схемы

Вероятностное распределение разных исходов схемы С получаем кратное числу повторов исходов схемы С при их получении из исходов схемы А увеличением вероятности равновероятных исходов схемы А.

### 4.4. Моделирование исходов схемы

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную прямую ЗН, будем моделировать ее исходы по УМ [3], т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату прямой ЗН.

Приведем числовой пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях примера 1 для исходов схемы B и перерасчет вероятностей ее исходов.

**Пример 6.** Пусть снова $n = 4$, $\bar{r} = (2,3)$, $m = 2$.

Предварительное перечисление видов и номеров оставшихся из исходов схемы A в качестве исходов схемы C см. в примере 5.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы B $N^* = N^{(2)} = 8$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$. По примеру 5 $R^* = (1,2)$. Найдем $R^*$ по АЛГОРИТМУ 2.

**Шаги решения:**

1) среди номеров исходов схемы A (см. пример 5) $\bar{T} = (1,3,4,5,7,8,12,13,15,21,23,24)$ 8-м порядковым номером стоит номер 13;

2) по результату решения прямой ЗН в схеме A ей соответствует исход (1,2), который совпадает с искомым видом исхода $R^* = R^{(2)}$ схемы C, что совпадает с результатом по примеру 5.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы $R^* = R^{(2)} = (1,2)$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$. По примеру 5 $N^* = 8$. Найдем $N^*$ по АЛГОРИТМУ 2.

**Шаги решения:**

1) находим 8-й по порядку из видов исходов схемы A с номерами $\bar{T} = (1,3,4,5,7,8,12,13,15,21,23,24)$, совпадающий с данным видом схемы B $R^{(2)} = (2,(1,2))$, равный 13-му номеру исхода в схеме A, который соответствует 8-му номеру данного вида схемы C, что совпадает с результатом по примеру 5.

Произведем перерасчет вероятностного распределения на множестве исходов схемы B из равновероятного распределения исходов схемы A по рисунку.

В примере 5 получены кратности увеличения вероятностей исходов схемы C по сравнению с вероятностями исходов схемы A, что приводит к результатам следующих вероятностей исходов схемы C в порядке их перечисления: (2/24, 1/24, 1/24, 4/24, 2/24, 2/24, 3/24, 3/24, 3/24, 2/24, 1/24, 1/24) с суммарной единицей.

## Литература

1. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976.

2. *Энатская Н. Ю.* Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750

3. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

## References

1. *Kolchin V. F., Sevast'yanov B. A., Chistyakov V. P.* Random postings. Moscow: Nauka; 1976. (In Russ.)

2. *Enatskaya N. Yu.* Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)

3. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

*Поступила в редакцию / received: 06.12.2021; принята к публикации / accepted: 19.04.2022.*
*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

*e-mail: nat1943@mail.ru*

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor