

УДК 519.977

УПРАВЛЯЕМАЯ ДИНАМИКА В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ДВУХВИДОВОГО БИОСООБЩЕСТВА

А. С. Иванова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Предполагается, что биологическое сообщество некоторого участка состоит из двух видов – хищников и жертв. Причем популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников мигрирует с участка в случае его недостаточной пищевой привлекательности. Под видовой структурой биосообщества понимается совокупность видов и типов взаимодействий между ними. Статья посвящена задаче сохранения видовой структуры биосообщества при помощи изъятия особей популяции хищников. Найдены интенсивности изъятия особей, позволяющие решить данную задачу. Также в статье решается задача об уменьшении интенсивностей изъятия особей, что позволяет сохранять видовую структуру биосообщества при меньшей антропогенной нагрузке на биосообщество.

Ключевые слова: пищевая привлекательность участка; динамическая система; видовая структура биосообщества; внешнее воздействие.

A. S. Ivanova. CONTROLLED DYNAMICS IN THE PROBLEM OF PRESERVING THE STRUCTURE OF A TWO-SPECIES BIOCOMMUNITY

It is assumed that the biological community of a patch consists of two species – predators and prey. Supposedly, the prey population does not leave the patch, while the predator population migrates away from the patch if its trophic attractiveness is insufficient. The species structure of the biological community is defined as the entirety of species and types of interactions between them. The article deals with the preservation of the species structure of the biological community of the patch through removal of individuals from the predator population. The removal rates that enable the solution of this problem were found. The article also solves the problem of reducing the rate of removal of individuals, which allows the species structure of the biocommunity to be preserved with a lower anthropogenic pressure on the biocommunity.

Keywords: trophic attractiveness of the patch; dynamical system; species structure of biocommunity; external intervention.

ВВЕДЕНИЕ

Введено понятие пищевой привлекательности участка в виде дополнительной переменной. Рассматривается динамическая система, задаваемая тремя обыкновенными дифферен-

циальными уравнениями, два из которых – система Лотки–Вольтерры с изъятием особей популяции хищников, третье – дифференциальное уравнение относительно пищевой привлекательности участка. Предполагается, что

популяция хищников покидает участок, когда пищевая привлекательность достигает порогового значения $\Lambda > 0$. Решается задача сохранения видовой структуры биосообщества. В отличие от работы [9], в которой видовая структура биосообщества сохраняется за счет постоянного изъятия особей популяций хищников и жертв, в настоящей работе задача решается при помощи изъятия только особей популяции хищников. Также в работе решается задача об уменьшении интенсивностей изъятия хищников.

В первом разделе статьи приводятся модель и постановка задач, во втором – предварительные сведения, в третьем – решение задач, в четвертом – результат, полученный при решении задачи об уменьшении интенсивностей изъятия хищников.

МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть биологическое сообщество некоторого участка состоит из двух видов – жертв и хищников. Предполагается, что жертвы не покидают участок, а хищники мигрируют с участка при недостаточном количестве питательного ресурса (жертв) на данном участке. Для описания динамики взаимодействующих популяций используется классическая система Лотки – Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – численность жертв и хищников в момент времени t соответственно; a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников; b – коэффициент истребления хищником жертв; k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство; m – коэффициент естественной смертности хищников; причем a, b, k, m – положительные постоянные ($k < 1$).

Время присутствия популяции хищников на участке связано со структурной переменной, формальное определение которой введено в работах [2–4]. Далее структурную переменную будем называть пищевой привлекательностью участка. Итак, введем понятие пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Следуя идее Р. Ардити (R. Arditi) [7] о важности рассмотрения величины отношения x_1/x_2 при описании динамики популяций, рассмотрим функцию

$$w(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda,$$

т. е. отклонение относительной величины обеспеченности хищника ресурсом от некоторого порога $\lambda > 0$. Будем полагать, что при $w(t) < 0$ проявляется тенденция популяции хищников к миграции. Ясно, что мгновенное значение $w(t^*) = 0$ не является определяющим для начала миграции в момент времени $t = t^*$ при условии, что $w(t) > 0$ при $t \in [0, t^*)$. Для начала миграции недостаток пищевого ресурса при $w(t) < 0$ должен накапливаться в течение некоторого времени, что приводит к рассмотрению величины $\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$. Следуя принципу «стада себялюбцев», предложенному В. Гамильтоном (W. Hamilton) в работе [8] для объяснения одновременности миграции особей популяции, рассмотрим величину $\int_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$, учитывающую объем x_2 популяции.

Определение 1. Пищевой привлекательностью участка для популяции хищников \tilde{n} называется сумма

$$\tilde{n} = \tilde{n}(t) = \Lambda + \int_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau, \quad (2)$$

где $\Lambda = \tilde{n}(0)$ – положительная постоянная.

Пусть $t = 0$ – момент времени, в который популяция хищников находится на участке. Тогда полагаем, что при $\tilde{n}(t) > \Lambda$ популяция хищников находится на участке, при $\tilde{n}(t) < \Lambda$ – находится вне участка, при $\tilde{n}(t) = \Lambda$ поведение хищников определяется знаком разности $x_1 - \lambda x_2$. Отметим, что необходимость учета пороговых эффектов в моделях поведения популяций отмечена в [1].

Таким образом, для \tilde{n} используется выражение, предлагаемое на основе концепций Р. Ардити и В. Гамильтона. За счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности (2) решение об уходе принимается с учетом предыстории развития системы. Действительно, чтобы популяция покинула участок, она должна испытывать недостаток пищевого ресурса в течение некоторого времени. Другими словами, происходит накопление недостатка пищевого ресурса, и когда накопление достигает порогового значения, популяция покидает участок.

Равенство (2) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \quad (3)$$

Объединяя (1) и (3), получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Благодаря тому, что в правых частях первых двух дифференциальных уравнений системы (4) не содержится переменная \tilde{n} , качественное и аналитическое исследование системы (4) упрощается.

Определение 2. Допустимым внешним воздействием называется изъятие хищников с постоянной интенсивностью $u \geq 0$, где $u \in \mathbb{R}$.

Система (4) с учетом допустимого внешнего воздействия u примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Введем векторные обозначения

$$r = (x_1, x_2, \tilde{n}), f = (f_1, f_2, f_3),$$

где $f_1 = x_1(a - bx_2)$, $f_2 = x_2(kbx_1 - m - u)$, $f_3 = x_1 - \lambda x_2$. Тогда система (5) примет вид

$$\dot{r} = f(r, u). \quad (6)$$

Пусть $r(t, u)$ – решение уравнения (6), соответствующее внешнему воздействию u . Тогда траектория, соответствующая данному решению, есть множество $\{r(t, u) : t \in I\}$, где I – максимальный промежуток существования решения.

Замечание 1. В дальнейшем для сокращения текста не будем различать обозначения r , $\{r\}$ и термины в случаях, которые не приводят к непониманию.

Пусть $r(t, u, M_0) = (x_1(t, u, M_0), x_2(t, u, M_0), \tilde{n}(t, u, M_0))$ – траектория системы (6), причем $r(0, u, M_0) = M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$.

Определение 3. Точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ называется точкой сохранения структуры биосообщества, если найдется такое допустимое внешнее воздействие u , что

$$\tilde{n}(t, u, M_0) \geq \Lambda \quad (7)$$

при любом $t \geq 0$.

Пусть A – множество точек сохранения структуры биосообщества.

Определение 4. Допустимое внешнее воздействие u , при котором выполнено (7), называется воздействием, сохраняющим структуру биосообщества.

Пусть $U(M_0)$ – множество допустимых управлений u , при которых M_0 – точка сохранения структуры биосообщества.

С прикладной точки зрения естественно рассмотреть задачу нахождения $\inf U(M_0)$, т. е. определить внешнее, антропогенное, воздействие, сохраняющее видовую структуру биосообщества, наименьшим образом изменяющее его естественную динамику. Но это трудная задача, решение которой пока получить не удастся. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Пусть $M_0 \in A$. Найти воздействие $u \in U(M_0)$ такое, что

$$\dot{\tilde{n}}(t, u, M_0) \geq 0 \quad (8)$$

при любом $t \geq 0$.

Замечание 2. Очевидно, что из (8) следует (7).

Задача 2. Найти множество таких точек $M_0 \in A$, для которых задача 1 разрешима.

Проще говоря, в задаче 1 нужно найти допустимое внешнее воздействие, обеспечивающее неубывание функции пищевой привлекательности, в задаче 2 – при каких начальных численностях популяций задача 1 разрешима.

Таким образом, если популяция жертв входит в рацион популяции хищников, то решение задачи 1 позволит сохранить популяцию хищников на участке сколь угодно долго. В связи с тем, что, покинув участок, некоторые особи популяции хищников до другого участка могут не дойти, поставленная задача обретает важное значение в случае, когда популяция хищников – исчезающий вид.

Замечание 3. Следует отметить, что задача 1 является задачей выживаемости, которая заключается в построении такого внешнего воздействия на систему, при котором ее траектории принадлежат некоторому подмножеству фазового пространства, не покидая его.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Отдельно рассмотрим классическую модель «хищник-жертва» Лотки – Вольтерры, учитывающую изъятие хищников,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u). \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение фазовой траектории системы (9), проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид (при $u = 0$ см., например, [5])

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (10)$$

где

$$c = c(x_{10}, x_{20}, u) = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kbx_{10}.$$

Через $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u)$ обозначим левую часть уравнения (10). Нетрудно показать, что $f = 0$ – выпуклая замкнутая кривая.

Положение равновесия R системы (9) в области $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ при постоянном u имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u}{bk}, \quad x_2 = \frac{a}{b}.$$

В силу того, что в правые части первых двух уравнений системы (5) не входит \tilde{n} , в пространстве (x_1, x_2, \tilde{n}) траектории этой системы располагаются на цилиндрических поверхностях. При этом образующие цилиндрических поверхностей параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (9). Из того, что в данной работе решается задача сохранения популяции хищников на участке, т. е. ищется воздействие на биосообщество участка, при котором $\tilde{n}(t) \geq \Lambda$ при любом $t \geq 0$ и при $t = 0$ $\tilde{n}(0) = \Lambda$, следует, что траектории системы (5) при $t \geq 0$ находятся на части цилиндрической поверхности, содержащейся в полупространстве $\tilde{n} \geq \Lambda$.

Для системы (5) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

инвариантно, поэтому далее $x_1 > 0, x_2 \geq 0$.

Замечание 4. Если начальная точка $M_0 \in \pi^- = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 < 0\}$, то популяция хищников покидает участок. Действительно, в точке M_0 имеем $\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2 < 0$, или \tilde{n} убывает, следовательно, популяция хищников мигрирует с участка.

Замечание 5. Вместо исследования поведения траекторий системы (5) достаточно исследовать поведение проекций траекторий системы (5) на плоскость $(x_1, x_2, 0)$, которую обозначим через (x_1, x_2) . Причем, так как проекцией траектории системы (5) на (x_1, x_2) является траектория системы Лотки–Вольтерры, достаточно исследовать поведение траекторий системы (9) на координатной плоскости (x_1, x_2) . Проекцию точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ на плоскость (x_1, x_2) обозначим через $M_0(x_{10}, x_{20})$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 1 И 2

Неравенство (8) выполняется при любом $t \geq 0$, если траектория системы (9), проходящая через $M_0(x_{10}, x_{20})$, содержится в полуплоскости $x_1 - \lambda x_2 \geq 0$. В работе рассматривается предельный случай – случай касания траектории системы (9), проходящей через M_0 , и прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in B = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 \geq 0, x_{10} \geq \frac{(a+m)\lambda}{(1+k\lambda)b}\}$.

Введем обозначения:

$$P = 1 + \ln \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda}, \quad Q = a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} - bx_{20} - kbx_{10}. \quad (11)$$

Заметим, что $Q < 0$. Действительно, поскольку $M_0 \in B$, то

$$\frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} \leq 1.$$

Следовательно, $\ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} \leq 0$. Тогда $Q < 0$.

Справедлив результат.

Теорема 1. Траектория системы (9), проходящая через точку $M_0 \in B$ и касающаяся прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, существует и единственна тогда и только тогда, когда

$$P = \ln(-Q) + 1. \quad (12)$$

Эквивалентная формулировка теоремы 1. Траектория системы (9), проходящая через точку $M_0 \in B$ и касающаяся прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, существует и единственна тогда и только тогда, когда точка M_0 является точкой кривой

$$bx_2 \left(\frac{x_1}{\lambda x_2} - 1 \right) + a \ln \frac{\lambda x_2}{x_1} = 0. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть (x_1, x_2) – точка касания траектории системы (9), проходящей через M_0 , и прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. Тогда ее координаты удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (14)$$

$$\frac{x_2(kbx_1 - m - u)}{x_1(a - bx_2)} = \frac{1}{\lambda}, \quad (15)$$

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad (16)$$

где $c = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kbx_{10}$.

Решим сначала систему (15)–(16). Ее решение имеет вид

$$x_1 = \lambda x_2, \\ x_2 = \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}.$$

Таким образом, получаем, что точка касания траектории системы (9), необязательно проходящей через M_0 , и прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$ имеет координаты

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}, \\ x_2 = \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}. \end{cases} \quad (17)$$

Далее, подставив выражения для x_1, x_2 (17) в уравнение (14), получим уравнение относительно u

$$\begin{aligned} & a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ & + (m+u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - kb\lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ & - (a \ln x_{20} - bx_{20}) \\ & + (m+u) \ln x_{10} - kbx_{10} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решим последнее уравнение. Другими словами, найдем значения u , при которых траектория системы (9), проходящая через точку M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

После вынесения в уравнении (18) общего множителя второго и четвертого слагаемых за скобки получим уравнение

$$\begin{aligned} & a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - (a+m+u) \\ & + (m+u+a-a) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ & - (a \ln x_{20} - bx_{20}) \\ & + (m+u+a-a) \ln x_{10} - kbx_{10} = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$z = a + m + u.$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & a \ln \frac{z}{b(1+k\lambda)} - z + (z-a) \ln \lambda \frac{z}{b(1+k\lambda)} \\ & - (a \ln x_{20} - bx_{20} + (z-a) \ln x_{10} - kbx_{10}) = 0, \end{aligned}$$

или после преобразований, учитывая формулы для P и Q (11), получаем

$$z \ln z = Pz + Q. \quad (19)$$

Учитывая взаимное положение графиков функций $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$, заключаем, что существует 0, 1 или 2 решения уравнения (19). Таким образом, касательная траектория единственна тогда и только тогда, когда графики $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$ имеют одну общую точку, которая является точкой касания этих линий. Итак, пусть z – единственное решение уравнения (19). Тогда z удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ (z \ln z)' = (Pz + Q)' \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ \ln z + 1 = P. \end{cases}$$

Решив второе уравнение последней системы относительно z и подставив решение в первое уравнение, получим условие, обеспечивающее существование единственного решения уравнения (19). Оно имеет вид (12).

При этом воздействие u имеет вид

$$u = e^{P-1} - a - m$$

или

$$u = \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m \quad (20)$$

и является допустимым. Допустимость воздействия u следует из условия: $M_0 \in B$.

Далее подставим выражения для P и Q (11) в (12). Получим уравнение

$$\begin{aligned} & 1 - \ln \frac{\lambda}{b(1+k\lambda)} + \ln x_{10} \\ & = \ln(-a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} + b(x_{20} + kx_{10})) + 1. \end{aligned}$$

После преобразований оно примет вид (13). Получаем, что для точки M_0 , принадлежащей кривой (13), существует единственное u , при котором траектория системы (9) проходит через M_0 и касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. \square

Замечание 6. Если для углового коэффициента P прямой $y = Pz + Q$ выполнено равенство (12), то уравнение (19) имеет одно решение. Свойства функций $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$ таковы, что при увеличении угла наклона прямой $y = Pz + Q$ к положительному направлению оси Oz уравнение (19) имеет два решения, а при уменьшении – не имеет решений. Другими словами, при $P > \ln(-Q) + 1$ уравнение (19) имеет два решения, что соответствует существованию двух значений u , при которых траектория системы (9), проходящая через M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, а при $P < \ln(-Q) + 1$ уравнение (19) не имеет решений или не существует u таких, что траектория системы (9), проходящая через M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Обозначим левую часть уравнения (13) через $g(x_1, x_2)$. Исследуем кривую

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = 0\}.$$

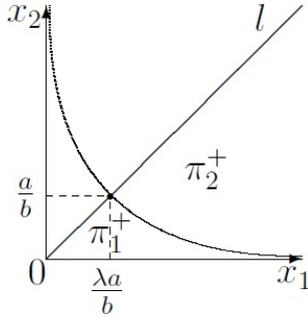
Сначала разберемся в структуре множества решений. Уравнение (13) представим в виде

$$\frac{bx_1}{\lambda} - a \ln x_1 = \frac{b}{\lambda} \lambda x_2 - a \ln(\lambda x_2).$$

Отсюда видно, что x_1 или λx_2 – корни уравнения

$$\frac{b}{\lambda}x - a \ln x = C,$$

в котором левая часть – выпуклая вниз функция $f(x)$ с минимумом в точке $x = \frac{\lambda a}{b}$, правая часть – C – значение функции $f(x)$, полученное при фиксированном значении $x = \lambda x_2$ или $x = x_1$ соответственно. Уравнение имеет два корня $\lambda x_2 = x_1$, λx_2 – альтернативный корень уравнения. Таким образом, получаем, что множество решений уравнения (13) распадается на две ветви, одна из которых – прямая $l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$. Можно показать, что другая ветвь есть график монотонно убывающей выпуклой вниз функции с двумя асимптотами (см. рисунок).



Кривая Γ
Curve Γ

Далее выясним, для какого множества точек существует два значения u , при которых траектория системы (9), проходящая через точку M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, и для какого множества точек не существует таких u .

Итак, кривая Γ делит угловую область $\pi^+ = \{(x_1, x_2) : x_1 > \lambda x_2 > 0\}$ на две части π_1^+ и π_2^+ (см. рисунок). Определим знак $g(x_1, x_2)$ в каждой из частей. В π_1^+ и π_2^+ выберем соответственно точки $(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b})$ и $(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b})$. После подстановки координат первой точки в выражение для $g(x_1, x_2)$ получим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b}\right) &= b \frac{a}{2b} \left(\frac{\frac{\lambda a}{b}}{\lambda \frac{a}{2b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{2b}}{\frac{\lambda a}{b}} \\ &= \frac{a}{2} + a \ln \frac{1}{2} = a \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из замечания 6 получаем, что для точек из π_1^+ не существует внешнего воздействия u , при котором траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. После подстановки координат второй точки в выра-

жение для $g(x_1, x_2)$ получим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b}\right) &= b \frac{a}{b} \left(\frac{\frac{2\lambda a}{b}}{\lambda \frac{a}{b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{b}}{\frac{2\lambda a}{b}} \\ &= a + a \ln \frac{1}{2} = a(1 - \ln 2) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из замечания 6 получаем, что для точек из π_2^+ существует два внешних воздействия $u_{1\tau}, u_{2\tau}$, при которых траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Замечание 7. Задача 1 разрешима для $M_0 \in B \cap (\Gamma \cup \pi_2^+)$. А именно, если $M_0 \in B \cap \Gamma$, то u вычисляется по формуле (20), если $M_0 \in B \cap \pi_2^+$, то

$$u_{1\tau} = z_1 - a - m,$$

$$u_{2\tau} = z_2 - a - m,$$

где z_1, z_2 – решения уравнения (19). Следует отметить, что кроме полученных воздействий, возможно, существуют и другие решения задачи 1.

Справедлива следующая теорема 2.

Теорема 2. Если проекция траектории $r(t, u)$ на плоскость (x_1, x_2) касается одной из ветвей кривой Γ , то она касается и другой ветви. При этом если $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$ – соответствующие точки касания, то

$$x_{11} = x_{12}.$$

Доказательство. Проекцией траектории $r(t, u)$ на плоскость (x_1, x_2) является траектория системы (9). Предположим, что она касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. Тогда уравнение проекции, т. е. траектории системы (9), проходящей через точку касания (17), имеет вид

$$\begin{aligned} a \ln x_2 - b x_2 + (m + u) \ln x_1 - k b x_1 \\ - \left(a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \right) \\ + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Докажем, что при подстановке вместо x_1 первой координаты точки касания (17) в последнее уравнение и в уравнение кривой (13) получим равносильные уравнения. Действительно, после подстановки $x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$ получим уравнения

$$\begin{aligned} a \ln x_2 - b x_2 + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ - \left(a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \right) \\ + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{a + m + u}{1 + k\lambda} - b x_2 + a \ln \lambda x_2 - a \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} = 0.$$

После преобразований уравнения примут соответственно вид

$$a \ln x_2 - bx_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} + \frac{a+m+u}{1+k\lambda} = 0,$$

$$\frac{a+m+u}{1+k\lambda} - bx_2 + a \ln x_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0.$$

Последние уравнения равносильны. Причем из свойств кривой следует, что уравнения имеют два решения x_{21}, x_{22} . Итак, получаем, что траектория системы (9) и кривая Γ имеют две общие точки $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$, причем $x_{11} = x_{12} = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$. Далее докажем, что точки $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$ – точки касания траектории системы (9) и кривой Γ . При $x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$ угловые коэффициенты касательных к кривой Γ $x'_2 = \frac{x_2(\lambda a/b - x_1)}{\lambda x_1(a/b - x_2)}$ (следует из (13)) и к траектории системы (9) $\frac{dx_2}{dx_1}$ (получается делением второго уравнения системы (9) на первое) после преобразований принимают одинаковый вид

$$\begin{aligned} x'_2 \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} &= \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} \\ &= \frac{bx_2(ak\lambda - m - u)}{\lambda(a+m+u)(a - bx_2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x_2 = x_{21}$ и $x_2 = x_{22}$ угловые коэффициенты касательных к обеим кривым равны. Таким образом, получаем, что траектория системы (9) и кривая Γ касаются в точках $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$, причем $x_{11} = x_{12}$. \square

УМЕНЬШЕНИЕ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Внешнее воздействие u на биосистему естественно стараться уменьшить, поэтому рассмотрим следующий результат, основанный на теореме о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от правой части (см., например, [6]) и лемме, доказанной в работе [4].

Пусть A' – прообраз точки A при движении по траектории системы (5) (без учета ограничений на x_1, x_2, \tilde{n}) из точки A вспять (при убывании времени) в течение времени, равного периоду проекции данной траектории на плоскость (x_1, x_2) . Очевидно, точка A' лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости $\tilde{n} = \Lambda$. Возникает вопрос: какая из точек – A или A' лежит выше? Ответ дается в работе [4] леммой.

Пусть $\tilde{n}(A), \tilde{n}(A')$ – соответствующие координаты точек A и A' .

Лемма. [4] Если

- а) $\lambda < \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) > \tilde{n}(A')$;
- б) $\lambda > \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) < \tilde{n}(A')$;
- в) $\lambda = \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) = \tilde{n}(A')$.

Введем обозначения:

- 1) $T(u)$ – период траектории системы (9), проходящей через M_0 , соответствующий внешнему воздействию u ;
- 2) если $M_0 \in B$, то

$$\bar{u} = \begin{cases} \min\{u_{1\tau}, u_{2\tau}\} & \text{для } M_0 \in \pi_2^+, \\ \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m & \text{для } M_0 \in \Gamma; \end{cases}$$

- 3) $|\cdot|$ – обозначение для нормы.

Справедлива следующая теорема 3.

Теорема 3. Для любой точки $M_0 \in B \cap (\pi_2^+ \cup \Gamma)$ существует такое $\delta > 0$, что при $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ таком, что $\lambda < \frac{m+u}{ak}$

$$\tilde{n}(t, u, M_0) > \Lambda \quad (21)$$

для любого $t > 0$.

Доказательство. Правые части системы (5) – многочлены относительно x_1, x_2, \tilde{n} . Следовательно, применима теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (см. [6]), согласно которой для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ справедливо неравенство

$$|r(t, u, M_0) - r(t, \bar{u}, M_0)| < \varepsilon, \quad (22)$$

где $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$; $\bar{t} \in [0, T(\bar{u})]$ – первый момент времени после $t = 0$, при котором шар радиуса ε с центром в точке $(x_1(\bar{t}, \bar{u}, M_0), x_2(\bar{t}, \bar{u}, M_0), \tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0))$ касается плоскости $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$; $T_{sup} = \sup_{u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)} T(u)$.

Неравенство (22) обеспечивает близость траекторий при разных $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ для любого $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$, но нам надо обеспечить выполнение неравенства (21) для любого $t \in (0, +\infty)$.

Из неравенства (22) следует, что для любого $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$ точки траекторий при любом $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ находятся в шаре радиуса $\varepsilon > 0$. Для того чтобы при любом $t > 0$ ни одна траектория, находящаяся в шаре, не вышла в полупространство $\tilde{n} < \Lambda$, достаточно взять

$$\varepsilon < \frac{\tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0) - \Lambda}{2}. \quad (23)$$

Получим, что при любом $t \leq \bar{t}$ точки траекторий в полупространстве $\tilde{n} > \Lambda$, т. к. при $t = 0$ $M_0 \in \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$ и $\dot{\tilde{n}} > 0$; при

$t = \bar{t}$ шар находится на расстоянии не меньшем $\frac{\tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0) - \Lambda}{2} > 0$. Далее, при $\bar{t} < t < \bar{t} + T_{sup}$ шар с центром в точке $r(t, \bar{u}, M_0)$ поднимается вверх, т. к. $\dot{\tilde{n}}(t, \bar{u}, M_0) \geq 0$. Так как $\lambda < \frac{m+u}{ak}$, то в силу леммы ([4]) получаем, что для любого $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ и любого $t > \bar{t} + T_{sup}$

$$\tilde{n}(t + T(u), u, M_0) > \tilde{n}(t, u, M_0).$$

Это значит, что неравенство (21) выполняется для любого $t > 0$. \square

Замечание 8. Оценим теперь величину δ сверху.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{f}(\bar{r}, \bar{u}), \\ \dot{r} &= f(r, u).\end{aligned}$$

Пусть $\bar{r}(t, \bar{u}, M_0)$, $r(t, u, M_0)$ – решения первого и второго уравнений соответственно; $V = \{t \in [0, \bar{t} + T_{sup}], |r - \bar{r}| \leq \rho\}$ – окрестность решения $\bar{r}(t, \bar{u}, M_0)$, где $\rho > 0$, в которой $\bar{f}(\bar{r}, \bar{u})$ и $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) непрерывны. Как в доказательстве теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения (см. теорему 6 на с. 52 в [6]), из неравенств

$$|\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - \bar{f}(r, \bar{u})| \leq k|\bar{r} - r|,$$

где $(t, \bar{r}), (t, r) \in V, k = 3p$, где $p = \max \left| \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} \right|$ ($i, j = 1, 2, 3$);

$$\begin{aligned}|\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| &= \max_{(t,r) \in V} |\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| \\ &= \max |x_2(\bar{u} - u)| < c\delta = \tilde{\delta},\end{aligned}$$

где $c = \max x_2, \delta > |\bar{u} - u|$, следует

$$|\dot{\bar{r}} - \dot{r}| = |\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - f(r, u)| < k|\bar{r} - r| + \tilde{\delta}.$$

Тогда при $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$ имеем

$$|\bar{r} - r| < \tilde{\delta} \left(e^{ks} \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right),$$

где $s = \bar{t} + T_{sup}$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$, для которого выполнено неравенство (23), $\varepsilon_1 = \min\{\rho, \varepsilon\}$ и такое $\tilde{\delta} > 0$, чтобы

$$|\bar{r} - r| < \tilde{\delta} \left(e^{ks} \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right) < \varepsilon_1.$$

Учитывая, что $\tilde{\delta} = c\delta$, получаем

$$\delta < \frac{\varepsilon_1}{c(e^{ks}(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k})}.$$

Таким образом, получена оценка величины δ такой, что для любого $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u})$ M_0 является точкой сохранения структуры биосообщества.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено решение задачи сохранения видовой структуры биосообщества участка, основанное на отлове хищников. Найдены начальные численности, при которых задача разрешима. Получены интенсивности изъятия хищников, обеспечивающие рост пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Поскольку процесс отлова хищников требует материальных и физических затрат, то естественно возникает вопрос о возможности уменьшения интенсивности изъятия особей. Доказано, что уменьшение интенсивности изъятия также позволяет решить поставленную задачу. Получена оценка величины, уменьшение интенсивности изъятия на которую не приведет к миграции хищников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989. Т. 1. 667 с.
2. Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
3. Кириллов А. Н. Системы с переменным фазовым пространством в моделировании процессов биологической очистки // Математические проблемы экологии: Всерос. школьно-коллоквиум: Тез. докл. Душанбе, 1991. С. 44.
4. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, вып. 2. С. 318–336.
5. Леонов Г. А. Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 218 с.
6. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Учебник. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
7. Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // J. Theor. Biol. 1989. Vol. 139. P. 311–326.
8. Hamilton W. Geometry for the selfish herd // J. Theor. Biol. 1971. Vol. 31. P. 295–311.
9. Kirillov A., Ivanova A. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1500–1511. doi: 10.1134/S0005117917080100

Поступила в редакцию 23.04.2021

REFERENCES

1. *Begon M., Harper J. L., Townsend C. R.* Ecology: individuals, populations and communities. Oxford: Blackwell Sci. Publ., 1986. 876 p.
2. *Kirillov A. N.* Dinamicheskie sistemy s peremennoi strukturoi i razmernostiu [Dynamical systems with varying structure and dimensions]. *Izv. vuzov. Priborostroenie* [J. Instrument Engineering]. 2009. Vol. 52, no. 3. P. 23–28.
3. *Kirillov A. N.* Sistemy s peremennym fazovym prostranstvom v modelirovanii protsessov biologicheskoi ochistki [Systems with varying phase space in the modeling of biological purification processes]. *Matematicheskie problemy ekol.: Vseros. shkola-kollokvium: Tez. dokl.* [All-Russ. school and colloquium «Mathematical problems in ecology»: Proceed.] Dushanbe, 1991. P. 44.
4. *Kirillov A. N.* Ekologicheskie sistemy s peremennoi razmernostiu [Ecological systems with varying dimensionality]. *Obozrenie priklad. i promyshlennoi matematiki* [Surveys in Appl. and Industrial Mathematics]. 1999. Vol. 6, no. 2. P. 318–336.
5. *Leonov G. A.* Mathematical problems of control theory: an introduction. Singapoure: World Scientific, 2001. 172 p.
6. *Filippov A. F.* Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravnenii. Uchebnik [Introduction to the theory of differential equations. A textbook]. Moscow: KomKniga, 2007. 240 p.
7. *Arditi R., Ginzburg L.* Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *J. Theor. Biol.* 1989. Vol. 139. P. 311–326.
8. *Hamilton W.* Geometry for the selfish herd. *J. Theor. Biol.* 1971. Vol. 31. P. 295–311.
9. *Kirillov A., Ivanova A.* Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem. *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78. P. 1500–1511. doi: 10.1134/S0005117917080100

Received April 23, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванова Александра Сергеевна
младший научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: a_s_ivanova@bk.ru
тел.: +79535268311

CONTRIBUTOR:

Ivanova, Alexandra
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: a_s_ivanova@bk.ru
tel.: +79535268311