Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 114–122
DOI: 10.17076/mat144

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЧИСЛА РЕБЕР СЛУЧАЙНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Ю. Л. Павлов[1]**, Е. В. Феклистова**[1]

[1]*Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону с параметром $\tau = \tau(N)$. Свойства этого графа зависят от значения параметра τ. Эти значения можно разбить на три области: $\tau > 2$, $\tau \in (1, 2)$, $\tau < 1$, в каждой из которых структура графа сходна при всех значениях τ, но резко отличается от структуры в двух других областях. Это значит, что значения $\tau = 2$ и $\tau = 1$ являются критическими точками. Важнейшей характеристикой графа является число ребер. Его предельные распределения при $N \to \infty$ и фиксированных τ также различны в указанных трех областях. Поэтому актуальным является исследование поведения числа ребер в переходных ситуациях при τ, изменяющихся в окрестностях критических точек. В статье найдены локальные предельные распределения числа ребер графа при $\tau \to 2, \tau \to 1$, а также при $\tau \to \infty$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайный конфигурационный граф; число ребер; локальные предельные теоремы; критические точки.

Yu. L. Pavlov, E. V. Feklistova. LIMIT BEHAVIOUR OF THE NUMBER OF EDGES IN A CONFIGURATION RANDOM GRAPH NEAR CRITICAL POINTS

We consider a configuration random graph with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to power-law distribution with the parameter $\tau = \tau(N)$. The properties of this graph depend on the value of the parameter τ. These values can be grouped into three zones: $\tau > 2$, $\tau \in (1, 2)$, $\tau < 1$, in each of which the structure of the graph is similar for all values of τ, but differs greatly from the structure in the other two zones. This means that the values $\tau = 2$ and $\tau = 1$ are critical points. The most important characteristic of a graph is the number of edges. Limit distributions of this characteristic also differ between these three zones as $N \to \infty$ and τ is fixed. It is therefore important to study the behavior of the number of edges in transitional situations when τ changes in the neighborhood of the critical points. In this paper the local limit distributions of the number of edges of a graph as $\tau \to 2, \tau \to 1$, and also as $\tau \to \infty$ were obtained.

K e y w o r d s: configuration random graph; number of edges; local limit theorems; critical points.

Введение

Конфигурационные графы со случайными степенями вершин в последние десятилетия широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких, как Интернет, системы мобильной связи и т. д. (см., например, [5, 8]). Кроме того, недавно предложено использовать такие графы для описания динамики развития лесных пожаров и банковских кризисов [1, 3]. Конфигурационные графы конструируются в два этапа. На первом этапе определяются степени всех вершин, которые рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее «полуребер», т. е. ребер, инцидентных данной вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. В рассматриваемых моделях считается, что все полуребра графа, как и вершины, различны (занумерованы). На втором этапе построения графа полуребра случайным образом попарно соединяются для образования ребер, при этом для большинства сетей достаточно предположить, что такие соединения происходят равновероятно.

Пусть N означает общее число вершин в графе, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ – случайные величины, равные степеням вершин $1, \ldots, N$ соответственно. Обозначим

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_i = k\}, k = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, N. \quad (1)$$

Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали, что для больших значений k число узлов, имеющих k связей, пропорционально $k^{-(\tau+1)}$, где τ – положительный параметр, в большинстве случаев принадлежащий интервалу $(1, 2)$ [6, 8, 10]. Это значит, что при $k \to \infty$ мы можем считать, что

$$p_k \sim h(k)/k^{\tau+1}, \quad (2)$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся функция. Проведенные исследования показали, что при больших N структура и динамика развития случайного графа практически полностью определяется свойством (2) и не зависит от вероятностей p_k для небольших значений k и от вида функции $h(k)$. Это дает возможность выбора распределения степеней вершин (1) наиболее удобным для изучения графов способом.

Мы будем рассматривать модель случайного конфигурационного графа, предложенную в [10] и удовлетворяющую перечисленным выше условиям. В этой модели предполагается, что

$$\mathsf{P}\{\xi_i \geqslant k\} = \frac{1}{k^\tau}, i = 1, \ldots, \; N \quad (3)$$

или, что эквивалентно,

$$p_k = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, k = 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

Легко проверить, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \tau k^{-(\tau+1)} \quad (5)$$

и, следовательно, условие (2) выполнено. Заметим еще, что при $\tau \geqslant 1$

$$\mathsf{E}\xi_i = \zeta(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau}, \quad (6)$$

где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ,

$$\mathsf{D}\xi_i = \sigma^2 = 2\zeta(\tau - 1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau), \quad (7)$$

а при $\tau \leqslant 1$ сумма ряда (6) равна бесконечности.

Обозначим ζ_N сумму степеней всех вершин графа. Поскольку такая сумма должна быть четным числом, в противном случае в граф вводится вспомогательная дополнительная вершина единичной степени. Ясно, что введение такой вершины не влияет на асимптотическое поведение графа. Таким образом, $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ в случае четной суммы степеней и $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N + 1$ иначе. Далее полуребра равновероятно соединяются, формируя ребра. Ниже рассматривается предельное поведение ζ_N при $N \to \infty$, которое очевидным образом определяет асимптотику числа ребер графа, которое равно $\zeta_N/2$.

В статье [11] получены локальные предельные теоремы для ζ_N при $N \to \infty$ и всех возможных фиксированных значений τ. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $N \to \infty$, $\tau > 2$. Тогда*

$$\sup_n \left| \sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N}} \right| \to 0.$$

Теорема 2. *Пусть $N \to \infty, \tau = 2$. Тогда*

$$\sup_n \left| \sqrt{2\pi N \ln N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2N \ln N}} \right| \to 0.$$

Теорема 3. *Пусть $N \to \infty$, $\tau \in (1, 2)$. Тогда*

$$\sup_n \left| N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g\left(\frac{n - N\zeta(\tau)}{N^{1/\tau}}\right) \right| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией

$$f(t) = exp\Big\{ -\Gamma(1-\tau)|t|^\tau \left(1 - i\frac{t}{|t|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\tau}{2}\right) \times \cos\frac{\pi\tau}{2} \Big\}, \quad (8)$$

$\Gamma(x)$ *– значение гамма-функции в точке x.*

Теорема 4. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 1$. Тогда*

$$\sup_n |N\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g((n - N\ln N)/N)| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией

$$f(t) = exp\Big\{-\frac{\pi|t|}{2}\left(1 + \frac{2it\ln|t|}{\pi|t|}\right)\Big\}. \qquad (9)$$

Теорема 5. *Пусть $N \to \infty$, $\tau \in (0,1)$. Тогда*

$$\sup_n \left|N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g(n/N^{1/\tau})\right| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией (8).

Приведенные теоремы подтверждают известный факт (см. [10]), что свойства графа существенно зависят от значения параметра τ распределения (4). В частности, эти значения можно разбить на три области: $\tau > 2$, $\tau \in (1,2)$, $\tau < 1$, в каждой из которых структура графа сходна при всех значениях τ, однако резко отличается от структуры в двух других областях. Таким образом, значения параметра $\tau = 2$ и $\tau = 1$ можно назвать критическими точками или точками фазового перехода. В связи с этим актуальной является задача исследования предельного поведения ζ_N в случаях, когда параметр τ не фиксирован, а зависит от N и при $N \to \infty$ сближается с критическими точками.

Основные результаты

Ниже доказаны локальные предельные теоремы для сумм ζ_N при $\tau \to 1$ и при $\tau \to 2$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 2 + y_N$, $y_N \to 0$, $0 < \gamma < \infty$, а последовательность B_N выбрана так, что*

$$B_N = \begin{cases} \sigma\sqrt{N}, & y_N \ln N \to \infty; \\ \sigma\sqrt{N(1 - e^{-\gamma/2})}, & y_N \ln N \to \gamma; \\ \sqrt{N\ln N}, & y_N \ln N \to 0; \\ \sqrt{\frac{2N}{y_N}(1 - e^{\gamma/2})}, & y_N \ln N \to -\gamma; \\ \left(-\frac{2N}{y_N}\right)^{1/\tau}, & y_N \ln N \to -\infty. \end{cases} \qquad (10)$$

Тогда

$$\sup_n \left|B_N\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(n-N\zeta(\tau))^2}{2B_N^2}}\right| \to 0.$$

Теорема 7. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 1 + y_N$, $y_N \to 0$. Тогда*

$$\sup_n \left|N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g\left(\frac{n - NS(N)}{N^{1/\tau}}\right)\right| \to 0,$$

где

$$\begin{aligned} S(N) = &N^{y_N/\tau}\left(\zeta(\tau) + \Gamma(-y_N) + y_N^{-1} + c\right) \\ &- y_N^2 - c, \end{aligned} \qquad (11)$$

c – постоянная Эйлера ($c = 0,57721\ldots$), $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией (9).

Представляет интерес также предельное поведение распределения суммы ζ_N при $\tau \to \infty$.

Теорема 8. *Пусть $N, \tau \to \infty$ так, что $N/8^\tau \to \infty$. Тогда*

$$\sup_n \left|\sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(n-N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N}}\right| \to 0.$$

Вспомогательные утверждения

Ниже будут получены леммы 1–3 о слабой сходимости распределений суммы ζ_N к соответствующим предельным законам, а затем с помощью этих лемм доказываются теоремы 6–8. Заметим еще, что в теореме 7 при выполнении условия $y_N \ln N \to \gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$, выражение $S(N)$ имеет более простой вид:

$$S(N) = N^{y_N/\tau}/y_N + y_N^{-2} + c(e^\gamma - 1).$$

Это следует из (11), разложения $\Gamma(-y_N)$ в окрестности нуля [2, 7]:

$$\Gamma(-y_N) = -y_N^{-1} - c + E(y_N), \qquad (12)$$

где $E(y_N)$ – степенной ряд такой, что $E(y_N) = O(y_N)$, а также из того, что дзета-функция Римана при достаточно близких к единице значениях аргумента s имеет вид [2]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c + \mathcal{D}(s), \qquad (13)$$

где

$$\mathcal{D}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\gamma_k(s-1)^k, \qquad (14)$$

γ_k – постоянные Стирлинга.

Лемма 1. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 2 + y_N$, $y_N \to 0$, а последовательности B_N определены в (10). Тогда*

$$\mathsf{P}\{(\zeta_N - N\zeta(\tau))/B_N < x\} \to \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство. Пусть $\psi(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - N\zeta(\tau))/B_N$. Тогда по теореме непрерывности нам достаточно показать, что

$$\psi(t) = \varphi^N(t/B_N)e^{-\frac{itN\zeta(\tau)}{B_N}} \to e^{-t^2/2}, \qquad (15)$$

где $\varphi(t)$ – характеристическая функция ξ_1.
Из (4) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = 1 - \Phi(e^{it}, \tau, 1)(1 - e^{it}), \qquad (16)$$

где $\Phi(z, \tau, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^\tau}$ – трансцендентная функция Лерча [9]. Известно [2], что при достаточно малых t справедливо представление:

$$\begin{aligned}\Phi(e^{it}, \tau, 1) = &e^{-it}(\zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1} \\ &+ \zeta(\tau - 1)it + H(t)),\end{aligned} \qquad (17)$$

где

$$H(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(\tau - k)}{k!}(it)^k, \qquad (18)$$

здесь значения дзета-функции от аргумента, меньшего единицы, понимаются в смысле аналитического продолжения.
Отсюда и из (16) следует, что при $t \to 0$

$$\begin{aligned}\varphi(t) = &1 + it\zeta(\tau) - t^2\zeta(\tau - 1) + t^2\zeta(\tau)/2 \\ &- \Gamma(1-\tau)(-it)^\tau + O(t^3).\end{aligned}$$

Поэтому при $N \to \infty$ и любом фиксированном t

$$\begin{aligned}\psi(t) = &\left[1 + \frac{it\zeta(\tau)}{B_N} - \frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B_N^2} + \frac{t^2\zeta(\tau)}{2B_N^2}\right. \\ &\left.-\Gamma(1-\tau)\left(-\frac{it}{B_N}\right)^\tau + O\left(\frac{t^3}{B_N^3}\right)\right]^N \\ &\times exp\{-itN\zeta(\tau))/B_N\}.\end{aligned} \qquad (19)$$

Используя (13) и известное [4] соотношение $\Gamma(-1 - y_N) = \Gamma(1 - y_N)/(y_N(1 + y_N))$, из (19) находим, что

$$\begin{aligned}\ln\psi(t) = &\frac{Nt^2\zeta^2(\tau)}{2B_N^2} - \frac{Nt^2}{B_N^2 y_N} + \frac{Nt^2\zeta(\tau)}{2B_N^2} \\ &+ \frac{N\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B_N^2}\left(-\frac{it}{B_N}\right)^{y_N} \\ &+ O\left(\frac{Nt^3}{B_N^3}\right).\end{aligned} \qquad (20)$$

Теперь мы можем рассмотреть отдельно предельное поведение выражения (20) во всех случаях, указанных в (10). Учитывая, что в рассматриваемых условиях $\Gamma(1 - y_N) \to 1$, а также (7) и (13), получаем, что $\ln\psi(t) \to -t^2/2$, откуда и вытекает (15).
Лемма 1 доказана.

Обозначим $\psi_1(t)$ характеристическую функцию суммы $(\zeta_N - NS(N))/N^{1/\tau}$, где величина $S(N)$ определена в (11).

Лемма 2. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 1+y_N$, $y_N \to 0$. Тогда $\psi_1(t) \to exp\Big\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1 + i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\Big\}$.*

Доказательство. Используя (12) и (13), получаем, что

$$\begin{aligned}\zeta(\tau) + &\Gamma(1-\tau)(-it)^{y_N} = y_N^{-1} + c + \mathcal{D}(\tau) \\ &+ (-y_N^{-1} - c + E(y_N))|t|^{y_N} \\ &\times exp\{-iy_N(sgn\ \ t)\pi/2\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (17) следует, что при достаточно малых t

$$\begin{aligned}&\Phi(e^{it}, \tau, 1) = (1 - it + G(t))\left[(1 - |t|^{y_N})\right. \\ &\times(y_N^{-1} + c) + \mathcal{D}(\tau) + E(y_N) \\ &+(-y_N^{-1} - c + E(y_N))|t|^{y_N} \\ &\times\sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ \ t)\pi/2)^k/k! + \zeta(\tau-1)it \\ &\left.+H(t)\right],\end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$G(t) = \sum_{k=2}^{\infty}(-it)^k/k! \qquad (22)$$

Раскрывая скобки в (21) из (16), нетрудно найти, что при $t \to 0$

$$\begin{aligned}&\varphi(t) = 1 + it(1 - |t|^{y_N})(y_N^{-1} + c) + it\mathcal{D}(\tau) \\ &+ itE(y_N) + it(-y_N^{-1} - c + E(y_N)) \\ &\times|t|^{y_N}\sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ \ t)\pi/2)^k/k! + R(t),\end{aligned} \qquad (23)$$

где для остаточного члена $R(t)$ справедливо соотношение:

$$R(t/N^{1/\tau}) = o(1/N). \qquad (24)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ \ t)\pi/2)^k/k! = -(sgn\ \ t)i \\ &\times\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}(\pi y_N/2)^{2s-1}/(2s-1)! \\ &-\sum_{s=1}^{\infty}(\pi y_N/2)^{2s}/(2s)!\end{aligned} \qquad (25)$$

Заметим, что при фиксированных t

$$N|t/N^{1/\tau}|^{1+y_N}(-y_N^{-1}-c+E(y_N)) \times \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}(\pi y_N/2)^{2s-1}/(2s-1)! = \pi|t|/2+o(1), \tag{26}$$

но

$$-it|t|^{y_N}(-y_N^{-1}-c+E(y_N)) \times \sum_{s=1}^{\infty}(\pi y_N/2)^{2s}/(2s)! = o(1). \tag{27}$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$itN^{1-1/\tau}(1-|t/N^{1/\tau}|^{y_N}) = it(N^{y_N/\tau}-1)+o(1), \tag{28}$$

$$itN^{1-1/\tau}(1-|t|^{y_N}/N^{1/\tau})/y_N = it(N^{y_N/\tau}/y_N - y_N^{-2}+\ln|t|+o(1)). \tag{29}$$

Собирая вместе (23)–(29) и учитывая (12), (13), (14), находим, что

$$\ln\varphi^N(t/N^{1/\tau}) = -\frac{\pi}{2}|t|\left(1+i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right) + it\left[N^{y_N/\tau}\left(\zeta(\tau)+\Gamma(-y_N)+y_N^{-1}+c\right) - y_N^{-2}-c\right]+o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi^N\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)exp\Big\{-\frac{itNS(N)}{t^{1/\tau}}\Big\} \to exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1+i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\}, \tag{30}$$

откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $N,\tau\to\infty$, так, что $N/8^\tau\to\infty$. Тогда* $\mathsf{P}\{(\zeta_N - N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})<x\}\to\Phi(x)$.

Доказательство. Для характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ_1 при $t\to 0$ справедливо разложение:

$$\varphi(t) = 1+it\mathsf{E}\xi_1 - t^2(\sigma^2+\mathsf{E}^2\xi_1)/2 + O(t^3\mathsf{E}\xi_1^3). \tag{31}$$

Из (4) нетрудно получить, что

$$\mathsf{E}\xi_1^3 = 3\zeta(\tau-2)-3\zeta(\tau-1)+\zeta(\tau),$$

поэтому, учитывая (6) и (7), из (31) находим, что для определенной в (15) характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\zeta_N - N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})$ справедливо равенство:

$$\psi(t) = \left[1+\frac{i\zeta(\tau)t}{\sigma\sqrt{N}} - (\sigma^2+\zeta^2(\tau))\frac{t^2}{2\sigma^2N} + O\left(\frac{1}{\sigma^3N\sqrt{N}}\right)\right]^N e^{-\frac{itN\zeta(\tau)}{\sigma\sqrt{N}}}.$$

Логарифмируя это выражение, легко получить соотношение (15), что и доказывает лемму 3.

Доказательства теорем

Доказательство теоремы 6. По формуле обращения

$$(2\pi)^{-1/2}e^{-z_N^2/2} = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-itz_N - t^2/2\}\,dt, \tag{32}$$

$$B_N\mathsf{P}\{\zeta_N=n\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi B_N}^{\pi B_N} e^{-itz_N}\left(\varphi^*\left(\frac{t}{B_N}\right)\right)^N dt, \tag{33}$$

где $z_N = (n-N\zeta_N(\tau))/B_N$ и $\varphi^*(t) = \varphi(t)exp\{-it\zeta(\tau)\}$.

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi\left(B_N\mathsf{P}\{\zeta_N=n\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z_N^2/2}\right).$$

Из (32) и (33) следует, что эту разность можно представить в виде суммы

$$R_N = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4,$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itz_N}\left((\varphi^*(t/B_N))^N - e^{-t^2/2}\right)dt,$$

$$\mathrm{I}_2 = -\int_{|t|>A} exp\{-itz_N - t^2/2\}\,dt,$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon B_N} e^{-itz_N}(\varphi^*(t/B_N))^N\,dt,$$

$$\mathrm{I}_4 = \int_{\varepsilon B_N\leqslant|t|\leqslant\pi B_N} e^{-itz_N}(\varphi^*(t/B_N))^N\,dt,$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Легко видеть, что для доказательства теоремы достаточно убедиться, что R_N стремится к нулю при $N \to \infty$.

Из леммы 1 видно, что $\mathrm{I}_1 \to 0$. Для интеграла I_2 справедлива оценка:

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant \int\limits_{|t|>A} e^{-t^2/2}\,dt,$$

поэтому I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Ясно, что

$$|\mathrm{I}_4| \leqslant B_N \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} |\varphi(t)|^N\,dt.$$

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ существует такое число $C > 0$, что $|\varphi(t)| \leqslant e^{-C}$, поэтому

$$|\mathrm{I}_4| \leqslant B_N \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} |\varphi(t)|^N\,dt \leqslant B_N e^{-CN}(\pi-\varepsilon).$$

Отсюда и из (7), (10), (13) нетрудно получить, что $\mathrm{I}_4 \to 0$.

Нам осталось рассмотреть интеграл I_3. Оценим этот интеграл отдельно для пяти случаев выбора B_N, указанных в условиях теоремы. Представим I_3 в виде суммы $\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3' + \mathrm{I}_3''$, где области интегрирования слагаемых соответственно равны:

$$S' = \{t : A < |t| \leqslant D_N\},$$
$$S'' = \{t : D_N < |t| \leqslant \varepsilon B_N\},$$

а границы D_N в каждом случае задаются свои.

В первом случае $B_N = \sigma\sqrt{N}, y_N \ln N \to \infty$, а $D_N = e^{-C_1/y_N}\sigma\sqrt{N}$, здесь и далее символы $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

Пусть $t \in S'$. Используя (7) и (13), нетрудно показать, что

$$\sigma^2 = 2y_N^{-1} + 2c - \zeta(2) - \zeta^2(2), \tag{34}$$

поэтому

$$-t^2/(\sigma^2 y_N) \sim -t^2/2. \tag{35}$$

Известно [2,7], что при $y_N \to 0$

$$\Gamma(1-y_N) = 1 + cy_N + o(y_N). \tag{36}$$

Кроме того, в области S' справедливо неравенство: $|-it/(\sigma\sqrt{N})|^{y_N} < e^{-C_1} < 1$, поэтому из (36) выводим, что

$$\begin{aligned}\Big|exp\Big\{-\frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{\sigma^2}\Big(-\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\Big)^{y_N}\Big\}\Big| \\ \leqslant e^{dt^2/2},\end{aligned} \tag{37}$$

где $d < 1$. Нетрудно показать, что первое, третье и последнее слагаемые в сумме (20) при $B_N = \sigma\sqrt{N}$ являются бесконечно малыми по сравнению с t^2, поэтому из (35) и (37) следует, что для некоторого $C_2 > 0$

$$|\psi(t)| < e^{-C_2 t^2}$$

и интеграл I_3' можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Для оценки I_3'' аналогичным образом можно найти асимптотику всех слагаемых в сумме (20) и получить, что

$$\ln\psi(t) = (2 - 2c + \zeta(2) + \zeta^2(2) + 2\ln u)t^2 y_N/4,$$

где $0 < u \leqslant \varepsilon$, а в силу выбора ε для некоторого $C_3 > 0$

$$|\psi(t)| < e^{-C_3 t^2/y_N}.$$

Учитывая (34) и условие $y_N \ln N \to \infty$, отсюда находим, что

$$|\mathrm{I}_3''| \leqslant 2\varepsilon\sigma\sqrt{N}e^{-2C_3\sqrt{N}} \to 0.$$

Рассмотрим второй случай, в котором $y_N \ln N \to \gamma, 0 < \gamma < \infty, B_N = B\sqrt{N}$, где $B = \sigma\sqrt{1-e^{-\gamma/2}}$, а $D_N = y_N^{-1}$. Как раньше, из (20) следует равенство:

$$\begin{aligned}\ln\psi(t) &= \frac{t^2\zeta^2(\tau)}{2B^2} - \frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B^2} + \frac{t^2\zeta(\tau)}{2B^2} \\ &+ \frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B^2}\left(-\frac{it}{B}\right)^{y_N} \\ &+ O\left(\frac{t^3}{B^3\sqrt{N}}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

Используя (13) и (36), нетрудно получить, что при $t \in S'$

$$\begin{aligned}\frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B^2} + \frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B^2}\left(-\frac{it}{B}\right)^{y_N} \\ \sim -\frac{t^2}{B^2 y_N}(1-e^{-\gamma/2}),\end{aligned} \tag{39}$$

а остальные слагаемые в (38) бесконечно малы по сравнению с (39). Отсюда и из (34), (38) следует, что

$$\ln\psi(t) \sim -e^{-t^2/2},$$

поэтому

$$|\mathrm{I}_3'| \leqslant 2\int\limits_A^\infty e^{-t^2/4}\,dt$$

и, как обычно, этот интеграл оценивается выбором достаточно большого A.

Проводя рассуждения аналогично тому, как это было сделано в первом случае, находим, что при $t \in S''$

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_4 t^2 y_N}$$

и, поскольку $|t| \geqslant y_N^{-1}$,

$$|\mathrm{I}_3''| \leqslant 2 \int\limits_{y_N^{-1}}^{\infty} e^{-C_4 t}\, dt \to 0.$$

В третьем случае $B_N = \sqrt{N \ln N}, y_N \ln N \to 0, D_N = \ln N$ и из (20) следует, что

$$\begin{aligned} \ln \psi(t) &= \frac{t^2\zeta^2(\tau)}{2\ln N} - \frac{t^2\zeta(\tau-1)}{\ln N} + \frac{t^2\zeta(\tau)}{2\ln N} \\ &+ \frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{\ln N}\left(-\frac{it}{\sqrt{N\ln N}}\right)^{y_N} \\ &+ O\left(\frac{t^3}{\sqrt{N}\ln^{3/2}N}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

Опять, используя (13) и (36) и оценивая каждое слагаемое в (40), приходим к неравенству:

$$|\mathrm{I}_3'| \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-t^2/4}\, dt.$$

Оценка I_3'' проводится аналогично предыдущим случаям и при этом учитывается условие $|t| > \ln N$ и выбор ε. Тогда

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_5 t^2/\ln N}$$

и

$$|\mathrm{I}_3''| < 2 \int\limits_{\ln N}^{\infty} e^{-C_5 t}\, dt \to 0.$$

В четвертом случае $D_N = y_N^{-1}$, а в пятом $D_N = e^{-C_6/y_N}(-2N/y_N)^{1/\tau}$. Оценивание интеграла I_3 в этих двух случаях проводится по той же схеме, как и в случаях 2 и 1 соответственно. Доказательство теоремы 6 завершено.

Доказательство теоремы 7. Обозначим $v_N = (n - NS(N))/N^{1/\tau}$ и $\varphi^{**}(t) = \varphi(t) exp\{-itS(N)\}$. Как и при доказательстве теоремы 6, представим разность

$$R_N^* = 2\pi(N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g(v_N))$$

в виде суммы

$$R_N^* = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4,$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itv_N}\left(\left(\varphi^{**}\left(t/N^{1/\tau}\right)\right)^N - exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1 + i\frac{2t}{|t|\pi}\ln|t|\right)\right\}\right) dt,$$

$$\mathrm{I}_2 = -\int\limits_{|t|>A} exp\left\{-itv_N - \frac{\pi}{2}|t| \times \left(1 + i\frac{2t}{|t|\pi}\ln|t|\right)\right\} dt,$$

а интегралы I_3 и I_4 аналогичны одноименным интегралам в доказательстве теоремы 6.

Из леммы 2 видно, что $\mathrm{I}_1 \to 0$. Для I_2 справедлива оценка

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant 2 \int\limits_{t>A} e^{-\pi t/2}\, dt,$$

поэтому I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором A. Ясно, что I_4 оценивается так же, как и подобный интеграл в теореме 6.

Используя (20) и проводя рассуждения, подобные выводу соотношения (30), нетрудно получить, что в области интегрирования I_3

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_6|t|},$$

поэтому

$$|\mathrm{I}_3| < 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-C_6|t|}\, dt, \tag{41}$$

а последнее выражение можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Используя (32) и (33) при $B_N = \sigma\sqrt{N}$, находим, что

$$\begin{aligned} &2\pi(\sigma\sqrt{2\pi N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z_N^2/2}) \\ &\qquad = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4, \end{aligned}$$

где интегралы $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве теоремы 6. Из леммы 3 следует, что $\mathrm{I}_1 \to 0$, а I_2 можно оценить так же, как и в теореме 6.

Рассмотрим I_4. Поскольку $e^{it} - 1 = \cos t + i\sin t - 1$ из явного вида $\Phi(e^{it}, \tau, 1)$ и (16) находим, что при $\tau \to \infty$ и $\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leqslant |t| \leqslant \pi\sigma\sqrt{N}$

$$\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = \left[1 + \left(\cos\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} + i\sin\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} - 1\right) \times (1 + o(1))\right]^N,$$

поэтому для некоторого положительного $q < 1$

$$|\varphi(t/\sigma\sqrt{N})|^N < q^N.$$

Тогда

$$|\mathrm{I}_4| < \pi\sigma\sqrt{N}q^N \to 0.$$

Для оценки I_3 воспользуемся опять (16), явным видом функции Лерча и разложением e^{it} по формуле Тэйлора в окрестности нуля. Тогда получаем, что

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|^N < e^{-C_7t^2},$$

следовательно,

$$|\mathrm{I}_3| < 2\int\limits_A^\infty e^{-C_7t^2}\,dt,$$

что равносильно (41). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00009.

Литература

1. *Аннаков Б. Б.* Банковский кризис и пожары в лесу – Что общего? // [Электронный ресурс]. URL: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire. 2008 (дата обращения: 01.06.2014)

2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

3. *Лери М. М., Павлов Ю. Л.* Лесной пожар на случайном графе со сгораемыми ребрами // Учен. зап. Петрозаводского государственного университета. 2013. № 2 (131). С. 96–99.

4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Лань, 2009. 800 с.

5. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

6. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

7. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics // Cambridge University Press. 2009. doi: 10.1017/CBO9780511801655

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Eindhoven university of technology. 2011. 363 p.

9. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

10. *Norros I., Reittu H.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 4. P. 3–23.

11. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* Limit distributions of the edge number in random configuration graph // European researcher. 2013. Vol. 48, N 5–1. P. 1097–1100.

Поступила в редакцию 03.04.2015

References

1. *Annakov B. B.* Bankovskii krizis i pozhary v lesu – Chto obshchego? [Bank crisis and forest fire: What's in common?] [Elektronnyi resurs]. URL: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire. 2008 (data obrashcheniya: 01.06.2014)

2. *Beitman G., Erdeii A.* Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra [Higher transcendental functions]. Moscow: Nauka, 1965. 296 p.

3. *Leri M. M., Pavlov Yu. L.* Lesnoi pozhar na sluchainom grafe so sgoraemymi rebrami [Forest fire on random graph with inflammable edges] Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. N 2 (131). P. 96–99.

4. *Fikhtengol'ts G. M.* Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. [Differential and integral calculus] T. 2. Sankt-Peterburg: Lan', 1997. 800 p.

5. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

6. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

7. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics. Cambridge University Press. 2009. doi: 10.1017/CBO9780511801655

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Eindhoven university of technology. 2011. 363 p.

9. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

10. *Norros I., Reittu H.* On the power-law random graph model of massive data networks. Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 4. P. 3–23.

11. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* Limit distributions of the edge number in random configuration graph. European researcher. 2013. Vol. 48, N 5–1. P. 1097–1100.

Received April 03, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Феклистова Елена Валерьевна
аспирант лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: f_len@mail.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTORS:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Feklistova, Elena
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: f_len@mail.ru
tel.: (8142) 781218