

УДК 519.977

## ПОВЕДЕНИЕ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ ВЫБОРЕ АРЕАЛА: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. Н. Кириллов<sup>1</sup>, И. В. Данилова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

<sup>2</sup> *Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет, Россия*

Рассматривается задача выбора популяцией наиболее пригодного ареала для случая двух ареалов, расположенных на концах отрезка. Предполагается, что популяция перемещается внутри заданного отрезка с постоянной скоростью. Вводятся функции полезности рассматриваемых ареалов с учетом неполноты меры информированности об их качестве, истинной полезности каждого ареала и затрат на перемещение к ним. С помощью введенных функций полезности заданный отрезок делится на области предпочтительной полезности, из чего можно сделать выводы о предпочтениях популяции. Также рассматривается задача оптимизации численности популяции в ареале и анализируются условия, при которых ее численность максимизируется.

Ключевые слова: функция полезности; область предпочтительной полезности; мера информированности.

**A. N. Kirillov, I. V. Danilova. THE BEHAVIOR OF A  
POPULATION WHEN CHOOSING A PATCH: A ONE-  
DIMENSIONAL CASE**

The problem of selection of the most suitable patch by a population is considered for the case of two patches located at the ends of a segment. It is assumed that the population moves within the given segment at constant speed. Utility functions of the patches are introduced, taking into account the incompleteness of the measure of awareness of the patch quality, the true utility of each patch, and the cost of moving to the patch. Using these utility functions, the segment is divided into preferred utility domains, enabling conclusions regarding the population's preferences. We also study the problem of optimization of the population size in the patch, and analyze the conditions under which its size is maximized.

Key words: utility function; preferred utility domain; measure of awareness.

---

### ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени основной концепцией, используемой для исследования задачи выбора популяцией ареала, являлась концепция

идеального свободного распределения (Ideal Free Distribution, IFD) [2–6]. Согласно этой концепции, среди особей популяции существует равная конкуренция, при этом популяция

имеет точную информацию о качестве ареалов и не несет затрат на перемещение между ними. Но эмпирические наблюдения экологов показали, что концепция IFD не отражает реальную ситуацию при выборе ареалов. В качестве альтернативы работе [6] был предложен подход, основанный на введении функций полезности, отражающих факторы, не учтенные в концепции идеального свободного распределения.

В работе [1] было введено понятие области предпочтительной полезности (ОПП)  $D_i$  ареала  $A_i$  с точки зрения популяции  $M$ , где  $A_i$  и  $M$  – точки пространства  $\mathbb{R}^n$ . Смысл этого понятия заключается в следующем: находясь в области  $D_i$ , популяция из множества ареалов с большей вероятностью выберет ареал  $A_i$ . На основе подхода [6] в данной работе вводится функция полезности  $U_i$   $i$ -го ареала, в которую входят: мера информированности  $I_i$  популяции о качестве рассматриваемого ареала, его истинная полезность  $V_i$  и затраты на перемещение к нему  $T_i$ . С учетом введенных функций полезности в пространстве  $\mathbb{R}^n$  выделяются области предпочтительной полезности рассматриваемых ареалов.

В представленной статье рассматриваются две задачи, связанные с моделированием поведения популяции при выборе ареала и при нахождении в нем. В задаче выбора рассмотрен одномерный случай, когда ареалы – концы отрезка, а популяция принадлежит ему. Далее рассматривается задача нахождения доли популяции в ареале, при которой ее численность максимальна.

### ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОПУЛЯЦИЕЙ АРЕАЛА. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Введем определение области предпочтительной полезности в  $\mathbb{R}^n$  [1].

**Определение 1.** Область предпочтительной полезности  $D_i$  ареала  $A_i$  – это множество точек  $M$  вида:  $D_i = \{M \in \mathbb{R}^n : \rho(M, A_i) = d_i, U_i(d_i) > U_j(d_j), i \neq j, j = 1, \dots, m\}$ .

Рассмотрим одномерный случай. Пусть два ареала расположены на концах отрезка  $[A_1; A_2]$  длины  $2l$  и имеют истинные полезности  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. Популяция перемещается внутри отрезка  $[A_1; A_2]$ . Будем считать, что ареал  $A_2$  лучше, чем  $A_1$ , т. е.  $V_2 > V_1$ . Пусть  $d_1 = d_1(t)$  и  $d_2 = d_2(t)$  – расстояния от популяции  $M$  до первого и второго ареалов в момент времени  $t$ , тогда  $d_1(t) + d_2(t) = 2l$ . Таким образом, ставится задача выбора популяцией одного из ареалов, расположенных на концах рассматриваемого отрезка.

С учетом подхода [6] в настоящей работе предложены функции полезности, которые в применении к нашей задаче имеют следующий вид:

$$U_i(d_i) = I_i(d_i)V_i - T_i(d_i) + (1 - I_i(d_i))\bar{V}, i = 1, 2,$$

где  $U_i$  – полезность  $i$ -го ареала с точки зрения популяции, находящейся на расстоянии  $d_i$  от него,  $V_i$  – истинная полезность  $i$ -го ареала,  $I(d_i)$  – мера информированности популяции, находящейся на расстоянии  $d_i = d_i(t)$  от ареала  $A_i$ ,  $I(d_i)$  удовлетворяет условиям:  $I(0) = 1$ ,  $I(2l) = 0$ ,  $T(d_i)$  – затраты популяции на перемещение к  $i$ -му ареалу на расстояние  $d_i$ ,  $T(d_i)$  удовлетворяет следующим условиям:  $T(0) = 0$ ,  $T(2l) = 1$ ,  $\bar{V} = \frac{I_1(d_1)V_1 + I_2(d_2)V_2}{I_1(d_1) + I_2(d_2)}$  – средняя информированность популяции об ареалах.

**Определение 2.** Области  $D_1$  и  $D_2$  предпочтительной полезности ареалов, имеющих истинные полезности  $V_1$  и  $V_2$ , – это множества точек отрезка  $[A_1; A_2]$  вида:

$$D_1 = \{d_2 \in [0, 2l], U_1(2l - d_2) > U_2(d_2)\},$$

$$D_2 = \{d_2 \in [0, 2l], U_1(2l - d_2) < U_2(d_2)\}.$$

Несложно заметить, что  $D_1$  и  $D_2$  – отрезки, принадлежащие  $[A_1; A_2]$ .

Пусть  $I(d_i) = 1 - \frac{d_i}{2l}$ ,  $T(d_i) = \frac{d_i}{2l}$ . Таким образом, функции полезности  $U_i$  для ареалов  $A_1$  и  $A_2$  примут вид:  $U_i(d_i) = \left(1 - \frac{d_i}{2l}\right)V_i - \frac{d_i}{2l} + \frac{d_i}{2l} \left( \left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 + \frac{d_1}{2l}V_2 \right)$ ,  $i = 1, 2$ .

В предложенных функциях полезности учитывается неполнота информации популяции об истинных полезностях  $V_i$  ареалов, что является следствием удаленности популяции  $M$  от ареала  $A_i$ .

Будем считать, что популяция движется с постоянной скоростью. Если в некоторый момент времени  $t$  выполняется условие  $U_1(d_1(t)) > U_2(d_2(t))$ , то популяция движется к ареалу  $A_1$ . В случае  $U_2(d_2(t)) > U_1(d_1(t))$  популяция движется к ареалу  $A_2$ .

Из вышесказанного следует, что для задания направления движения важно найти точку отрезка  $[A_1; A_2]$ , в которой  $U_1(d_1) = U_2(d_2)$ . Поскольку  $d_1 + d_2 = 2l$ , то получим равенство

$$U_1(2l - d_2) = U_2(d_2). \quad (1)$$

Будем считать, что  $d_2 = d_2(t)$  – координата в момент времени  $t$  движущейся на отрезке  $[A_1; A_2]$  популяции  $M$ . Уравнение (1), с учетом выражений для  $I(d_i)$  и  $T(d_i)$ , примет

следующий вид:  $\left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 - \frac{d_1}{2l} + \frac{d_1}{2l} \left(\left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 + \frac{d_1}{2l}V_2\right) = \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)V_2 - \frac{d_2}{2l} + \frac{d_2}{2l} \left(\frac{d_2}{2l}V_1 + \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)V_2\right)$ . После несложных преобразований, учитывая, что  $d_1 = 2l - d_2$ , получим

$$U_1(2l - d_2) = V_1 - \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right) + (V_2 - V_1) \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)^2,$$

$$U_2(d_2) = V_2 - \frac{d_2}{2l} - \left(\frac{d_2}{2l}\right)^2 (V_2 - V_1).$$

Таким образом, получили  $V_1 - \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right) + (V_2 - V_1) \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)^2 = V_2 - \frac{d_2}{2l} - \left(\frac{d_2}{2l}\right)^2 (V_2 - V_1)$ . Обозначим  $a = V_2 - V_1$ ,  $x = \frac{d_2}{2l}$ . После несложных преобразований получим квадратное уравнение:  $2ax^2 - 2(a - 1)x - 1 = 0$ . Найдем его корни:  $x_1 = \frac{a - 1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{a - 1 - \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ . Несложно показать, что  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$ .

Таким образом, искомая точка  $C$ , принадлежащая отрезку, это точка с координатой  $d_2 = l \frac{a - 1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$ , т. е.  $C$  – это граница ОПП ареалов  $A_1$  и  $A_2$ .



Рис. 1. Области предпочтительной полезности  $D_1$  и  $D_2$  для двух ареалов  $A_1$  и  $A_2$

Fig. 1. Domains of preferred utility  $D_1, D_2$  for two patches  $A_1$  и  $A_2$

На рис. 1 показано деление отрезка  $[A_1; A_2]$  на области предпочтительной полезности двух ареалов, где найденная точка  $C$  – граница этих областей.

### НАХОЖДЕНИЕ ДОЛИ ПОПУЛЯЦИИ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ ЕЕ ЧИСЛЕННОСТЬ: КОНЕЧНОЕ $T$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее динамику численности популяции в некотором ареале:

$$\dot{x} = x(ap - \mu(1 - p) - bp^2x), \quad (2)$$

где  $a$  – скорость роста популяции,  $\mu$  – скорость миграции популяции из ареала,  $b$  – коэффи-

циент внутривидовой конкуренции,  $p$  – вероятность того, что популяция останется в ареале. Ставится задача нахождения доли популяции  $p$ , максимизирующей численность популяции  $x(t, p)$  в некоторый фиксированный момент времени  $T$ . Решение  $x(t, p)$  уравнения (2), как функция параметра  $p$ , имеет вид:  $x(T, p)$

$$= \frac{((a + \mu)p - \mu)x_0}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)e^{(\mu - (a + \mu)p)T} + x_0bp^2}, \quad (3)$$

где  $x_0 = x(0, p)$ . Будем считать, что скорость роста популяции больше скорости миграции из ареала  $a > \mu$ . Введем обозначения:  $z = a + \mu$ ,  $y = bx_0$  и  $c = e^{\mu T}$ . Производная решения (3) после преобразований примет вид:  $x'_p(T, p) =$

$$\frac{yp(zp - 2\mu)c((1 - e^{zpT - \mu T}) + \frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)})}{((zp - \mu - yp^2)c + yp^2e^{zpT})^2}.$$

Уравнение  $x'_p(T, p) = 0$  можно записать в виде

$$\frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)} = e^{zpT - \mu T} - 1.$$

Обозначим  $f_1(p) = \frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)}$  и  $f_2(p) = e^{zpT - \mu T} - 1$ .

**Теорема 1.** При любом  $x_0 > 0$  уравнение  $\frac{bx_0p^2}{bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p} = e^{-(a + \mu)pT + \mu T}$  имеет единственное решение.

*Доказательство.* Введем обозначения  $g_1(p) = \frac{bx_0p^2}{bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p}$  и  $g_2(p) = e^{-(a + \mu)pT + \mu T}$ . Рассмотрим функцию  $g_1(p)$ . Несложно показать, что эта функция имеет горизонтальную асимптоту  $g(p) = 1$ . Найдем ее вертикальные асимптоты, приравняв к нулю знаменатель. Рассмотрим дискриминант рассматриваемого квадратного уравнения  $D = z^2 - 4\mu bx_0$ . Возможны следующие ситуации для  $D$ :

1)  $D = 0$ . Тогда  $x_0 = \frac{z^2}{4\mu b}$ . Получим единственный корень  $p = \frac{a + \mu}{2bx_0}$ . Подставив  $x_0$  в  $p$ , получим  $p = \frac{2\mu}{a + \mu}$ . Таким образом,  $g_1(p) > 0$  при  $p \in (0, p_1)$  и  $g_1(p) < 0$  при  $p > p_1$ . Найдем производную функции  $g_1(p)$  и после несложных преобразований получим  $g'_1(p) = \frac{2\mu - p(a + \mu)}{(bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p)^2}$ . Очевидно, что слева от вертикальной асимптоты  $p$  функция  $g_1(p)$

возрастает, тогда  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  имеют единственную точку пересечения при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

2)  $D > 0$ . Из этого следует, что  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ , и тогда  $g_1(p)$  имеет две вертикальные асимптоты  $p_{1,2} = \frac{a + \mu \pm \sqrt{D}}{2bx_0}$ . Несложно показать, что  $\frac{a + \mu - \sqrt{D}}{2bx_0} > \frac{\mu}{a + \mu}$ . Получим единственное пересечение  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

3)  $D < 0$ . В этом случае вертикальных асимптот нет. Очевидно, что  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  имеют единственную точку пересечения при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

Таким образом, уравнение  $x'_p(T, p) = 0$  имеет единственное решение.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ , то при любом  $T > 0$  функция (3) имеет единственную точку максимума  $p^*$ , при этом  $p^* \in \left(\frac{2\mu}{z}, +\infty\right)$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что уравнение  $f_1(p) = 0$  имеет три различных корня, один из которых равен  $\frac{\mu}{z}$ .

Если  $p_1, p_2$  и  $p_3 = \frac{\mu}{z}$  – корни уравнения  $f_1(p) = 0$ , то  $p_1 \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ ,  $p_2 > \frac{2\mu}{z}$ . Так как дискриминант  $D = z^2 - 4\mu y > 0$ , то выполняется условие  $z^2 > 4\mu y$ . Тогда  $p_{1,2} = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\mu y}}{2y}$ . Несложно показать, что  $\frac{\mu}{z} < p_1 < \frac{2\mu}{z}$ ,  $p_2 > \frac{2\mu}{z}$ .

Определим знак функции  $f_1(p)$ . Эта функция имеет две вертикальные асимптоты  $p = 0$  и  $p = \frac{2\mu}{z}$ ,  $f_1(p) > 0$  при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, p_1\right) \cup \left(\frac{2\mu}{z}, p_2\right)$ ,  $f_1(p) < 0$  при  $p \in \left(0, \frac{\mu}{z}\right) \cup \left(p_1, \frac{2\mu}{z}\right) \cup \left(p_2, +\infty\right)$ .

Очевидно, что  $f_1(p) = f_2(p) = 0$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . Проверим, есть ли еще пересечения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$ . Для этого построим уравнения касательных к этим функциям в точке  $p = \frac{\mu}{z}$ .

Найдем значение производной функции  $f_1(p)$  по параметру  $p$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . С учетом корней  $p_1$  и  $p_2$  получим  $f_1(p) = \frac{-zT(p-d)(p-p_1)(p-p_2)}{p(p-2d)}$ , где  $d = \frac{\mu}{z}$ .

Таким образом,

$$f'_1(p) = \frac{-zT\left(p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2 + 2d\frac{\mu}{y}p - 2d^2\frac{\mu}{y}\right)}{(p^2 - 2dp)^2},$$

из чего следует  $f'_1(d) = zT$ . Таким образом, получим уравнение касательной для функции  $f_1(p)$  в точке  $p = d$ :  $k_1 = zT(p - d)$ .

Найдем производную  $f_2(p)$  в точке  $p = d$ , получим  $f'_2(d) = zT$ . Очевидно, что уравнение касательной для  $f_2(p)$  при  $p = d$  также будет  $k_2 = k_1 = zT(p - d)$ .

Исследуем взаимное расположение графиков функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  при  $p \in (0, 2d)$ . Найдем точки пересечения общей касательной  $k = k_1 = k_2$  и  $f_1(p)$ . Для этого решим уравнение  $\frac{-(p-p_1)(p-p_2)}{p(p-2d)} = 1$ . После несложных преобразований получим  $2p^2 - \left(2d + \frac{z}{y}\right)p + \frac{\mu}{y} = 0$

и  $D = \left(2d - \frac{z}{y}\right)^2 > 0$ . Корни этого уравнения  $p_1 = \frac{z}{2y}$  и  $p_2 = d$ . Несложно показать, что  $2d < \frac{z}{2y}$ . Следовательно, пересечения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  возможны только на промежутке  $p \in (2d, p_2)$ .

Определим наличие экстремумов функции  $f_1(p)$  на промежутке  $p \in (2d, p_2)$ . Рассмотрим числитель производной  $f'_1(p)$ :  $p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2 + 2d\frac{\mu}{y}p - 2d^2\frac{\mu}{y}$ . Введем обозначения:  $f_3(p) = p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2$  и  $f_4(p) = -2d\frac{\mu}{y}p + 2d^2\frac{\mu}{y}$ .

Рассмотрим функцию  $f_3(p)$ . Отличные от нуля корни уравнения  $f_3(p) = 0$  следующие:  $p_{1,2} = (2 \mp \sqrt{2})d$ . Точки экстремума этой функции –  $p_{1,2} = \frac{(3 \mp \sqrt{5})d}{2}$ . Точки перегиба этой функции  $p_{1,2} = \frac{(3 \mp \sqrt{6})d}{3}$ . Прямая  $f_4(p)$  пересекает ось  $p$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . Очевидно, что  $f_3(2d) > f_4(2d)$ . Следовательно, пересечений справа от точки  $p = 2d$  не будет. Таким образом, в момент времени  $T$  графики функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  пересекаются при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ , их точка пересечения является точкой максимума.  $\square$

**Теорема 3.** Если  $x_0 \in \left(\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b}\right)$ , то при любом  $T > 0$  решение (3) имеет единствен-

ную точку максимума  $p^*$ , при этом  $p^* \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что уравнение  $f_1(p) = 0$  имеет один корень  $p = \frac{\mu}{z}$ . Определим знак функции  $f_1(p)$ . Функция  $f_1(p)$  имеет две вертикальные асимптоты  $p = 0$  и  $p = \frac{2\mu}{z}$ ,  $f_1(p) > 0$  при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ ,  $f_1(p) < 0$  при  $p \in \left(0, \frac{\mu}{z}\right) \cup \left(\frac{2\mu}{z}, +\infty\right)$ .

Найдем уравнения касательных для функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  в точке  $p = d$ . После несложных преобразований получим  $f'_1 = \frac{zT}{y} \frac{(-yp^4 - 4ydp^3 - 2yd^2p^2 - 2d\mu p + 2d^2\mu)}{(p^2 - 2dp)^2}$ ,

$f'_1\left(\frac{\mu}{z}\right) = f'_2\left(\frac{\mu}{z}\right) = zT$ ,  $f_1\left(\frac{\mu}{z}\right) = f_2\left(\frac{\mu}{z}\right) = 0$ . Получим общую касательную  $k = zT\left(p - \frac{\mu}{z}\right)$ .

Найдем пересечение общей касательной  $k$  и функции  $f_1(p)$ , для этого решим уравнение  $\frac{(zp - \mu - yp^2)}{yp\left(p - \frac{2\mu}{z}\right)} = 1$  относительно  $p$ . Получим корни  $p_1 = \frac{z}{2y}$  и  $p_2 = d$ . Несложно показать, что  $d < \frac{z}{2y} < 2d$ .

Проверим выпуклость функции  $f_1(p)$  в точке  $d$ . Числитель второй производной  $f''_1(p)$  после подстановки  $p = d$  примет вид  $2d^4(2yd^2 - \mu)$  и будет отрицательным в силу условия теоремы. Из чего следует, что в точке  $p = \frac{\mu}{z}$  функция  $f_1(p)$  будет выпукла вверх. Проверим наличие точек перегиба функции  $f_1(p)$ . Числитель второй производной функции  $f_1(p)$  примет вид  $-4yd^2p^4 + (8yd^3 + 6\mu d)p^3 - 24\mu d^2p^2 + 32\mu d^3p - 16\mu d$ . Введем обозначения  $f_5(p) = -4yd^2p^4 + (8yd^3 + 6\mu d)p^3 - 24\mu d^2p^2$  и  $f_6(p) = -32\mu d^3p + 16\mu d$ . Проверим, при каких условиях выполняется  $f_5(p) = f_6(p)$ . Рассмотрим уравнение  $f_5(p) = 0$ . Найдем отличные от нуля корни. Получим дискриминант  $D = 16y^2d^4 - 72y\mu d^2 + 9\mu^2$ . Решим уравнение  $D = 0$  относительно  $d^2$  и найдем его корни:  $d_{1,2}^2 = \frac{(9 \mp 6\sqrt{2})\mu}{4y}$ . Таким образом,  $D < 0$  при  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ . Так как  $d = \frac{\mu}{z}$ , то с учетом условия теоремы несложно показать, что  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ . Из чего следует, что  $D < 0$  и вещественных корней уравнение  $f_5(p) = 0$  не имеет.

Функция  $f_5(p)$  при  $p > 0$  отрицательна. Проверим эту функцию на экстремумы:  $f'_5 =$

$-6dp(2ydp^2 - (4yd^2 + 3\mu)p + 8\mu d) = 0$ . Найдем дискриминант:  $D = 16y^2d^4 - 40yd^2\mu + 9\mu^2$  и определим его знак, решив уравнение  $D = 0$  относительно  $d^2$ . Получим корни:  $d_1^2 = \frac{\mu}{4y}$  и  $d_2^2 = \frac{9\mu}{4y}$ . Тогда  $D < 0$  при  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ .

Очевидно, что  $\left(\frac{\mu}{z}\right)^2$  попадает в промежуток  $(d_1^2, d_2^2)$ . Следовательно,  $D < 0$  и точек экстремума нет.

Функция  $f_5(p)$  убывает при  $p > 0$ . Проверим  $f_5(p)$  на выпуклость:  $f''_5(p) = -12d(3ydp^2 - (4yd^2 + 3\mu)p + 4\mu d) = 0$ . Найдем дискриминант:  $D = 16y^2d^4 - 24y\mu d^2 + 9\mu^2 = (4yd^2 - 3\mu)^2 > 0$  и корни уравнения  $f''_5(p) = 0$   $p_1 = \frac{\mu}{z}$  и  $p_2 = \frac{z}{y}$ . Функция  $f_5(p)$  выпукла вверх при  $p_2 < p < p_1$ , выпукла вниз при  $p \in (p_1, p_2)$ . Очевидно, что  $f_5(2d) = f_6(2d)$ . Несложно показать, что  $f_1\left(\frac{z}{2y}\right) > 0$ . Следовательно, будет два пересечения функций  $f_3(p)$  и  $f_4(p)$  в двух точках  $p = 2d$  и  $p \in \left(d, \frac{z}{2y}\right)$ , из чего следует, что на промежутке  $p \in (d, 2d)$  будет одна точка перегиба. Касательная не пересекается с выпуклой вверх частью функции  $f_1(p)$  и, таким образом, не пересечет функцию в окрестности возможного максимума. Следовательно,  $f_1(p) = f_2(p)$  в одной точке  $p \in \left(\frac{z}{2y}, 2d\right)$ .  $\square$

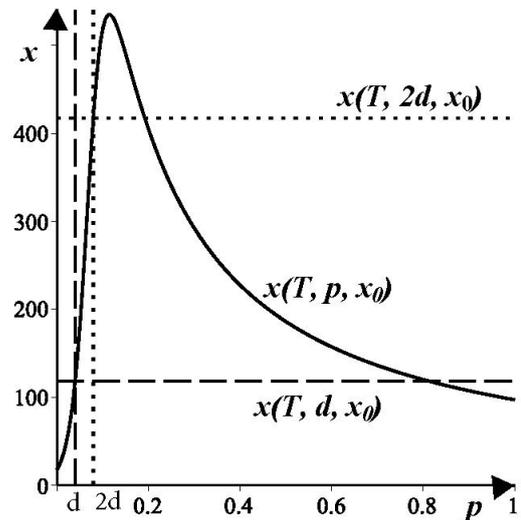


Рис. 2. Максимум решения (3) при  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 0.01$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $x_0 = 130$ ,  $T = 50$

Fig. 2. Maximum of solution (3) with  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 0.01$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $x_0 = 130$ ,  $T = 50$

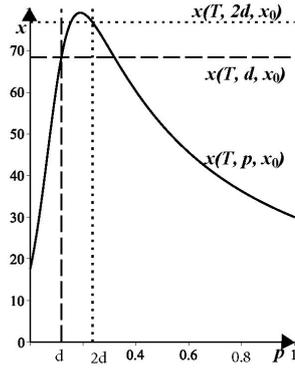


Рис. 3. Максимум решения (3) при  $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$ ,  $a=0.3$ ,  $b=0.01$ ,  $\mu=0.04$ ,  $x_0=130$ ,  $T=50$

Fig. 2. Maximum of solution (3) with  $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$ ,  $a=0.3$ ,  $b=0.01$ ,  $\mu=0.04$ ,  $x_0=130$ ,  $T=50$

На рис. 2 и 3 отражены условия существования максимума функции (3).

### НАХОЖДЕНИЕ ДОЛИ ПОПУЛЯЦИИ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ ЕЕ ЧИСЛЕННОСТЬ: $T \rightarrow \infty$

Под оптимальной долей понимается та доля популяции в ареале, которая максимизирует  $X(T, p)$  при любом  $T > 0$ . Положение равновесия  $x^*$ , соответствующее уравнению (2), будем рассматривать как функцию параметра  $p$ :

$$x^*(p) = \frac{p(a + \mu) - \mu}{bp^2}, \quad (4)$$

для удобства введем обозначение  $g(p) = \frac{p(a + \mu) - \mu}{bp^2}$ . Несложно показать, что максимум функции (4) достигается при  $p_{max} = \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $x_0 \geq g(p_{max})$ , тогда существует момент времени  $T_1$  такой, что если  $T > T_1$ , то  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ . Пусть  $x_0 < g(p)$ , тогда существует момент времени  $T_2$  такой, что если  $T > T_2$ , то  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ . Пусть  $g(p) \leq x_0 < g(p_{max})$ , тогда при любом  $T$  будет выполняться  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g(p)$  на промежутке  $p \in [0, 1]$ . Очевидно, что функция  $g(p)$  монотонно возрастает на промежутке  $p \in [0, p_{max}]$  и монотонно убывает на промежутке  $p \in [p_{max}, 1]$ . При этом на промежутке  $p \in [0, \frac{\mu}{a + \mu}]$  она принимает отрицательные значения, а при  $p \in$

$[\frac{\mu}{a + \mu}, 1]$  – положительные,  $\frac{\mu}{a + \mu} < p_{max}$ . Найдем пересечение графика функции  $x(t, p)$  и прямой  $g(p_{max})$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$ , получим 
$$\frac{((a + \mu)p - \mu)x_0}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)e^{(\mu - (a + \mu)p)T} + x_0bp^2} = \frac{p_{max}(a + \mu) - \mu}{bp_{max}^2},$$
 где  $p_{max} = \frac{2\mu}{a + \mu}$ , отсюда выразим

$$T_1 = \frac{\ln \left( \frac{((a + \mu)p - \mu)4x_0\mu b - x_0bp^2(a + \mu)^2}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)(a + \mu)^2} \right)}{\mu - (a + \mu)p}.$$

Нетрудно показать, что выражение, стоящее под знаком натурального логарифма, – положительно. Рассмотрим его числитель. Это парабола  $f_1(p) = -x_0b(a + \mu)^2p^2 + 4(a + \mu)x_0\mu b p - 4\mu^2x_0b$ , и ее вершина имеет координаты  $(\frac{2\mu}{a + \mu}, 0)$ . Следовательно, числитель отрицателен. Проверим знаменатель. Рассмотрим параболу  $f_2(p) = -x_0bp^2 + (a + \mu)p - \mu$ . Несложно показать, что максимум функции  $f_2(p)$  достигается при  $p = \frac{a + \mu}{2x_0b}$ . Проверим наличие точек пересечения  $f_2(p)$  с осью абсцисс. Решая квадратное уравнение  $f_2(p) = 0$ , получим дискриминант  $D = (a + \mu)^2 - 4x_0b\mu$ . Так как по условию  $x_0 \geq g(p_{max}) = \frac{(a + \mu)^2}{4b\mu}$ ,

то  $D < 0$  и  $f_2(p)$  не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Таким образом, знаменатель тоже отрицателен, из чего следует, что выражение, стоящее под знаком логарифма, имеет положительный знак. Проверим знак логарифмического выражения. Обозначим  $g_1(p) = \frac{((a + \mu)p - \mu)4x_0\mu b - x_0bp^2(a + \mu)^2}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)(a + \mu)^2}$ . Несложно показать, что  $g_1(p) > 1$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$  и  $p \leq \frac{\mu}{a + \mu}$ ,  $g_1(p) < 1$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$  и  $p > \frac{\mu}{a + \mu}$ . В обоих случаях  $T_1 > 0$ .

Найдем точки пересечения функций  $x(t, p_{max})$  и  $g(p)$  при условии  $x_0 < g(p)$ . Выразим

$$T_2 = \frac{\ln \left( \frac{\mu b x_0 ((a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2)}{(\mu(a + \mu)^2 - 4b x_0 \mu^2)((a + \mu)p - \mu)} \right)}{-\mu}.$$

Введем обозначение

$$g_2(p) = \frac{\mu b x_0 ((a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2)}{(\mu(a + \mu)^2 - 4b x_0 \mu^2)((a + \mu)p - \mu)}.$$

Покажем, что  $g_2(p) > 0$ . Рассмотрим параболу  $(a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2$ . Вершина параболы имеет координаты  $\left(\frac{2\mu}{a + \mu}, 0\right)$ . Поскольку  $0 < x_0 < g(p)$ , то  $g_2(p) > 0$  и  $\ln g_2(p) < 0$  при  $x_0 < g(p) = \frac{(a + \mu)p - \mu}{bp^2}$ . Следовательно,  $T_2 > 0$ .

Несложно показать, что при  $g(p) \leq x_0 < g(p_{max})$  при любом  $T$  будет выполняться неравенство  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ .  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривалась задача выбора популяцией ареала для случая двух ареалов, расположенных на концах отрезка. Были предложены функции полезности рассматриваемых ареалов с учетом меры информированности об их качестве, их истинной полезности и затрат на перемещение к ним. С помощью введенных функций полезности на заданном отрезке получены области предпочтительной полезности. Также рассматривалась задача оптимизации численности популяции в ареале, и получены условия, при которых ее численность максимизируется.

## REFERENCES

1. Kirillov A. N., Danilova I. V. Dinamika raspredeleniya populyatsii po arealam [Dynamics of population distribution by patches]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem* [Modeling and Analysis of Information Systems]. 2018. No. 3. P. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275
2. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds. *Acta Biotheoretica*. 1970. Vol. 19. P. 16–36.
3. Krivan V. Optimal foraging and predator–prey dynamics. *Theor. Popul. Biol.* 1996. Vol. 49. P. 265–290.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: krllv1812@yandex.ru  
тел.: (8142) 763370

**Данилова Инна Владимировна**  
старший преподаватель  
Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет  
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: DanilovaInna1987@mail.ru

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика распределения популяции по ареалам // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. № 3. С. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275
2. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds // *Acta Biotheoretica*. 1970. Vol. 19. P. 16–36.
3. Krivan V. Optimal foraging and predator–prey dynamics // *Theor. Popul. Biol.* 1996. Vol. 49. P. 265–290.
4. Krivan V., Eisner J. Optimal foraging and predator–prey dynamics, III // *Theor. Popul. Biol.* 2003. Vol. 63. P. 269–279.
5. Krivan V., Sikder A. Optimal foraging and predator–prey dynamics, II // *Theor. Popul. Biol.* 1999. Vol. 55. P. 111–126.
6. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: departures from the ideal free distribution // *Oikos*. 2010. Vol. 119. P. 1469–1483.

Поступила в редакцию 24.04.2021

4. Krivan V., Eisner J. Optimal foraging and predator–prey dynamics, III. *Theor. Popul. Biol.* 2003. Vol. 63. P. 269–279.
5. Krivan V., Sikder A. Optimal foraging and predator–prey dynamics, II. *Theor. Popul. Biol.* 1999. Vol. 55. P. 111–126.
6. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: departures from the ideal free distribution. *Oikos*. 2010. Vol. 119. P. 1469–1483.

Received April 24, 2021

## CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: krllv1812@yandex.ru  
tel.: (8142) 766312

**Danilova, Inna**  
Institute of Mathematics and Information Technology,  
Petrozavodsk State University  
33 Lenina Ave., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: DanilovaInna1987@mail.ru