

УДК 519.977

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ВИДОВОГО СОСТАВА БИОСООБЩЕСТВА

А. Н. Кириллов¹, А. С. Иванова¹

¹*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Предлагается динамическая модель, описывающая различные стадии взаимодействия в ареале популяций хищника и жертвы. Переход от одной к другой стадии определяется значениями функции, имеющей смысл пищевой привлекательности ареала. При условии, что пищевая привлекательность ареала не ниже некоторого порогового значения, взаимодействие популяций описывается системой Лотки-Вольтерры. В противном случае популяция хищника переходит в стадию миграции. В модели также предусмотрена возможность колонизации ареала популяцией хищника. Решается задача сохранения видового состава ареала за счет отбора особей. Интенсивность отбора полагается кусочно-постоянной управляющей функцией. Строится управление, позволяющее согласовывать антропогенное воздействие на ареал с естественным развитием биосообщества. В результате процесс управления приобретает периодический или квазипериодический характер, в зависимости от начальных значений численностей популяций. Предложенная модель представляет собой трехмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной структурой. Проведен качественный анализ системы.

Ключевые слова: управление; видовой состав; переменная структура; периодический процесс.

A. N. Kirillov, A. S. Ivanova. PERIODIC AND QUASIPERIODIC CONTROL PROCESSES IN THE BIOCOMMUNITY SPECIES COMPOSITION PRESERVING PROBLEM

The dynamical model describing several stages of interaction between populations of predators and preys in some area is proposed. The transition from one stage to another is determined by the values of the function which has the sense of trophical attractiveness of a species area. Under condition that the trophical attractiveness not less than threshold value the interaction of populations is described by the Lotka-Volterra system. Otherwise, the predator population transfers to a migration stage. The model also describes the process of colonization of the area by predators. The problem of species composition preserving by selection is solved. The selection intensity is considered as a control function. The control which permits to coordinate the anthropogenic impact with natural development of a biocommunity is constructed. As a result, the control process acquires the periodic or quasiperiodic nature which depends on the initial values of populations size.

The proposed model is described by the three dimensional system of ordinary differential equations with variable structure. The qualitative analysis of the system is carried out.

Key words:

control; species composition; variable structure; periodic process.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из разделов математической экологии является теория фуражирования. Многочисленные работы посвящены этому разделу [3, 5, 6, 8, 9]. Согласно теории фуражирования, пищевой ресурс, потребляемый популяцией, распределен по ареалам и популяция мигрирует между ними. Перед популяцией возникают две задачи: выбора ареала и определения момента времени ухода из него в случае недостатка пищевого ресурса. В известной работе Э. Чарнова (E. Charnov) [5] была предложена статическая модель, дающая условия ухода популяции из ареала.

В настоящей работе представлена динамическая модель, описывающая как уход популяции из ареала, так и возврат популяции в ареал.

В качестве популяции и пищевого ресурса рассматриваются популяции хищника и жертвы, соответственно. Исследуемая модель представляет собой систему с переменной структурой. Помимо дифференциальных уравнений относительно численностей популяций, она содержит дифференциальное уравнение относительно пищевой привлекательности ареала. Рассматриваемая модель описывает следующие стадии взаимодействия популяций: уход и возврат популяции хищника, взаимодействие популяций, поведение жертвы в отсутствие хищника в ареале. Каждая стадия задается отдельной системой. Взаимодействие популяций описывается системой Лотки-Вольтерры.

Изменение пищевой привлекательности обеспечивает переход от одной стадии взаимодействия к другой. В настоящей работе решается задача сохранения видового состава ареала за счет изъятия особей. В отличие от работы [2], в которой состав ареала сохранялся путем постоянного изъятия особей, в этой работе предлагается согласовать внешнее вмешательство в биосообщество с естественной периодичностью процессов в нем, что позволит уменьшить антропогенную нагрузку на ареал. Предложен метод кусочно-постоянного управления интенсивностями изъятия особей, позволяющий сделать процесс управления периодическим или квазипериодическим в некотором смысле, что зависит от начальных значений численностей популяций.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В работе [1] построена модель динамики популяций хищника и жертвы в ареале, согласно которой популяция жертвы не покидает ареал, а популяция хищника может как покидать ареал, так и возвращаться обратно в зависимости от его пищевой привлекательности. Для описания пищевой привлекательности ареала предложено использовать функцию $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ вида

$$\tilde{n}(t) = \tilde{n}(t_0) + \int_{t_0}^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau, \quad (1)$$

где t_0 – момент времени появления популяции хищника в ареале, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – численности популяций жертвы и хищника, соответственно, $0 < \lambda$ – заданная пороговая постоянная. \tilde{n} зависит от количества особей жертвы, приходящегося на одного хищника, т. е. от величины отношения $\frac{x_1}{x_2}$. Отметим, что на значимость отношения жертва/хищник для описания динамики популяций обратил внимание Р. Ардити (R. Arditi) в [4].

Пусть $0 < \Lambda$ – пороговое значение пищевой привлекательности ареала. Если $\tilde{n} < \Lambda$, то ареал непривлекательный и популяция хищника покидает его, если $\tilde{n} > \Lambda$, то ареал привлекательный и популяция хищника взаимодействует с жертвой, динамика взаимодействующих популяций описывается системой Лотки-Вольтерры.

Из (1) следует, что важное решение о миграции носит инерционный характер. Действительно, оно не должно зависеть от мгновенных значений фазовых переменных.

Продифференцировав (1) по t , получим

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \quad (2)$$

В настоящей работе будет решаться задача сохранения видового состава биосообщества за счет изъятия особей жертвы и (или) хищника с интенсивностями $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, соответственно. Далее u_1 , u_2 будем называть управляющими параметрами.

Рассмотрим модель «хищник – жертва» с миграцией популяции хищника [1], представляющую собой систему с переменной структурой, которая описывает пять режимов:

если $\tilde{n} \geq \Lambda$, то

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \quad (3)$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = x_2(-m - m_1), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \quad (4)$$

если $\tilde{n} < \Lambda, 0 < x_2 \leq \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = -d, \quad \dot{\tilde{n}} = 0, \quad (5)$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 = 0$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \quad (6)$$

если $\tilde{n} = \Lambda, x_2 < \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = d, \quad \dot{\tilde{n}} = 0, \quad (7)$$

где a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников, bx_1 – количество жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, m – коэффициент смертности хищников в отсутствие жертв, m_1 – коэффициент интенсивности миграции, причем a, b, k, m, m_1, d считаются положительными постоянными ($k < 1$), $\varepsilon^*(x_1)$, имеет вид [1]

$$\varepsilon^*(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{\lambda}, & 0 \leq x_1 < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x_1 \geq \varepsilon\lambda, \end{cases}$$

где ε – положительная постоянная.

Система (3) описывает взаимодействие между хищником и жертвой (режим P_2), (4) – миграцию хищника (режим P_{21}), (5) – исчезновение хищника из сообщества, (6) – динамику жертвы в отсутствие хищника, (7) – появление хищника в сообществе.

Рассмотрим модель «хищник – жертва» Лотки-Вольтерры, в которой учтено изъятие особей

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2 - u_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m - u_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Положение равновесия R системы (8) имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u_2}{bk}, \quad x_2 = \frac{a - u_1}{b}.$$

Уравнение фазовой траектории системы (8), проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид (при $u_1 = u_2 = 0$ см, например, [7])

$$(a - u_1) \ln x_2 - bx_2 + (m + u_2) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (9)$$

где

$$c = c(x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = (a - u_1) \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u_2) \ln x_{10} - kbx_{10}.$$

Пусть $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2)$ – левая часть уравнения (9). Несложно доказать, что $f = 0$ – выпуклая замкнутая кривая.

Поскольку в правые части первых двух уравнений системы (3) не входит \tilde{n} , то в пространстве (x_1, x_2, \tilde{n}) траектории этой системы располагаются на цилиндрах, образующие которых параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (8). Из условия, предшествующего системе (3), следует, что цилиндры располагаются в полупространстве $\tilde{n} > \Lambda$.

Нетрудно показать, что для системы (3)-(7) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

инвариантно, в связи с этим далее $x_1 > 0, x_2 \geq 0$.

Следуя работе [1], плоскость

$$\pi = \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$$

будем называть *дискриминантной*. Для точек (x_1, x_2, Λ) дискриминантной плоскости будем использовать обозначение (x_1, x_2) .

Рассмотрим луч

$$l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0, x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

и два конуса:

$$\pi^+ = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 > 0, x_2 \geq 0\},$$

$\pi^- = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 < 0, x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$. Пусть $E = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 < \varepsilon^*(x_1)\}$. Из (3), (4) следует, что $M \in \pi^+ \setminus E$ – начальная точка режима P_2 , $M \in \pi^-$ – начальная точка режима P_{21} .

Определение 1. [2] Кусочно-постоянные управляющие параметры u_1, u_2 называются *допустимыми*, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1 < a, \\ u_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\Pi = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b}, \\ \emptyset, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}, \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b}, \\ \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geq \frac{m}{bk}, x_2 \geq \varepsilon\}, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}, \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{a}{b}\}, \\ \text{если или } 0 < \varepsilon \leq \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } 0 < \varepsilon < \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } 0 < \varepsilon < \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}, \\ \emptyset, \\ \text{если или } \varepsilon > \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } \varepsilon \geq \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } \varepsilon \geq \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}, \end{cases}$$

Для этих множеств в работе [2] были найдены допустимые u_1, u_2 , сохраняющие состав биосообщества, а именно, были доказаны следующие результаты.

Теорема 1. [2] Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \Pi$. Тогда если

$$\begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20}, \\ u_2 &= kbx_{10} - m, \end{aligned} \quad (10)$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Теорема 2. [2] Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_1$. Тогда если

$$\begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (kbx_{10} - m - u_2), \\ kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (bx_{20} - a) &\leq u_2 < \\ &< kbx_{10} - m + \frac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned} \quad (11)$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

Теорема 3. [2] Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_2$. Тогда если

$$\varepsilon > \frac{m}{b(1+k\lambda)} \quad u$$

Определение 2. [2] Если траектория системы (3)-(7), начавшаяся в $M(x_1, x_2)$ содержится в полупространстве $\tilde{n} \geq \Lambda$, то точка M называется *точкой сохранения состава биосообщества*.

Рассмотрим следующие множества плоскости π :

$$\begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (kbx_{10} - m - u_2), \\ 0 &\leq u_2 < kbx_{10} - m + \frac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned} \quad (12)$$

то M_0 является точкой сохранения состава биосообщества.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВРЕМЕНЕМ ИЗЪЯТИЯ ОСОБЕЙ И ПОВЕДЕНИЕМ ПОПУЛЯЦИИ ХИЩНИКА ПОСЛЕ ПРЕКРАЩЕНИЯ ИЗЪЯТИЯ

Предположим, что в течение промежутка времени длины τ производится изъятие особей, где $0 < \tau$ – некоторая постоянная. По истечении времени τ изъятие прекращается. Изучим дальнейшее поведение популяции хищника.

Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \pi$. Пусть $\tilde{T}(M_0)$ – период решения $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ системы Лотки-Вольтерры (8), соответствующего процессу изъятия, т. е. при $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$, $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (x_{10}, x_{20})$. Пусть $T(M_0)$ – период решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы Лотки-Вольтерры при $(u_1, u_2) = (0, 0)$ (нет изъятия), $(x_1(\tau), x_2(\tau)) = (x_{10}, x_{20})$.

Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$, $M_0 \in \pi^+$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{F} = \{t : t \in [\tau, \tau + T(M_0)) : x_1(t) - \lambda x_2(t) = 0\}.$$

Так как фазовые траектории являются выпуклыми, вложенными друг в друга и решение имеет период $T(M_0)$, то множество \mathcal{F} содержит два элемента. Введем обозначения:

$$t_1 = \min \mathcal{F} - \tau, \quad t_2 = \max \mathcal{F} - \tau. \quad (13)$$

Поскольку траектории системы (3) располагаются на цилиндрических поверхностях, то естественно ввести следующее определение.

Определение 3. *Полным оборотом точки траектории системы (3) будем называть отрезок траектории, соответствующий промежутку времени, равному периоду.*

Найдем величину изменения $\tilde{n}(t)$ на временном промежутке длины T , где T – период решения системы Лотки-Вольтерры.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt = \frac{aT}{b} \left(\frac{m}{ak} - \lambda \right).$$

Доказательство. Известно [7], что

$$\int_0^T x_1(t) dt = \frac{mT}{kb}, \quad \int_0^T x_2(t) dt = \frac{aT}{b}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt = \\ &= \int_0^T x_1(t) dt - \lambda \int_0^T x_2(t) dt = \frac{aT}{b} \left(\frac{m}{ak} - \lambda \right). \end{aligned}$$

□

Теорема 4. *Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$, M_0 – начальная точка траектории системы (3). Тогда если $M_0 \in K_1$,*

$$u_1 = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} kb x_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (b x_{20} - a), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

или $M_0 \in K_2$, $\varepsilon > \frac{m}{b(1+k\lambda)}$,

$$u_1 = \begin{cases} a - b x_{20} - \lambda \frac{x_{20}}{x_{10}} (k b x_{10} - m), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = 0, \quad t \geq 0,$$

где $\tau = N_0 \tilde{T}(M_0)$, $N_0 \in \mathbb{N}$, то количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ до попадания на плоскость π , равно

$$N + 1,$$

где

$$N = \left\lfloor \frac{H + \int_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt}{|\Delta|} \right\rfloor, \quad (14)$$

$$H = N_0 \tilde{\Delta},$$

t_2 определено в (13), $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}}{b} \left(\frac{(m+u_2)}{(a-u_1)k} - \lambda \right)$.

Доказательство. Докажем теорему для первого случая, т. е. пусть $M_0 \in K_1$,

$$u_1 = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} kb x_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (b x_{20} - a), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

u_1, u_2 при $0 \leq t \leq \tau$ удовлетворяют (11). В доказательстве теоремы 2 [2] было получено, что при таких управляющих параметрах точка траектории системы (3), начинающейся в M_0 , поднимается (т. е. \tilde{n} увеличивается) по цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = 0\}$. Из $\tilde{T}(M_0)$ – периодичности решения $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ и леммы 1 следует, что за время $\tau = N_0 \tilde{T}(M_0)$ точка траектории поднимется на высоту

$$H = \tilde{n}(\tau) - \tilde{n}(0) = \int_0^{\tau} (\tilde{x}_1(t) - \lambda \tilde{x}_2(t)) dt = N_0 \tilde{\Delta},$$

где $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}}{b} \left(\frac{(m+u_2)}{(a-u_1)k} - \lambda \right)$. Причем очевидно, что $\tilde{x}_1(\tau) = x_{10}$, $\tilde{x}_2(\tau) = x_{20}$.

Далее, начиная с момента времени τ , траектория располагается на цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0\}$. При $\tau \leq t \leq \tau + t_1$ точка траектории поднимается на величину

$$\int_{\tau}^{\tau+t_1} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt,$$

где t_1 определено в (13), при $\tau + t_1 \leq t \leq \tau + t_2$ – спускается (т. е. \tilde{n} уменьшается) на величину

$$\left| \int_{\tau+t_1}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt \right|.$$

Таким образом, расстояние от траектории до плоскости π , в момент времени $\tau + t_2$, равно

$$H + \int_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt.$$

Пусть в моменты времени $t \geq \tau$ и $t + T(M_0)$ точка траектории принадлежит цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0\}$. Тогда из $T(M_0)$ – периодичности решения системы Вольтерры следует

$$\begin{aligned} \tilde{n}(t+T(M_0)) - \tilde{n}(t) &= \int_t^{t+T(M_0)} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt = \\ &= \int_0^{T(M_0)} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму 1, получаем, что с каждым полным оборотом точка траектории системы (3) спускается на величину $|\Delta|$.

Значит, точка траектории, начиная с момента времени $\tau + t_2$ до попадания на плоскость π , совершит следующее количество полных оборотов

$$N = \left\lfloor \frac{H + \int_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt}{|\Delta|} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – символ целой части числа.

При $\tau + t_2 + NT(M_0) \leq t \leq \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0)$ точка траектории поднимается, после чего спускается при $\tau + t_1 + (N + 1)T(M_0) \leq t \leq \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0) + t_3$, где $0 < t_3 < t_2 - t_1$, $t = \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0) + t_3$ – момент попадания траектории на плоскость π .

Отметим, что, спускаясь на промежутке времени $\tau + t_1 \leq t \leq \tau + t_2$ длиной $t_2 - t_1$ и поднимаясь на промежутке времени $\tau + t_2 + NT(M_0) \leq t \leq \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0)$ длиной $T(M_0) - (t_2 - t_1)$, точка траектории образует один оборот. Таким образом, начиная с момента времени τ , точка траектории, до попадания на плоскость π , совершит $N + 1$ полных оборотов.

Отличие доказательства теоремы для второго случая состоит в том, что в начале доказательства используется теорема 3 [2]. \square

Теорема 5. Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$, $\Pi \ni M_0$ – начальная точка траектории системы (3)–(7),

$$u_1 = \begin{cases} a - bx_{20}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} b k x_{10} - m, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

где $0 < \tau$ – некоторая постоянная. Тогда количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ , до попадания на плоскость π , равно

$$N + 1,$$

где N определено в (14), причем $H = (x_{10} - \lambda x_{20})\tau$, t_2 определено в (13).

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4. Отличие состоит в том, что в начале ее доказательства используется теорема 1 [2].

Замечание 1. Теоремы 4, 5 имеют место, когда τ удовлетворяет неравенству

$$H > h, \quad (15)$$

где $h = \Delta + \int_0^{t_4} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt$, $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda + \Delta\} \ni M$ – начальная точка такой траектории, что $\tilde{n}(T(M_0)) = \Lambda$, $t_4 \in (0, T(M_0))$, причем $x_1(t_4) = x_{10}$, $x_2(t_4) = x_{20}$. Если для τ (15) не выполнено, то точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ , не совершив ни одного полного оборота, попадет на плоскость π .

Замечание 2. Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$, $M_0 \in K_1 \cup K_2 \cup \Pi$ – начальная точка траектории системы (3) и на промежутке времени $[0, \tau]$ производится изъятие особей с интенсивностями u_1, u_2 , где τ, u_1, u_2 из теорем 4, 5. Тогда M_0 – точка сохранения состава биосообщества, если τ удовлетворяет (15), где $h = \int_0^{t_5} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt$, $\pi^+ \ni M$ – начальная точка траектории, для которой существуют $t_1, t_2 \in (0, T(M_0))$ – время первого и второго попадания этой траектории на плоскость $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$, причем $\tilde{n}(t_2) = \Lambda$, $(0, t_1) \ni t_5$ такое, что $x_1(t_5) = x_{10}$, $x_2(t_5) = x_{20}$. Если τ не удовлетворяет (15), то траектория, начинающаяся в M_0 , достигнет π^- , после чего начнется режим P_{21} .

Замечание 3. Пусть $\lambda = \frac{m}{ak}$, $M_0 \in K_1 \cup K_2 \cup \Pi$ – начальная точка траектории системы (3) и на промежутке времени $[0, \tau]$ производится изъятие особей с интенсивностями u_1, u_2 , где

τ, u_1, u_2 из теорем 4, 5. Тогда M_0 – точка сохранения состава биосообщества, если для τ выполнено (15), где $h = \int_0^{t_6} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt, l \ni M$ – начальная точка такой траектории, что $\tilde{n}(T(M_0)) = \Lambda, (0, T(M_0)) \ni t_6$ такое, что $x_1(t_6) = x_{10}, x_2(t_6) = x_{20}$. Если (15) не выполнено, то начнется миграция хищника.

Справедливость замечаний 1–3 следует из леммы 1.

Итак, в случае $\lambda \leq \frac{m}{ak}$, т. е. когда хищнику для удовлетворения его биологических потребностей требуется небольшое количество жертвы, изъятие особей, в течение определенного времени τ , обеспечит сохранение видового состава ареала. В случае $\lambda > \frac{m}{ak}$ из теорем 4, 5 и замечания 1 получаем, что при любом $\tau > 0$ траектория системы (3) попадает на π , а именно на π^- , после чего начинается режим P_{21} . В этом случае предлагаются процессы управления, обеспечивающие сохранение состава биосообщества при меньшем внешнем воздействии на ареал.

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть сначала $M_0 \in \Pi$. Используя теорему 5, опишем процесс управления. Пусть $D = \frac{(N+1)\Delta}{x_{10} - \lambda x_{20}}$. Будем полагать при $0 \leq t \leq \tau$

$$u_1 = a - bx_{20}, \quad u_2 = b k x_{10} - m,$$

при $\tau + (k-1)(N+1)T(M_0) + (k-1)D \leq t \leq \tau + k(N+1)T(M_0) + (k-1)D$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

при $\tau + k(N+1)T(M_0) + (k-1)D \leq t \leq \tau + k(N+1)T(M_0) + kD$

$$u_1 = a - bx_{20}, \quad u_2 = b k x_{10} - m,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, процесс управления периодичен и его период \mathcal{T} равен

$$\mathcal{T} = (N+1)T(M_0) + \frac{(N+1)\Delta}{x_{10} - \lambda x_{20}}.$$

Далее, используя теорему 4, опишем процесс управления для $M_0 \in K_1$.

При $(k-1)\tau + \sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0) \leq t \leq$

$$k\tau + \sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0)$$

$$u_1 = 0, u_2 = k b x_{10} - m + \frac{1}{\lambda} \frac{x_{10}}{x_{20}} (b x_{20} - a),$$

при $k\tau + \sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0) \leq t \leq k\tau + \sum_{i=1}^k (N_i + 1)T(M_0)$

$$u_1 = 0, u_2 = 0,$$

где k – номер этапа процесса управления ($k = 1, 2, 3, \dots$), причем будем полагать $\sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0) = 0$, если $k = 1$, $N_i + 1$ – количество полных оборотов, которые совершит точка траектории на i -ом этапе процесса управления.

Введем обозначение

$$\tilde{n}_k = \tilde{n}(k\tau + \sum_{i=1}^k (N_i + 1)T(M_0)).$$

Отметим, что последовательности $\{N_k\}, \{\tilde{n}_k\}$ являются ограниченными. Действительно, из доказательства теоремы 4 следует

$$\Lambda \leq \tilde{n}(k\tau + \sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0) + t_2 + N_k T(M_0)) \leq \Lambda + \Delta.$$

Значит,

$$\Lambda + \int_0^{T(M_0) - t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt \leq \tilde{n}(k\tau + \sum_{i=1}^{k-1} (N_i + 1)T(M_0) + t_2 + N_k T(M_0) + T(M_0) - t_2) \leq \Lambda + \Delta + \int_0^{T(M_0) - t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt,$$

где $(x_1(0), x_2(0))$ – точка пересечения луча l с траекторией $f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0$, имеющая меньшие координаты. Обозначив левую и правую части последнего двойного неравенства через $\tilde{n}_{min}, \tilde{n}_{max}$, соответственно, получим

$$\tilde{n}_{min} < \tilde{n}_k \leq \tilde{n}_{max}.$$

Заметим, что \tilde{n}_{min} соответствует наименьшее количество оборотов, до попадания на плоскость π , обозначим его через $N_{min} + 1$, а \tilde{n}_{max} соответствует наибольшее количество оборотов, до попадания на плоскость π , обозначим его через $N_{max} + 1$. Отсюда получаем

$$N_{min} < N_k \leq N_{max}.$$

Предложенный процесс управления будем называть квазипериодическим.

Аналогичным образом, используя теорему 4, можно описать квазипериодический процесс управления для $M_0 \in K_2$.

Квазипериодичность процесса управления для $M_0 \in K_1 \cup K_2$ мотивируется тем, что отрезок $[\Lambda, \Lambda + |\Delta|]$ отображается в себя вдоль траекторий процесса управления. При этом при $\Delta = 0$ процесс становится периодическим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для модели, рассмотренной в настоящей работе, в зависимости от начальных численностей популяций, предложен периодический или квазипериодический процесс управления, позволяющий сохранить состав ареала, уменьшив антропогенную нагрузку на него. Таким образом, согласовано внешнее вмешательство в ареал с естественными процессами в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, № 2. С. 318–336.
2. Кириллов А. Н., Иванова А. С. Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 239–258.
3. Aehortua A. M., Ladino L. M., Valverde J. C. Population dynamics of a two-stage migratory

REFERENCES

1. Kirillov A. N. Ekologicheskie sistemy s peremennoi razmernost'yu [Ecological systems with variable dimensions]. Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki [Surveys in applied and industrial mathematics]. 1999. Vol. 6, N 2. P. 318–336.
2. Kirillov A. N., Ivanova A. S. Ravnovesie i upravlenie v zadache sokhraneniya vidovogo sostava biosoobshchestva [Equilibrium and control in the problem of species composition protection in biocommunity]. Upravlenie bol'shimi sistemami [Large-scale systems control]. 2015. Vol. 55. P. 239–258.
3. Aehortua A. M., Ladino L. M., Valverde J. C. Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014. Vol. 16. P. 27–39.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, доцент, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Иванова Александра Сергеевна
аспирант
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: a_s_ivanova@bk.ru
тел.: (8142) 766312

species with predation and capture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014. Vol. 16. P. 27–39.

4. Arditi R., Ginzburg L. R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.
5. Charnov E. L. Optimal foraging, the marginal value theorem // Theoretical population biology. 1976. Vol. 9, N 2. P. 129–136.
6. Charnov E. L. Life history invariants // Oxford University Press. 1993. 167 p.
7. Leonov G. A. Mathematical problems of control theory: an introduction // World Scientific. 2001. 172 p.
8. Nonacs P. State dependent behavior and the marginal value theorem // Behavioral Ecology. 2013. Vol. 12, N 1. P. 71–83.
9. Stephens D. W., Krebs J. R. Foraging theory // Princeton University Press. Princeton. 1986. 247 p.

Поступила в редакцию 07.04.2015

4. Arditi R., Ginzburg L. R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.
5. Charnov E. L. Optimal foraging, the marginal value theorem. Theoretical population biology. 1976. Vol. 9, N 2. P. 129–136.
6. Charnov E. L. Life history invariants. Oxford University Press. 1993. 167 p.
7. Leonov G. A. Mathematical problems of control theory: an introduction. World Scientific. 2001. 172 p.
8. Nonacs P. State dependent behavior and the marginal value theorem. Behavioral Ecology. 2013. Vol. 12, N 1. P. 71–83.
9. Stephens D. W., Krebs J. R. Foraging theory. Princeton University Press. Princeton. 1986. 247 p.

Received April 07, 2015

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Ivanova, Alexandra
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: a_s_ivanova@bk.ru
tel.: (8142) 766312