Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 64–76
DOI: 10.17076/mat1448

УДК 519.179.4

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЕРЕВА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА СО СТЕПЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Е. В. Хворостянская

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматривается критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с N частиц, число прямых потомков которого имеет распределение $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Для соответствующего леса Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами получено предельное распределение максимального объема дерева при $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 0$ или $n/N \to \infty, n/N^{\tau} \to 0$.

Ключевые слова: лес Гальтона – Ватсона; максимальный объем дерева; предельное распределение.

E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON – WATSON FOREST WITH A POWER-LAW DISTRIBUTION

We consider a critical Galton – Watson branching process starting with N particles where the number of offsprings has the distribution $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ The limit distribution of the maximum tree size is obtained for the corresponding Galton – Watson forest with N trees and n non-root vertices as $N, n \to \infty$, such that $n/N \to 0$ or $n/N \to \infty, n/N^{\tau} \to 0$.

Keywords: Galton – Watson forest; maximum tree size; limit distribution.

Пусть $\mathfrak{F}_N$ – лес Гальтона – Ватсона, порожденный критическим процессом Гальтона – Ватсона G_N с N начальными частицами, занумерованными числами $1, \ldots, N$, в котором число прямых потомков одной частицы задается случайной величиной ξ с распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \ p_0 > 0. \quad (1)$$

Процесс G_N индуцирует на подмножестве $F_{N,n}$ своих траекторий, имеющих $N + n$ вершин, условное распределение вероятностей при условии, что число вершин равно $N + n$. Построенный таким образом лес Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами обозначим через $\mathfrak{F}_{N,n}$. Подробно такие леса изучались в [6], и при условии существования конечного третьего момента распределения (1) и $N, n \to \infty$ были получены предельные распределения максимального объема дерева, числа деревьев заданного объема, высоты дерева. Некоторые другие характеристики таких лесов рассматривались также в [7, 10, 12]. В [3] доказано, что условие $\mathbf{E}\xi^3 < \infty$ можно заменить более слабым: $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$.

Пусть далее $\mathfrak{F}_{N,n}$ – лес Гальтона – Ватсона, порожденный критическим ветвящимся процессом G_N, в котором число прямых потомков одной частицы имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{(k+1)^\tau} - \frac{1}{(k+2)^\tau}, \qquad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ Учитывая, что рассматриваемый ветвящийся процесс является критическим и (2), несложно показать, что

$$m = \mathbf{E}\xi = \zeta(\tau) - 1 = 1, \qquad (3)$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Отсюда следует, что значение параметра τ распределения (2) определяется равенством $\zeta(\tau) = 2$ и $\tau \approx 1.728$.

Для такого случайного леса в [9] получено предельное распределение максимального объема дерева в случае, когда $N, n \to \infty$ так, что $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$. Здесь и далее $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначают произвольные положительные постоянные. Идея рассмотреть такой ветвящийся процесс появилась в связи с возможностью применения ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона при исследовании Интернет-графов [11], одной из наиболее известных и изученных моделей которых [8, 13] является модель с распределением степеней вершин

$$q_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

В [13] показано, что для большинства реальных сетей характерны значения параметра τ, принадлежащие интервалу $(1, 2)$. Заметим, что для таких значений τ распределение (4) имеет бесконечный второй момент и полученные ранее результаты для лесов Гальтона – Ватсона в этом случае неприменимы. Сдвиг на 1 в распределении (2) обусловлен тем, что степень вершины в лесе Гальтона – Ватсона на 1 больше числа прямых потомков соответствующей частицы ветвящегося процесса.

В настоящей работе доказаны предельные теоремы для максимального объема дерева леса $\mathfrak{F}_{N,n}$ в других зонах изменения параметров N, n (теоремы 1, 2).

Обозначим через $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \ldots, \nu_N(\mathfrak{F})$ случайные величины, равные объемам деревьев леса из $\mathfrak{F}_{N,n}$.

В [6] показано, что классу лесов $\mathfrak{F}_{N,n}$ соответствует ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона G, распадающийся на N независимых процессов $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(N)}$, начинающихся с одной частицы, в котором случайные величины $\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots$, равные числу прямых потомков одной частицы, имеют распределение

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \lambda \leqslant 1, \qquad (5)$$

где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \qquad (6)$$

Пусть $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(N)}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числу частиц, существовавших в процессах $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(N)}$ до их вырождения, ν_N – случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе G до его вырождения:

$$\nu_N = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \ldots + \nu^{(N)}.$$

Справедливо равенство [6]

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \ldots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N\} \\ = \mathbf{P}\Big\{\nu^{(1)}{=}k_1, \ldots, \nu^{(N)}{=}k_N | \nu_N{=}N{+}n\Big\}.\end{gathered} \qquad (7)$$

Равенство (7) означает, что случайные величины $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \ldots, \nu_N(\mathfrak{F})$ и $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(N)}$ образуют обобщенную схему размещения [4]. Использование метода обобщенной схемы размещения позволяет свести задачу с зависимыми случайными величинами к изучению сумм независимых случайных величин, при этом, как известно, параметр распределения независимых случайных величин может быть выбран любым наиболее удобным для решения задачи способом. Будем считать далее, что параметр λ распределения (5) равен решению λ^* уравнения

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N+n}. \qquad (8)$$

Пусть $\eta(\mathfrak{F})$ – случайная величина, равная максимальному объему дерева в лесе $\mathfrak{F}_{N,n}$:

$$\eta(\mathfrak{F}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \nu_k(\mathfrak{F}).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 0$, $N\mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+1\} \to \infty$, $N\mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+2\} \to \gamma$, где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) = r+1\} \to e^{-\gamma},$$

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) = r+2\} \to 1 - e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, $n/N^\tau \to 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\beta\eta(\mathfrak{F}) - u \leqslant z\right\} \to e^{-e^{-z}},$$

где

$$\beta = \ln\left(F(\lambda)/\lambda\right), \tag{9}$$

а u выбрано так, что

$$NC(\tau)\beta^{1/\tau}u^{-(1+1/\tau)}e^{-u} = 1, \tag{10}$$

$$C(\tau) = \frac{\Gamma(1/\tau)\cos(\pi(2-\tau)/2\tau)}{\pi\tau\left(\Gamma(1-\tau)\cos(\pi\tau/2)\right)^{1/\tau}}.$$

Докажем сначала вспомогательные утверждения (леммы 2–7), а затем с их помощью получим теоремы 1, 2.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_r^{(1)}, \ldots, \nu_r^{(N)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\left\{\nu_r^{(i)}{=}k\right\} = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)}{=}k \mid \nu^{(1)}{\leqslant}r{+}1\right\}, \tag{11}$$

где $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots$

Обозначим $\nu_{r,N} = \nu_r^{(1)} + \ldots + \nu_r^{(N)}$, $P_r = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} > r+1\right\}$. Из (7) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r\right\} = (1{-}P_r)^N \frac{\mathbf{P}\left\{\nu_{r,N}{=}N{+}n\right\}}{\mathbf{P}\left\{\nu_N{=}N{+}n\right\}}. \tag{12}$$

Таким образом, для получения предельного распределения случайной величины $\eta(\mathfrak{F})$ достаточно найти асимптотику бинома $(1-P_r)^N$ и вероятностей $\mathbf{P}\left\{\nu_{r,N} = N+n\right\}$, $\mathbf{P}\left\{\nu_N = N+n\right\}$.

Пусть далее $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение (2), $\eta_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$.

Согласно [5, лемма 2.1.3] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для $N \geqslant 0$, $N + n \geqslant 1$*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_N = N+n\right\} = \frac{N}{N+n}\mathbf{P}\left\{\xi_1(\lambda){+}\ldots{+}\xi_{N+n}(\lambda) = n\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to 0$, $N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} \to \infty$, $N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\} \to \gamma$, где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда*

$$NP_{r-1} \to \infty, \; NP_r \to \gamma.$$

Доказательство. Согласно [9, лемма 2] существует единственное решение λ^* уравнения (8) и $\lambda^* \to 0$ при $n/N \to 0$. Учитывая (6) и соотношения λ^*, $n/N \to 0$, из (8) находим, что

$$\lambda^* = \frac{p_0 n}{p_1 N}(1 + o(1)). \tag{13}$$

С помощью леммы 1 получаем равенство

$$P_r = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\} \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(r{+}2)\mathbf{P}\left\{\xi_1(\lambda){+}\ldots{+}\xi_{r+1+l}(\lambda){=}r{+}l\right\}}{(r{+}1{+}l)\mathbf{P}\left\{\xi_1(\lambda){+}\ldots{+}\xi_{r+2}(\lambda){=}r{+}1\right\}}.$$

Используя (5), отсюда находим, что

$$P_r = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\} \times \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{l-1} \frac{(r{+}2)\mathbf{P}\left\{\eta_{r+1+l}{=}r{+}l\right\}}{(r{+}1{+}l)\mathbf{P}\left\{\eta_{r+2}{=}r{+}1\right\}}. \tag{14}$$

При фиксированных r с помощью (2), (13), (14) несложно получить соотношение

$$P_r = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\}(1 + o(1)). \tag{15}$$

Покажем, что (15) верно и при $r \to \infty$. Используя [9, лемма 1] и (3), находим, что при $r \to \infty$ для $l = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\left\{\eta_{r+1+l}{=}r{+}l\right\} = \frac{g\left(-(r{+}1{+}l)^{-1/\tau}\right)}{(r{+}1{+}l)^{1/\tau}}(1{+}o(1)), \tag{16}$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{-\Gamma(1{-}\tau)|t|^\tau\left(1{-}\frac{it}{|t|}\mathrm{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right\}.$$

Из (13), (14), (16) получаем соотношение (15).

Аналогично можно показать, что

$$P_{r-1} = \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\}(1 + o(1)). \tag{17}$$

Из (15), (17) и условий леммы следуют соотношения $NP_{r-1} \to \infty$, $NP_r \to \gamma$. □

Лемма 3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, $n/N^\tau \to 0$, $r = (u+z)/\beta + O(1)$, где z – фиксированное число, а β, u заданы соответственно соотношениями (9), (10). Тогда*

$$NP_r \to e^{-z}.$$

Доказательство. Согласно [9, лемма 2] существует единственное решение λ^* уравнения (8) и $\lambda^* \to 1$ при $n/N \to \infty$. Используя (2), находим, что

$$F(\lambda) = 1 - (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau}}, \qquad (18)$$

при этом, учитывая (3), несложно показать, что справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau}} = 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} + O(1-\lambda). \qquad (19)$$

Используя свойство функции Лерча $\Phi(z,s,v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+v)^{-s}z^k$

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{1-s}\Phi(z,s,v) = \Gamma(1-s), \ \operatorname{Re} s<1 \qquad (20)$$

[1, равенство (1.11.12)], находим, что при $\lambda\to 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} = \frac{\Gamma(2-\tau)}{(1-\lambda)^{2-\tau}}(1+o(1)). \qquad (21)$$

С помощью (18), (19) и формулы Тейлора получаем, что

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = 1 - \frac{2(1-\lambda)}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} + O(1-\lambda).$$

Отсюда и из (8), (21) при $n/N \to \infty$ следует равенство

$$\lambda^* = 1 - \left(\frac{N}{2\Gamma(2-\tau)n}\right)^{1/(\tau-1)}(1+o(1)). \qquad (22)$$

С помощью леммы 1 и равенств (5) находим, что

$$P_r = \frac{1}{F(\lambda)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}\left\{\eta_{r+1+l}=r+l\right\}}{r+1+l}\left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{r+l}.$$

Используя (9), (18), (19), (21) и формулу Тейлора, при $\lambda \to 1$ получаем, что

$$\begin{aligned}\beta &= (1-\lambda)\left(1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau}}\right) + O\left((1-\lambda)^2\right)\\ &= \Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau}(1+o(1)).\end{aligned} \qquad (23)$$

Учитывая (22) и (23), находим, что при выполнении условий леммы $N\beta^{1/\tau} = \left((\Gamma(2-\tau))^{-1/\tau}N^{\tau}/2n\right)^{1/(\tau-1)}(1+o(1)) \to \infty$, и из (10) следует, что $u \to \infty$. Тогда

$$r\beta = u + z + O(\beta) \to \infty, \ r \to \infty. \qquad (24)$$

Следовательно, справедливы соотношения (16), при этом, используя [2, равенство (2.3.1) и теорема 2.4.5], можно показать, что при $x \to 0$

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{\pi}&\left(\Gamma(1-\tau)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right)^{-1/\tau}\\ &\times\left(\frac{\Gamma(1/\tau)}{\tau}\cos\frac{\pi(2-\tau)}{2\tau} + O(x)\right).\end{aligned} \qquad (25)$$

Тогда

$$P_r = C(\tau)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{-(r+l)\beta}}{(r+l)^{1+1/\tau}}(1+o(1)). \qquad (26)$$

Нетрудно видеть, что при любом фиксированном h выполнены неравенства

$$\int_{r+1}^{\infty}\frac{e^{-v\beta}dv}{v^h} \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{-(r+l)\beta}}{(r+l)^h} \leqslant \int_{r}^{\infty}\frac{e^{-v\beta}dv}{v^h}, \qquad (27)$$

при этом согласно [6, лемма 2.2.4] при $x \to \infty$

$$\int_x^{\infty} y^h e^{-y}dy = x^h e^{-x}(1+o(1)).$$

С помощью этого соотношения, учитывая (23) и (24), несложно показать, что

$$\int_{r}^{\infty}\frac{e^{-v\beta}dv}{v^h}, \int_{r+1}^{\infty}\frac{e^{-v\beta}dv}{v^h} = \frac{1+o(1)}{\beta r^h e^{r\beta}}. \qquad (28)$$

Отсюда и из (10), (24), (26), (27) получаем равенство

$$P_r = \frac{C(\tau)(1+o(1))}{\beta r^{1+1/\tau}e^{r\beta}} = \frac{e^{-z}}{N}(1+o(1)),$$

из которого следует утверждение леммы. □

Обозначим через $\varphi(t)$, $\psi(t)$ характеристические функции случайных величин $\nu^{(1)}$ и $\left(\nu_N - N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ соответственно.

Лемма 4. *Пусть* $n, N \to \infty$ *так, что* $n/N^{\tau} \to 0$. *Тогда равномерно по* t *в любом конечном интервале*

$$\psi(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Получим утверждение леммы, следуя доказательству леммы 2.3.1 из [6]. Найдем разложение $\ln\varphi(u)$ по формуле Тейлора в окрестности $u_0 = 0$. Согласно [6, лемма 1.3.2] для производящей функции $f(z)$ случайной величины $\nu^{(1)}$ справедливо равенство

$$f(z) = zF_\lambda\left(f(z)\right), \tag{29}$$

где

$$F_\lambda(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)u^k = \frac{F(\lambda u)}{F(\lambda)}. \tag{30}$$

С помощью (29), (30) и равенства $\varphi(u) = f\left(e^{iu}\right)$ находим, что

$$\varphi(u) = e^{iu}F_\lambda(\varphi(u)). \tag{31}$$

Используя (31), несложно показать, что

$$\varphi^{'}(u) = \frac{i\varphi(u)}{1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)},$$

и с помощью этого равенства получаем следующие соотношения:

$$\left(\ln\varphi(u)\right)^{'} = \frac{i}{1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\left(\ln\varphi(u)\right)^{''} = &-\frac{e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}(\varphi(u))\right)^2}\\ &-\frac{e^{iu}\varphi(u)F_\lambda^{''}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^3},\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\left(\ln\varphi(u)\right)^{'''} = &\frac{ie^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^2}\\ &-\frac{2ie^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^3}\\ &-\frac{3ie^{iu}\varphi(u)F_\lambda^{''}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^4}\\ &-\frac{ie^{iu}\varphi^2(u)F_\lambda^{'''}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^4}\\ &-\frac{3ie^{2iu}\varphi(u)F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)F_\lambda^{''}\left(\varphi(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^4}\\ &-\frac{3ie^{2iu}\varphi^2(u)\left(F_\lambda^{''}\left(\varphi(u)\right)\right)^2}{\left(1 - e^{iu}F_\lambda^{'}\left(\varphi(u)\right)\right)^5}.\end{aligned} \tag{34}$$

Учитывая (2) и (30), несложно показать, что

$$\begin{aligned}&F_\lambda^{'}(z)=\frac{S_1(\lambda z)}{zF(\lambda)},\ F_\lambda^{''}(z)=\frac{S_2(\lambda z)-S_1(\lambda z)}{z^2F(\lambda)},\\ &F_\lambda^{'''}(z) = \frac{S_3(\lambda z) - 3S_2(\lambda z) + 2S_1(\lambda z)}{z^3F(\lambda)},\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}S_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} kz^kp_k=&-(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}}\\ &+(2-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}S_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty}k^2z^kp_k = &-(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}}\\ &+(4-2z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} - (4-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}},\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}S_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty}k^3z^kp_k = &-(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-3}}\\ &+(6-3z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}}\\ &-(12-3z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} + (8-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}}.\end{aligned} \tag{38}$$

Используя свойства характеристических функций и (2), (5), (8), (32), (33), (35), получаем, что

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\nu^{(1)} = \frac{n+N}{N},\\ &\mathbf{D}\nu^{(1)} = \left(\frac{n+N}{N}\right)^3\left(\frac{S_2(\lambda)}{F(\lambda)} - \left(\frac{S_1(\lambda)}{F(\lambda)}\right)^2\right).\end{aligned} \tag{39}$$

Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to 0$. Используя (6), (13), (36), (37), (39), находим, что

$$\mathbf{E}\nu^{(1)} = 1 + n/N,\quad N\mathbf{D}\nu^{(1)} = n(1 + o(1)). \tag{40}$$

Из (2), (6), (35) – (38) при $z \to 1$ и $\lambda \to 0$ получаем равенства

$$\begin{aligned}&F_\lambda^{'}(z) = \frac{p_1}{p_0}\lambda(1 + O(\lambda)),\\ &F_\lambda^{''}(z),\ F_\lambda^{'''}(z) = O\left(\lambda^2\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (34) следует, что при $u \to 0$ выполнено неравенство $\left|\left(\ln\varphi(u)\right)^{'''}\right| \leqslant C_1\lambda$, и с помощью формулы Тейлора находим, что

$$\ln\varphi(u) = iu\mathbf{E}\nu^{(1)} - u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}/2 + O\left(\lambda u^3\right). \tag{41}$$

Учитывая (13), (40), (41) и равенство

$$\psi(t)=\exp\left\{-\frac{itN\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right), \quad (42)$$

нетрудно видеть, что $\ln\psi(t)=-t^2/2+O\left(n^{-1/2}\right)$ при любом фиксированном t, что доказывает утверждение леммы при $n/N\to 0$.

Пусть $n,N\to\infty$ так, что $0<C_2\leqslant n/N\leqslant C_3<\infty$. Согласно [9, лемма 2] из (8) следует, что $0<C_4\leqslant\lambda\leqslant C_5<1$. Учитывая (35)–(39), получаем неравенства

$$\begin{gathered}0<C_6\leqslant F_\lambda^{'}(z),F_\lambda^{''}(z),F_\lambda^{'''}(z)\leqslant C_7<\infty,\\ 0<C_8\leqslant\mathbf{D}\nu^{(1)}\leqslant C_9<\infty.\end{gathered} \quad (43)$$

Поскольку, как несложно проверить, функция $F_\lambda^{'}(z)$ возрастает по z и справедливо соотношение $F_\lambda^{'}(1)=n/(N+n)\leqslant C_{10}<1$, при достаточно малых значениях u имеет место неравенство $\left|1-e^{iu}F_\lambda^{'}(\varphi(u))\right|\geqslant C_{11}>0$, и из (34) следует, что $\left|(\ln\varphi(u))^{'''}\right|\leqslant C_{12}<\infty$. Учитывая это неравенство, по формуле Тейлора при $u\to 0$ получаем соотношение

$$\ln\varphi(u)=iu\mathbf{E}\nu^{(1)}-u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}/2+O\left(u^3\right). \quad (44)$$

С помощью (42) и (44) находим, что $\ln\psi(t)=-t^2/2+O\left(N^{-1/2}\right)$ при любом фиксированном t. Отсюда следует утверждение леммы в случае $0<C_2\leqslant n/N\leqslant C_3<\infty$.

Пусть $n,N\to\infty$ так, что $n/N\to\infty$, $n/N^\tau\to 0$. Используя (20), (22), (36), (37), (39), получаем, что

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\nu^{(1)}=\frac{n}{N}(1+o(1)),\\ \mathbf{D}\nu^{(1)}=\frac{\tau}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{1}{\tau-1}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2\tau-1}{\tau-1}}(1+o(1)).\end{gathered} \quad (45)$$

Пусть t фиксировано и $u=t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. Учитывая (45) и формулу Тейлора, нетрудно видеть, что

$$\varphi(u)=1+O\left(\frac{(N/n)^{1/2(\tau-1)}}{\sqrt{N}}\right). \quad (46)$$

С помощью (19), (20), (36)–(38) несложно показать, что при $z\to 1$

$$\begin{aligned}S_1(z)&=1-2\Gamma(2-\tau)(1-z)^{\tau-1}(1+o(1)),\\ S_2(z)&=\tau\Gamma(2-\tau)(1-z)^{-(2-\tau)}(1+o(1)),\\ S_3(z)&=\tau\Gamma(3-\tau)(1-z)^{-(3-\tau)}(1+o(1)).\end{aligned} \quad (47)$$

Используя (18)–(20), (22), (35), (45)–(47), находим, что

$$1-\lambda\varphi(u)=(1-\lambda)(1+o(1)),$$

и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}F_\lambda^{'}(\varphi(u))=1-2\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau-1}(1+o(1))\\ +O\left(\frac{(N/n)^{1/2(\tau-1)}}{\sqrt{N}}\right)=1-\frac{N}{n}(1+o(1)),\\ 1-e^{iu}F_\lambda^{'}(\varphi(u))=\frac{N}{n}(1+o(1)),\\ F_\lambda^{''}(\varphi(u))=S_2(\lambda\varphi(u))(1+o(1))\\ =\tau\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{-(2-\tau)}(1+o(1))\\ =\frac{\tau}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{1}{\tau-1}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2-\tau}{\tau-1}}(1+o(1)),\\ F_\lambda^{'''}(\varphi(u))=S_3(\lambda\varphi(u))(1+o(1))\\ =\tau\Gamma(3-\tau)(1-\lambda)^{-(3-\tau)}(1+o(1))\\ =\frac{\tau(2-\tau)}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{2}{\tau-1}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3-\tau}{\tau-1}}(1+o(1)).\end{gathered} \quad (48)$$

С помощью соотношений (48) из (34) получаем равенство

$$(\ln\varphi(u))^{'''}=-iC_{13}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3\tau-1}{\tau-1}}(1+o(1)) \quad (49)$$

и по формуле Тейлора находим, что

$$\begin{gathered}\ln\varphi(u)=iu\mathbf{E}\nu^{(1)}-\frac{u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}}{2}\\ +O\left(u^3\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3\tau-1}{\tau-1}}\right).\end{gathered} \quad (50)$$

Отсюда и из (42), (45) следует равенство

$$\begin{gathered}\ln\psi(t)=-\frac{t^2}{2}+O\left(\frac{1}{N}\left(\frac{n}{N^\tau}\right)^{1/2(\tau-1)}\right)\\ =-\frac{t^2}{2}+o(1).\end{gathered}$$

□

Лемма 5. *Пусть $n,N\to\infty$ так, что $n/N^\tau\to 0$. Тогда для всех целых неотрицательных l равномерно относительно $u_N=\left(l-N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\{\nu_N=l\}=\frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(1+o(1)).$$

Доказательство. С помощью равенств

$$2\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\mathbf{P}\{\nu=l\}=\int\limits_{-\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}^{\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}e^{-itu_N}\psi(t)dt,$$

$$\sqrt{2\pi}e^{-u_N^2/2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt$$

разность

$$R_N = 2\pi \left(\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \mathbf{P}\{\nu = l\} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (51)$$

можно представить в виде суммы $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itu_N} \left(\psi(t) - e^{-t^2/2} \right) dt,$$

$$I_2 = - \int\limits_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi(t) dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}<|t|\leqslant\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi(t) dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

В силу леммы 4 для любого фиксированного A выполнено соотношение $I_1 \to 0$.

Для интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad (52)$$

и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to 0$, и пусть $A < |t| \leqslant \varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. При достаточно малом ε выполнено соотношение (41), с помощью которого находим, что

$$\ln\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right) = \frac{it\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} - \frac{t^2}{2N}\left(1 + O\left(\frac{\lambda|t|}{\sqrt{N}\left(\mathbf{D}\nu^{(1)}\right)^{3/2}}\right)\right).$$

Отсюда и из (13), (40) следует неравенство

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right| \leqslant e^{-C_1 t^2/N}. \quad (53)$$

С помощью (42), (53) получаем, что

$$|I_3| \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-C_1 t^2} dt, \quad (54)$$

и интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Используя лемму 1 и (5), (6), (13), находим, что

$$|\varphi(u)| = \left| \frac{e^{iu}p_0}{F(\lambda)} \left(1 + \frac{e^{iu}\lambda p_1}{F(\lambda)}\right) + \frac{1}{F(\lambda)} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{iuk}}{k} \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{k-1} \mathbf{P}\{\eta_k = k+1\} \right| \leqslant 1 - \frac{\lambda p_1}{p_0}(1 - \cos u) + C_2\lambda^2.$$

Следовательно, при $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi$

$$|\varphi(u)| \leqslant e^{-C_3 n/N}, \quad (55)$$

и с помощью (40), (42) получаем, что

$$|I_4| \leqslant C_4\sqrt{n}e^{-C_3 n} \to 0. \quad (56)$$

Пусть $n, N \to \infty$ так, что $0 < C_5 \leqslant n/N \leqslant C_6 < \infty$. Используя (43), (44), находим, что в области интегрирования I_3 выполнено соотношение (53), с помощью которого и (42) получаем оценку (54). Следовательно, интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим. Для $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$|\varphi(u)| \leqslant e^{-C_7}. \quad (57)$$

С помощью (42), (43), (57) несложно показать, что

$$|I_4| \leqslant C_8\sqrt{N}e^{-C_7 N}$$

и $I_4 \to 0$ при $N \to \infty$.

Остается оценить интегралы I_3, I_4 в случае $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, $n/N^\tau \to 0$. Область интегрирования I_3 разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A \leqslant |t| \leqslant \varepsilon_1 \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{\tau}{\tau-1}} \right\},$$
$$S^{(2)} = \left\{ \varepsilon_1 \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{\tau}{\tau-1}} < \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \leqslant \varepsilon \right\}, \quad (58)$$

где ε_1, ε могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Пусть $t \in S^{(1)}$. Учитывая (45), по формуле Тейлора находим, что для $u = t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$

$$\varphi(u) = 1 + O\left(\varepsilon_1 \left(\frac{N}{n}\right)^{1/(\tau-1)}\right)$$

и с помощью (22) несложно проверить, что

$$1-\lambda\varphi\left(u\right)=C_9\left(\frac{N}{n}\right)^{1/(\tau-1)}(1+o(1)).$$

Используя эти соотношения и (18), (19), (21), (22), (34), (35), (47) получаем, что верны равенства (48) – (50).

Из (45) и (50) следует, что

$$\ln\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)=\frac{it\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}-\frac{t^2}{2N}\left(1+O\left(\varepsilon_1\right)\right)$$

и при выборе достаточно малого ε_1 справедливо неравенство

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right|\leqslant e^{-C_{10}t^2/N}. \qquad (59)$$

Учитывая (42), (45), (59), получаем, что

$$\left|I_3^{(1)}\right|\leqslant 2\int\limits_{S^{(1)}} e^{-C_{10}t^2}dt\leqslant 2\int\limits_{A}^{\infty} e^{-C_{10}t^2}dt. \qquad (60)$$

Следовательно, интеграл $I_3^{(1)}$ можно сделать сколь угодно малым выбором подходящих ε_1 и A.

Пусть $t\in S^{(2)}$. При достаточно малом ε и $u=t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ с помощью (18), (19), (21), (29), (30) находим, что

$$f\left(e^{iu}\right)=e^{iu}\left(\lambda+\Gamma(2-\tau)\left(1-\lambda\right)^{\tau}(1+o(1))\right)^{-1}$$
$$\times\left(\lambda f\left(e^{iu}\right)+\Gamma(2-\tau)\left(1-\lambda f\left(e^{iu}\right)\right)^{\tau}(1+o(1))\right).$$

Отсюда получаем равенство

$$f\left(e^{iu}\right)=\frac{\Gamma(2-\tau)\left(1-\lambda f\left(e^{iu}\right)\right)^{\tau}(1+o(1))}{1-e^{iu}+\Gamma(2-\tau)\left(1-\lambda\right)^{\tau}(1+o(1))},$$

и, представив $f\left(e^{iu}\right)$ в виде $f\left(e^{iu}\right)=1-\alpha(u)$, можно показать, что

$$1-\alpha(u)=\frac{\left(1+\lambda\alpha(u)/(1-\lambda)\right)^{\tau}(1+o(1))}{1+\left(1-e^{iu}\right)(1+o(1))/\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau}}.$$

Логарифмируя последнее равенство и учитывая, что $\alpha(u)$ можно сделать сколь угодно малым выбором ε, получаем соотношение

$$\tau\ln\left(1+\frac{\lambda\alpha(u)}{1-\lambda}\right)=\ln\left(1+\frac{\left(1-e^{iu}\right)(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau}}\right)+o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(u)=(1-\lambda)(1+o(1))$$
$$\times\left(-1+\left(1+\frac{\left(1-e^{iu}\right)(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau}}\right)^{1/\tau}\right).$$

Обозначим

$$\varphi=\arg\left(1+\frac{\left(1-e^{iu}\right)(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau}}\right).$$

Тогда

$$\alpha(u)=(1-\lambda)(1+o(1))$$
$$\times\left(-1+\left(1+\frac{u^2}{(1-\lambda)^{2\tau}}\frac{(1+o(1))}{\Gamma^2(2-\tau)}\right)^{1/2\tau}\right.$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{\varphi}{\tau}+i\sin\frac{\varphi}{\tau}\right)\right).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned}f\left(e^{iu}\right)=1-\Big(|u|^{\frac{1}{\tau}}q\left(\cos\frac{\varphi}{\tau}+i\sin\frac{\varphi}{\tau}\right)\\-(1-\lambda)\Big)(1+o(1)),\end{aligned} \qquad (61)$$

где

$$q=\left(\frac{(1-\lambda)^{2\tau}}{u^2}+\frac{(1+o(1))}{\Gamma^2(2-\tau)}\right)^{1/2\tau}. \qquad (62)$$

Учитывая (22), нетрудно видеть, что в области $S^{(2)}$ справедливы неравенства

$$C_{11}<\frac{|u|}{(1-\lambda)^{\tau}}\leqslant C_{12}\left(\frac{n}{N}\right)^{\tau/(\tau-1)}.$$

Отсюда и из (62) следует, что

$$0<C_{13}\leqslant q\leqslant C_{14}<\infty,$$

и поскольку, как несложно проверить,

$$\mathrm{tg}\varphi=-\left(\Gamma(2-\tau)\frac{(1-\lambda)^{\tau}}{u}+\frac{u}{2}\right)^{-1}(1+o(1)), \qquad (63)$$

выполнено неравенство

$$\cos(\varphi/\tau)\geqslant C_{15}>0.$$

С помощью этих соотношений из (61) и равенства $\varphi(u)=f\left(e^{iu}\right)$ получаем, что

$$\begin{aligned}|\varphi(u)|^2=1-2q|u|^{\frac{1}{\tau}}\cos\frac{\varphi}{\tau}(1+o(1))\\+2(1-\lambda)(1+o(1)).\end{aligned} \qquad (64)$$

Если $|u|/(1-\lambda)^{\tau}\to\infty$, то из (64) легко получить неравенство

$$|\varphi(u)|^2\leqslant 1-C_{16}|u|^{1/\tau}\leqslant e^{-C_{16}|u|^{1/\tau}}. \qquad (65)$$

Пусть $C_{17} < |u|/(1-\lambda)^\tau \leqslant C_{18} < \infty$. Рассмотрим разность

$$\beta(u) = q\cos\frac{\varphi}{\tau} - \frac{1-\lambda}{|u|^{1/\tau}}.$$

Положим,

$$\mathrm{tg} x = \frac{|u|}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau}.$$

Очевидно, что $0 < C_{19} \leqslant x \leqslant C_{20} < \pi/2$. Используя (62) и (63), находим, что

$$\beta(u) = \frac{1-\lambda}{|u|^{1/\tau}}\left(\left(1+\mathrm{tg}^2 x(1+o(1))\right)^{\frac{1}{2\tau}}\cos\frac{x}{\tau} - 1\right)$$
$$= \frac{1-\lambda}{(|u|\cos x)^{1/\tau}}\left(\cos\frac{x}{\tau} - (\cos x)^{1/\tau} + o(1)\right).$$

С помощью формулы Тейлора можно показать, что справедливы неравенства

$$\cos\frac{x}{\tau} - (\cos x)^{1/\tau} > \frac{x^2}{2\tau^2}\left(\tau - 1 - \frac{\tau x^2}{12}\right) > C_{21} > 0.$$

Следовательно, $\beta(u) \geqslant C_{22}$, и из (64) получаем (65).

С помощью (42), (45), (65) находим, что

$$\left|I_3^{(2)}\right| \leqslant 2\int\limits_{S^{(2)}} |\psi_r(t)|\,dt \tag{66}$$
$$\leqslant C_{23}\left(\frac{n}{N^\tau}\right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} N^\tau \exp\left\{-C_{24}\left(\frac{N^\tau}{n}\right)^{\frac{1}{\tau-1}}\right\}.$$

Несложно показать, что если $n/N \to \infty$, $n/N^\tau \to 0$, то найдется такое y, $1 < y < \tau$, что $0 < C_{25} < n/N^y < C_{26} < \infty$. Тогда

$$\left|I_3^{(2)}\right| \leqslant C_{23}\left(\frac{n}{N^\tau}\right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} \tag{67}$$
$$\times \exp\left\{-\left(\frac{N^\tau}{n}\right)^{\frac{1}{\tau-1}}\left(C_{24} - \frac{C_{27}\ln N}{N^{(\tau-y)/(\tau-1)}}\right)\right\}$$

и $I_3^{(2)} \to 0$. Из оценок $I_3^{(1)}$, $I_3^{(2)}$ следует, что интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

При $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi$, учитывая соотношение $\lambda \to 1$, нетрудно видеть, что справедливо неравенство (57). С помощью (42), (45), (57) получаем, что

$$|I_4| \leqslant C_{28}\left(\frac{n}{N^\tau}\right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} N^\tau e^{-C_{29}N} \to 0. \tag{68}$$

Из полученных оценок интегралов $I_1 - I_4$ и равенства (51) следует утверждение леммы.

□

Обозначим через $\psi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\left(\nu_{r,N} - N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. Используя (11), несложно показать, что

$$\psi_r(t) = (1-P_r)^{-N}\psi(t)\left(1-\varphi^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right. \tag{69}$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{it(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\}\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)}=k+r+1\right\}\right)^N.$$

Лемма 6. *Пусть $n, N\to\infty$ так, что $n/N\to 0$, $NP_{r-1} \geqslant C > 0$, $NP_r/\ln n = O(1)$, или выполнены условия леммы 3. Тогда равномерно относительно t в любом конечном интервале*

$$\psi_r(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Пусть $n, N\to\infty$ так, что $n/N\to 0$, $NP_{r-1} \geqslant C > 0$, $NP_r/\ln n = O(1)$. Учитывая (40), (69) и лемму 4, получаем, что при любом фиксированном t

$$\psi_r(t) = (1-P_r)^{-N}e^{-t^2/2}(1+o(1)) \tag{70}$$
$$\times\left(1-P_r+o\left(\frac{1}{N}\right) - Q(t)(1+o(1))\right)^N,$$

где

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{it(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\} - 1\right) \tag{71}$$
$$\times\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}.$$

Поскольку $\left|e^{ix}-1\right| < |x|$, выполнено соотношение

$$Q(t) \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(r+2)\,\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\}$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+r+1}{r+2}\,\frac{\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}}{\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\}}.$$

С помощью леммы 1 и равенств (5) несложно показать, что

$$Q(t) \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(r+2)\,\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+2\right\}$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{k-1}\frac{\mathbf{P}\left\{\eta_{k+r+1} = k+r\right\}}{\mathbf{P}\left\{\eta_{r+2} = r+1\right\}}.$$

Учитывая (13), (15), (40), отсюда находим, что при любом r выполнено неравенство

$$|Q(t)| \leqslant \frac{C_1|t|rP_r}{\sqrt{n}}. \tag{72}$$

При фиксированных t, r из (72) и условия $NP_r/\ln n = O(1)$ следует соотношение

$$Q(t) = o(1/N). \tag{73}$$

Используя лемму 1 и равенства (5), (15), находим, что

$$P_r = \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{r+1} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{r+2}=r+1\}}{(r+2)F(\lambda)}(1+o(1)). \tag{74}$$

Пусть $r \to \infty$. С помощью (6), (13), (16), (25), (74) получаем соотношение

$$P_r = \left(\frac{n}{Np_1}\right)^{r+1} \frac{C_2(1+o(1))}{r^{1+1/\tau}} \to 0. \tag{75}$$

Аналогично можно показать, что

$$P_{r-1} = \left(\frac{n}{Np_1}\right)^{r} \frac{C_3(1+o(1))}{r^{1+1/\tau}}.$$

С помощью этого соотношения и $NP_{r-1} \geqslant C > 0$ находим, что

$$r \leqslant C_4 \ln n / \ln(N/n). \tag{76}$$

Из (72), (76) и условия $NP_r/\ln n = O(1)$ следует (73). Учитывая (70), (73), (75), получаем утверждение леммы.

Пусть выполнены условия леммы 3. Используя (45), (69) и леммы 3 и 4, получаем, что при любом фиксированном t

$$\psi_r(t) = e^{-t^2/2}\left(1-Q(t)+o\left(\frac{1}{N}+Q(t)\right)\right)^N, \tag{77}$$

где $Q(t)$ определено в (71). С помощью леммы 1 и (9), (16), (24), (25), (71) находим, что

$$|Q(t)| \leqslant \frac{C_5}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \sum_{k=1}^{\infty} (r+k)^{-1/\tau} e^{-(r+k)\beta}.$$

Отсюда и из (27), (28), (45) получаем неравенство

$$|Q(t)| \leqslant \frac{C_6 (N/n)^{(2\tau-1)/2(\tau-1)}}{\beta r^{1/\tau} e^{r\beta} \sqrt{N}},$$

при этом, учитывая условия леммы 3, несложно показать, что

$$\left(\beta r^{1/\tau} e^{r\beta}\right)^{-1} \leqslant \frac{C_7 \ln(N^\tau/n)}{N(N/n)^{\tau/(\tau-1)}}.$$

Следовательно, $Q(t) = o(1/N)$, и из (77) получаем утверждение леммы. □

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда для всех целых неотрицательных l равномерно относительно $u_N = \left(l - N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,N} = l\} = \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(1+o(1)).$$

Доказательство. Используя формулу обращения, разность

$$R_N = 2\pi\left(\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\mathbf{P}\{\nu_{r,N}=l\} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right) \tag{78}$$

можно представить в виде суммы $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itu_N}\left(\psi_r(t) - e^{-t^2/2}\right)dt,$$

$$I_2 = -\int_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N}\psi_r(t)dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}<|t|\leqslant\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N}\psi_r(t)dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

В силу леммы 6 для любого фиксированного A справедливо соотношение $I_1 \to 0$. Для интеграла I_2 выполнено (52), и этот интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Оценим интегралы I_3, I_4 в случае, когда $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 0$, $NP_{r-1} \geqslant C > 0$, $NP_r/\ln n = O(1)$. Пусть $A < |t| < \varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. С помощью (42), (53), (69) при достаточно малом ε и $NP_r = O(1)$ получаем, что

$$|\psi_r(t)| \leqslant C_1 e^{-C_2 t^2}. \tag{79}$$

Следовательно,

$$|I_3| \leqslant 2C_1 \int_A^{\infty} e^{-C_2 t^2} dt,$$

и выбором достаточно большого A интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым.

Пусть $NP_r \to \infty$. При $t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \to 0$ с помощью (42), (53), (69), (74), (75) находим, что

$$|\psi_r(t)| \leqslant e^{-C_3 t^2}\left(1 + \frac{C_4 |t| P_r}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} + C_5 Q(t)\right)^N, \tag{80}$$

где $Q(t)$ определено в (71).

При фиксированных r область интегрирования I_3 разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A < |t| < \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}/\ln n \right\},$$
$$S^{(2)} = \left\{ \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}/\ln n \leqslant |t| < \varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \right\}.$$

Учитывая (40), (72) и соотношение $NP_r/\ln n = O(1)$, нетрудно видеть, что для $t \in S^{(1)}$ справедливы соотношения

$$\frac{|t|P_r}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}},\ |Q(t)| = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Отсюда и из (80) следует (79) и

$$\left|I_3^{(1)}\right| \leqslant 2\int\limits_{S^{(1)}} |\psi_r(t)|\,dt \leqslant C_6\int\limits_A^\infty e^{-C_7t^2}dt. \qquad (81)$$

При $|t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < \varepsilon$ и достаточно малом ε с помощью (40), (42), (53), (69) получаем, что

$$\begin{aligned}|\psi_r(t)| &\leqslant (1-P_r)^{-N}\left(e^{-C_8t^2/N} + P_r\right)^N \\ &\leqslant \exp\left\{-C_8t^2 + C_9NP_r\right\}.\end{aligned} \qquad (82)$$

Учитывая соотношения $NP_r/\ln n = O(1)$, (40) и (82), для $t \in S^{(2)}$ находим, что

$$|\psi_r(t)| \leqslant e^{-C_{10}n/\ln^2 n}$$

и, следовательно,

$$\left|I_3^{(2)}\right| \leqslant 2\int\limits_{S^{(2)}} |\psi_r(t)|\,dt \leqslant C_{11}\sqrt{n}e^{-C_{10}n/\ln^2 n} \to 0.$$

Отсюда и из (81) получаем, что интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав подходящие A, ε.

При $r \to \infty$ область интегрирования I_3 разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A < |t| < \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\ln(N/n)/\ln^2 n \right\},$$
$$S^{(2)} = \left\{ \ln(N/n)/\ln^2 n \leqslant |t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < \varepsilon \right\}.$$

Заметим, что в соответствии с (76) выполнено соотношение $\ln n/\ln(N/n) \to \infty$.

Нетрудно видеть, что в области $S^{(1)}$ справедливо $|t|P_r/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} = o(1/N)$, а из (72), (76) находим, что $Q(t) = O(1/N)$. Отсюда и из (80) получаем (79), и, следовательно, имеет место оценка (81). При $t \in S^{(2)}$, учитывая соотношения $NP_r/\ln n = O(1)$, (40) и (82), несложно показать, что

$$\begin{aligned}|\psi_r(t)| &\leqslant \exp\left\{-C_{12}t^2 + C_{13}NP_r\right\} \\ &\leqslant \exp\left\{-C_{14}n\ln^2(N/n)/\ln^4 n\right\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\left|I_3^{(2)}\right| \leqslant \sqrt{n}\exp\left\{-C_{14}n\ln^2(N/n)/\ln^4 n\right\} \to 0.$$

Отсюда и из (81) следует, что интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав подходящие A, ε.

Пусть $\varepsilon \leqslant |t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \leqslant \pi$. С помощью (42), (55), (69), (75) и соотношения $NP_r/\ln n = O(1)$ можно показать, что

$$|\psi_r(t)| \leqslant (1-P_r)^{-N}\left(e^{-C_{15}n/N} + P_r\right)^N \leqslant e^{-C_{16}n}$$

и имеет место оценка (56).

Пусть выполнены условия леммы 3. Область интегрирования I_3 разобьем на две части в соответствии с (58). В области $S^{(1)}$ с помощью (42), (45), (59), (69) и леммы 3 находим, что $|\psi_r(t)| \leqslant C_{17}e^{-C_{18}t^2}$ и с точностью до константы справедливо (60). В области $S^{(2)}$ выполнено соотношение (65). Используя (42), (45), (65), (69) и лемму 3, несложно показать, что

$$|\psi_r(t)| \leqslant C_{19}e^{-C_{20}N|u|^{1/\tau}} \leqslant e^{-C_{21}(N^\tau/n)^{1/(\tau-1)}},$$

и, учитывая (45), получаем, что справедливы неравенства (66), (67), откуда следует соотношение $I_3^{(2)} \to 0$. Отсюда и из (60) находим, что I_3 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

При $\varepsilon \leqslant |t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \leqslant \pi$ справедливо неравенство (57). С помощью (42), (45), (57), (69) и леммы 3 можно показать, что выполнено (68).

Утверждение леммы следует из полученных оценок интегралов I_1–I_4 и равенства (78). □

Теперь можем доказать теоремы 1, 2.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из леммы 2 следуют соотношения

$$NP_{r-1} \to \infty,\ NP_r \to \gamma. \qquad (83)$$

Аналогично равенствам (15), (16) можно показать, что

$$\begin{aligned}NP_{r+1} &= N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+3\right\}(1+o(1)) \\ &= C_1\frac{n}{N}NP_r(1+o(1)).\end{aligned}$$

Отсюда и из (83) следует соотношение

$$NP_{r+1} \to 0.$$

С помощью этого соотношения, (12), (40), (83) и лемм 5, 7 нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r+1\} \to e^{-\gamma}, \\ \mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r+2\} \to 1. \end{aligned} \tag{84}$$

Покажем, что $\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r\} \to 0$. Учитывая лемму 5 и соотношения (12), (40), находим, что если $NP_{r-1}/\ln n \geqslant C_2 > 1/2$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r+1\} &\leqslant \frac{(1-P_{r-1})^N}{\mathbf{P}\{\nu_N = n+N\}} \\ &\leqslant C_3 \exp\{-NP_{r-1} + (\ln n)/2\} \\ &\leqslant C_3 \exp\{-C_4 NP_{r-1}\} \to 0. \end{aligned}$$

Если $NP_{r-1}/\ln n \leqslant 1/2$, то, используя леммы 5, 7 и соотношения (12), (83), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r+1\} = (1-P_{r-1})^N (1+o(1)) \to 0.$$

Отсюда и из (84) следует утверждение теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 несложно получить из соотношений (12), (39) и лемм 3, 5, 7.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 297 с.

2. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

3. *Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л.* Одно замечание о лесах Гальтона – Ватсона // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. doi: 10.4213/dm320

4. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

5. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

6. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 259 с.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 97–112. doi: 10.4213/dm366

8. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

9. *Хворостянская Е. В.* О предельном распределении максимального объема дерева в лесе Гальтона – Ватсона // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 89–97. doi: 10.17076/mat1236

10. *Чеплюкова И. А.* Возникновение гигантского дерева в случайном лесе // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 111–126. doi: 10.4213/dm408

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest // Advances in Applied Probability. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 23.04.2021

References

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York: MCGraw-Hill Book Company, 1953. 316 p.

2. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordhoff Publ., 1971. 438 p.

3. *Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L.* A remark on Galton – Watson forests. *Discrete Mathematics and Applications*. 2000. Vol. 10, iss. 1. P. 49–62. doi: 10.4213/dm320

4. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p.

5. *Kolchin V. F.* Random mappings. New York: Springer, 1986. 206 p.

6. *Pavlov Yu. L.* Random forests. Utrecht: VSP, 2000. 122 p.

7. *Khvorostyanskaya E. V.* O predel'nom raspredelenii maksimal'nogo ob'ema dereva v lese Gal'tona – Vatsona [On the limit distribution of the maximum tree size in the Galton–Watson forest]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 89–97. doi: 10.17076/mat1236

8. *Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L.* Limit distributions of the number of vertices in strata of a simply generated forest. *Discrete Mathematics*

and Applications. 1999. Vol. 9, iss. 2. P. 137–154. doi: 10.4213/dm366

9. *Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–463. doi: 10.4213/dm1008

10. *Cheplyukova I. A*. The emergence of a giant tree in a random forest. *Discrete Mathematics and Applications*. 1998. Vol. 8, iss. 1. P. 17–33. doi: 10.4213/dm408

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest. *Advances in Applied Probability*. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 23, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218