Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 5–12
DOI: 10.17076/mat1434

УДК 519.179.4

О МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ УСЛОВНОГО ИНТЕРНЕТ-ГРАФА

Д. А. Беспалов[1], Ю. Л. Павлов[2]

[1] *Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский государственный университет, Россия*
[2] *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^{\tau}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\zeta(\tau)$ – значение зета-функции Римана в точке τ, $1 < \tau < 2$. Конфигурационные графы часто используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, в частности Интернета. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна n. С помощью обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам в работе доказаны теоремы о предельном распределении максимальной степени вершины, при $n, N \to \infty$ в случаях, когда $n/N \to 1$ и $(n-N)^3/N^2 \to \infty$ и когда $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; Интернет-граф; условный граф; степень вершины.

D. A. Bespalov, Yu. L. Pavlov. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE OF A CONDITIONAL INTERNET GRAPH

We consider configuration graphs with N vertices, whose degrees are independent identically distributed random variables with the distribution

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^{\tau}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

where $\zeta(\tau)$ is the value of the Riemann zeta function at the point τ, $1 < \tau < 2$. Configuration graphs are often used to model complex communication networks, such as the Internet. We study a subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and equal to n. In this paper, we prove theorems on the limit distribution of the maximum degree of a vertex using the generalized allocation scheme, when $n/N \to 1$ and $(n-N)^3/N^2 \to \infty$ and in the case when $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

Keywords: configuration random graph; Internet graph; conditional graph; vertex degree.

Введение

В реальном мире широко распространены так называемые сложные сети коммуникаций, такие как Интернет, транспортные сети или сети нейронов в нашем мозге. Несмотря на различие природы этих сетей, они удачно моделируются случайными графами [7]. Наблюдения показали [6], что в таких сетях степени узлов можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Причем число узлов, степени которых равны k, при больших k пропорционально $k^{-\tau}$, где τ – положительный параметр. В связи с этим в [10] для моделей сетей предложено считать, что случайная величина η, равная степени вершины графа, имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = h(k)k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

где $\tau > 1$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся функция.

В качестве графов, моделирующих сложные сети, часто используют конфигурационные случайные графы, введенные и описанные в работе [5]. В таких графах степень каждой вершины задается случайной величиной с распределением (1), таким образом, для каждой вершины получаем исходящие из нее полуребра. Если сумма степеней всех вершин оказывается нечетной, то в граф добавляется вспомогательная вершина единичиной степени, которая, как отмечается в [10], на асимптотические свойства графа не влияет. Затем полуребра попарно равновероятно соединяются, образуя ребра. Заметим сразу, что при таком построении возможны петли и кратные ребра. В связи с областью применения таких графов их иногда (см., например, [9]) называют Интернет-графами.

В статье [10] впервые рассматривается модель, в которой распределение степеней вершин задавалось как

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$

Впоследствии, в работе [4], впервые изучались условные конфигурационные графы, в которых распределение вершин имеет вид (2). В [4] были доказаны теоремы о предельном распределении максимальной степени вершины и числа вершин заданой степени при различном характере стремления числа вершин и числа ребер к бесконечности и различных значениях параметра τ.

В статье [3] впервые изучались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин, обладающим свойствами: $p_k > 0, k = 1, 2. \ldots$ и при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

где $d > 0, g \geqslant 1, h \geqslant 0, g + h > 1$.

В работе [2] решалась задача нахождения распределений максимальной степени вершины и числа узлов заданной степени для наиболее общего случая, а именно когда степени вершин имеют распределение (1), при условии, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

Пусть N – число вершин в графе, а $\eta_1, \ldots, \eta_N$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, равные степеням вершин $1, \ldots, N$ соответственно. В настоящей работе рассматривается модель условного конфигурационного графа при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна n, а распределение этих вершин имеет вид

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

где $\zeta(\tau)$ – значение зета-функции Римана в точке τ, $1 < \tau < 2$ – параметр модели. Наблюдения показали, что такой диапазон изменения параметра τ наиболее характерен для реальных сетей.

Заметим здесь же, что распределение (3) является частным случаем (1) с медленно меняющейся функцией, равной константе, а именно $h(x) = 1/\zeta(\tau)$. Авторам известна только одна работа [8], в которой рассматривалось распределение (3). В [8] была найдена асимптотика кластерного коэффициента такого случайного графа.

В настоящей работе для графа с распределением (3), используя методы обобщенной схемы размещения [1], удалось получить предельные распределения максимальной степени вершины $\eta_{(N)} = \max(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ в случаях, когда $n/N \to 1$ и $(n-N)^3/N^2 \to \infty$, а также для случая, когда $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1 и 2 для $\eta_{(N)}$ в соответствующих случаях поведения n/N. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–8), с помощью которых в последнем разделе статьи доказываются теоремы 1 и 2.

Основные результаты

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda^{k-1}}{\Phi(\lambda, \tau, 1)k^\tau}, \qquad (4)$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda < 1$, $\Phi(\lambda, \tau, 1)$ – трансцендентная функция Лерча, имеющая вид

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}. \qquad (5)$$

Параметр λ для распределения (4) будем выбирать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{E}\xi_1 = n/N. \qquad (6)$$

В статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to 1$, $\quad (n-N)^3/N^2 \to \infty$. Выберем наименьшие $r = r(N, n)$ такие, что*

$$\frac{N\lambda^r}{(r+1)^\tau} \to \gamma, \qquad (7)$$

где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \to e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r+1\} \to 1-e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$, а $r = r(N, n)$ выбраны так, что*

$$\frac{N\lambda^r}{r^\tau(1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} \to \gamma, \qquad (8)$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для всякого фиксированного $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r + k\} = e^{-\gamma\lambda^k} + o(1).$$

Вспомогательные утверждения

Из (3) и (4) следует, что

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\Phi(\lambda, \tau-1, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \qquad (9)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{\Phi(\lambda, \tau-2, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)} - m^2. \qquad (10)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leqslant r\}, \qquad (11)$$

и пусть $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, $\quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)}$.

Для наборов случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с распределениями (3) и (4) соответственно нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Равенство в лемме 1 означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1], для которой известно следующее утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}. \qquad (12)$$

Как видно из (6) и (9), поведение параметра λ зависит от отношения n/N.

Лемма 3. *Верны следующие утверждения.*

1. *Если выполнены условия теоремы 1, то $\lambda \to 0$, причем*

$$\lambda = \frac{2^\tau(n-N)}{N}(1 + o(1)). \qquad (13)$$

2. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

$$0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1.$$

Доказательство. В первом пункте, полагая, что λ не стремится к нулю, и используя (5), (9), получаем противоречие с (6). Докажем (13). Действительно, используя (5),(6) и (9), получим

$$\frac{2^\tau(n-N)}{N} = 2^\tau \frac{\Phi(\lambda, \tau-1, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)}$$

$$= 2^\tau \frac{2^{-\tau}\lambda + o(\lambda)}{1 + 2^{-\tau}\lambda + o(\lambda)},$$

отсюда и из того, что $\lambda \to 0$, следует требуемое.

Для второго пункта леммы, полагая противное и используя (5), (9), получаем противоречие с (6). □

Рассмотрим асимптотику $(1-P_r)^N$.

Лемма 4. *Верны следующие утверждения.*

1. *Если выполнены условия теоремы 1, то*

$$NP_{r-1} \to \infty, \; NP_r \to \gamma, \; NP_{r+1} \to 0.$$

2. *Если выполнены условия теоремы 2, то для всякого фиксированного* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(1 - P_{r+k})^N = e^{-\gamma \lambda^k} + o(1).$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 1. Из (4), (5), (12) и леммы 3 получаем

$$NP_r = Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)/p_{r+1}(\lambda)$$
$$= (1 + o(1)) \frac{N\lambda^r}{(r+1)^\tau} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \left(1 - \frac{j-1}{r+j}\right)^\tau. \tag{14}$$

Отсюда, используя (7), можем написать

$$NP_r \to \gamma.$$

В силу минимальности выбора $r = r(n, N)$ и из (14) имеем $NP_{r-1} \to \infty$ и $NP_{r+1} \to 0$. Что и требовалось в первом пункте.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (4) и (12) получаем, что

$$NP_{r+k} = Np_{r+k}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{r+k+j+1}(\lambda)}{p_{r+k}(\lambda)}$$
$$= \frac{\lambda^{r+k}}{\Phi(\lambda, \tau, 1)(r+k)^\tau}$$
$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left(1 - \frac{j+1}{r+k+j+1}\right)^\tau. \tag{15}$$

Поскольку из условия теоремы 2 следует, что $r \to \infty$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left(1 - \frac{j+1}{r+k+j+1}\right)^\tau$$
$$\sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{1}{1-\lambda}. \tag{16}$$

Из (15), пользуясь (8) и (16), получаем требуемое во втором пункте утверждение. □

В следующих леммах мы рассмотрим асимптотическое поведение случайных величин ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого фиксированного* t

$$\varphi_N(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Из (4) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = e^{it} \frac{\Phi(e^{it}\lambda, \tau, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \tag{17}$$

При достаточно малых t верно разложение

$$\ln \varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{Q(t)}{6} t^3, \tag{18}$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2 \max_{|u|<|t|} |(\ln \varphi(u))'''|. \tag{19}$$

Из (4), (9), (10) и леммы 3 имеем, что в случае выполнения условий теоремы 1 верно

$$\sigma^2 = \lambda/2^\tau + o(\lambda), \tag{20}$$

а в случае выполнения условий теоремы 2 –

$$0 < C_5 \leqslant \sigma^2 \leqslant C_6 < \infty. \tag{21}$$

Отсюда и из леммы 3, как легко видеть, следует, что

$$\sigma^3 \sqrt{N} \to \infty. \tag{22}$$

Используя (17) и (19), получаем, что для всякого фиксированного t

$$\ln \varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \tag{23}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что второе слагаемое в правой части (23) стремится к нулю. В силу условий данной леммы, (18) и (22) доказательство сводится к оценке третьей производной логарифма $\varphi(t)$.

Из (4), (17) можно получить, что

$$(\ln \varphi(t))'''$$
$$= i \left(-\frac{f_4(t)}{f_1(t)} + 3\frac{f_2(t) f_3(t)}{f_1^2(t)} - 2\left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\right)^3\right),$$

где

$$f_1(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau, 1),$$

$$f_2(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 1, 1),$$

$$f_3(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 2, 1),$$

$$f_4(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 3, 1).$$

В случае, когда выполнены условия теоремы 2, из (5) и леммы 3 имеем, что все ряды f_1–f_4 абсолютно сходятся к некоторым положительным константам и попарно не равны, откуда следует существование такой константы C, что $Q(t/(\sigma\sqrt{N})) \leqslant C$. При выполнении условий теоремы 1 имеем, что ряды f_1–f_4 абсолютно сходятся к единице, что очевидно влечет $Q(t/(\sigma\sqrt{N})) \leqslant C$. Учитывая это и используя (22), получаем

$$\frac{Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)}{\sigma^3\sqrt{N}} \to 0, \qquad (24)$$

что и доказывает лемму. □

Мы показали, что случайная величина ζ_N слабо сходится к нормальному закону. Покажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого натурального k равномерно относительно $z = \frac{k-n}{\sigma\sqrt{N}}$ во всяком фиксированном конечном отрезке*

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N = k\right\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Доказательство. Представим вероятность $\mathbf{P}\left\{\zeta_N = k\right\}$ по формуле обращения

$$\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\left\{\zeta_N = k\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-itz}\varphi_N(t)dt.$$

Для нормального закона имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi\left(\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\left\{\zeta_N = k\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right), \qquad (25)$$

представив ее в виде суммы четырех интегралов

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itz}\left(\varphi_N(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-itz}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant|t|\leqslant\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-itz}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A<|t|} e^{-itz}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

причем положительные постоянные A и ε мы далее выберем так, чтобы интегралы I_1–I_4 были сколь угодно малы.

Очевидно, что интеграл $I_1 \to 0$ по лемме 5, а интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (23) и (24) имеем, что при достаточно малом ε

$$|\varphi_N(t)| \leqslant e^{-C_7t^2}, \qquad (26)$$

где C_7 – некоторая положительная константа. Тогда получим оценку

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-C_7t^2}dt, \qquad (27)$$

что, очевидно, можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Для интеграла I_3 имеем, что при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ верно, что

$$|\varphi(t)| \leqslant e^{-C_8}, \qquad (28)$$

где C_8 – некоторая константа. Поскольку максимальный шаг распределения ξ_1 равен единице, а по лемме 3 параметр λ изменяется на компактном множестве, то

$$\max_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi}|\varphi(t)| = q < 1, \qquad (29)$$

откуда получаем, что

$$|I_3| \leqslant \sigma\sqrt{N}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant\pi} q^N dx = \sigma\sqrt{N}2\pi q^N - \sigma\sqrt{N}2\varepsilon q^N, \qquad (30)$$

что очевидно стремится к нулю при $N \to \infty$.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из (20), (23) и (24) видно, что для I_2 справедлива оценка вида (27).

Чтобы оценить интеграл I_3 при $n/N \to 1$, заметим, что из (17) и леммы 3 можно получить

$$\varphi(t) = e^{it}(1 - 2^{-\tau}(1-e^{it})\lambda + o(\lambda)). \qquad (31)$$

Используя (31), лемму 3 и условие $\varepsilon \leqslant |t/(\sigma\sqrt{N})| \leqslant \pi$, нетрудно получить, что

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-C_9\frac{n-N}{N}\right\}. \qquad (32)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

из (20) и леммы 3 заключаем, что

$$|I_3| \leqslant C_{10}\sqrt{n-N}e^{C_9(n-N)} \to 0. \qquad (33)$$

□

Рассмотрим теперь асимптотику суммы $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N^{(r)}$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 7. *Верны следующие утверждения.*

1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для всякого фиксированного t*

$$\varphi_N^{(r+s)}(t) \to e^{-t^2/2}, \qquad (34)$$

где $s = 0, \pm 1$.

2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для всякого фиксированного t*

$$\varphi_N^{(r)}(t) \to e^{-t^2/2}. \qquad (35)$$

Доказательство. Из (11), (12) и (17) получаем, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\}(1-P_r)^{-N} \times \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)e^{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}}\right)^N. \qquad (36)$$

Отсюда, из (22) и леммы 5 имеем

$$\varphi_N^{(r)}(t) = (1+o(1))e^{-t^2/2}(1-P_r)^{-N} \times \left(1 - (1+o(1))\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)e^{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}}\right)^N. \qquad (37)$$

Заметим, что

$$r/(\sigma\sqrt{N}) \to 0, \qquad (38)$$

ибо в противном случае в условиях теоремы 1, используя (20), (22), а также леммы 3 и 4, пришли бы к противоречию с $NP_{r-1} \to \infty$. В случае выполнения условий теоремы 2, используя (21) и лемму 3, придем к противоречию с (8). Отсюда сразу следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)\exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + O\left((\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)\right). \qquad (39)$$

Из (37) и (39) ясно, что для доказательства (34) при $s = 0$ и (35) достаточно показать, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = o(N^{-1}). \qquad (40)$$

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = O(rp_{r+1}(\lambda)). \qquad (41)$$

Действительно, используя (4), рассмотрим отношение

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)}{rp_{r+1}(\lambda)} = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}\left(1-\frac{j-1}{r+j}\right)^{\tau} + r^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} j\lambda^{j-1}\left(1-\frac{j-1}{r+j}\right)^{\tau}.$$

Поскольку $(1-(j-1)/(r+j))^{\tau} < 1$, то

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)}{rp_{r+1}(\lambda)} \leqslant \frac{1}{1-\lambda} + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)',$$

откуда сразу видно, что рассматриваемое отношение ограничено, что и дает нам (41).

В случае выполнения условий теоремы 2 из (4), (8) и леммы 3 имеем, что для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$NP_r = Np_{r+k}(\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{r+j}(\lambda)}{p_{r+k}(\lambda)} = \frac{Np_{r+k}(\lambda)}{\lambda^{k-1}}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}\left(1-\frac{j-k}{r+j}\right)^{\tau}. \qquad (42)$$

Из (8) вытекает, что $r \to \infty$, и из второго утверждения леммы 4 следует, что $NP_r \to \gamma > 0$. Тогда, используя (42), получаем, что

$$p_{r+k}(\lambda) = O(N^{-1}). \qquad (43)$$

Подставляя (41) и (43) в левую часть (40), получаем верное равенство, что и требовалось.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. Подставим (41) в левую часть (40) и, используя леммы 3, 4, (4), (20) и соотношение $\Phi(\lambda, \tau, 1) \to 1$, напишем

$$O\left(\frac{rp_{r+1}(\lambda)}{\sigma\sqrt{N}}\right) = O\left(\frac{N\lambda^r r}{(r+1)^\tau \sigma\sqrt{N^3}}\right) = O\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{N}}\frac{1}{N}\right).$$

В силу (38) имеем, что (40) действительно выполнено.

При $s = 1$ соотношение (34) следует из (37), поскольку по лемме 4 имеем $NP_{r+1} \to 0$. Пусть $s = -1$. Нетрудно видеть, что при замене r на $r-1$ (41) сохраняет силу. Используя (4) и (20), получаем

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = O\left(\frac{r}{\lambda\sigma\sqrt{N}}\frac{1}{N}\right).$$

Заметим, что $r/(\lambda\sigma\sqrt{N}) \to 0$, действительно, полагая противное, получаем противоречие с $NP_{r-1} \to \infty$. □

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого натурального k равномерно относительно $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ во всяком фиксированном конечном отрезке*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}.$$

Если выполнены условия теоремы 1, то в этом утверждении r можно заменить на $r-1$ или $r+1$.

Доказательство. Лемма 8 доказывается в целом аналогично лемме 6. Заменим в соответствующих выражениях ζ_N на $\zeta_N^{(r)}$ и $\varphi_N(t)$ на $\varphi_N^{(r)}$ и докажем, что разность (25) стремится к нулю. Из леммы 7 следует, что $I_1 \to 0$, а I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Из (36), (37) и из того, что $NP_r \to \gamma$, следует, что существует константа C такая, что

$$|\varphi_N^{(r)}(t)| \leqslant C|\varphi_N(t)|, \tag{44}$$

откуда сразу следует, что верны оценки вида (26), (27).

В случае, когда выполнены условия теоремы 2, для интеграла I_3 в силу (44) имеют место оценки (28), (29) и (30). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, поскольку верна оценка (44), сохраняют силу выражения (32) и (33). Нетрудно видеть, что выражения (37) и (40) позволяют сохранить рассуждения при замене r на $r-1$ или $r+1$. □

Доказательства теорем

Используя леммы 6 и 8, получаем, что в условиях теорем 1 и 2

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \to 1. \tag{45}$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда из (45), лемм 2 и 4 следует

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r-1\} \to 0,$$
$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} \to e^{-\gamma},$$
$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r+1\} \to 1,$$

что и приводит к утверждениям теоремы. Теорема 2 следует из лемм 2, 4 и соотношения (45). □

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 256 с.

2. *Павлов Ю. Л.* Об асимптотике степенной структуры условных Интернет-графов // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 77–83. doi: 10.17076/mat1202

3. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

4. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

5. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. x+212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks // SIAM Review. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

9. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs // GLOBECOM'02. IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 11.04.2021

References

1. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 252 p.

2. *Pavlov Yu. L.* Ob asimptotike stepennoi struktury uslovnykh Internet-grafov [On the asymptotics of the power structure of conditional Internet graphs]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 77–83. doi: 10.17076/mat1202

3. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB MATH.* 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832

4. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random Internet-type graphs and the generalized allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

5. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. x+212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks. *SIAM Review.* 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

9. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs. *GLOBECOM'02. IEEE.* 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received April 11, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Беспалов Даниил Андреевич
студент
Институт математики и информационных технологий,
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: bespalov@cs.petrsu.ru

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTORS:

Bespalov, Daniil
Institute of Mathematics and Information Technology,
Petrozavodsk State University
33 Lenina Ave., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: bespalov@cs.petrsu.ru

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218