Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 20–25
DOI: 10.17076/mat1412

УДК 519.21, 515.12

О МЕТРИЗАЦИИ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

В идемпотентной математике аналогом вероятностной меры на компакте X является нормированный функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, линейный относительно идемпотентных арифметических операций. Для обычных вероятностных мер давно построена содержательная теория квантования, имеющая широкие приложения (квантованием меры называется ее приближение мерами с конечными носителями). Естественно встает вопрос о построении аналогичной теории для идемпотентных вероятностных мер. Квантование предполагает наличие метрики на пространстве $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер, совместимой с топологией и задающей метризацию функтора I идемпотентных мер в смысле В. В. Федорчука. Вариант метрики на пространстве $I(X)$ был определен в совместной работе Л. Базилевич, Д. Реповша и М. Заричного при доказательстве гомеоморфности этого пространства гильбертову кубу для любого бесконечного метрического компакта X. Однако метрика Базилевич и др. имеет слишком сложную структуру, что затрудняет ее использование для оценки приближений. В работе предложен модифицированный вариант метризации функтора I, более удобный для построения теории квантования идемпотентных вероятностных мер.

Ключевые слова: идемпотентная вероятностная мера; квантование мер; метризуемый функтор.

A. V. Ivanov. ON METRIZATION OF THE FUNCTOR OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES

In idempotent mathematics, an analogue of a probability measure on a compactum X is a normed functional $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, linear with respect to idempotent arithmetic operations. For ordinary probability measures, a meaningful theory of quantization has long been available, which has a wide range of applications (quantization of a measure is called its approximation by measures with finite supports). The question naturally arises of constructing a similar theory for idempotent probability measures. Quantization presupposes the presence of a metric on the space $I(X)$ of idempotent probability measures, compatible with the topology and defining a metrization of the functor I of idempotent measures sensu V. V. Fedorchuk. A version of the metric on the space $I(X)$ was defined in a joint paper by L. Bazilevich, D. Repovs, and M. Zarichnyi when proving that this space is homeomorphic to the Hilbert cube for any infinite metric compactum X. However, the structure of the metric of Bazilevich et al. is too complicated for it to be used for estimating approximations. In this paper, we propose a modified version of the metrization of the functor I, which is more convenient for constructing a theory of quantization of idempotent probability measures.

Keywords: idempotent probability measure; quantization of measures; metrizable functor.

В идемпотентной математике аналогом вероятностной меры на компакте X является нормированный функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, линейный относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество таких функционалов $I(X)$, наделенное слабой* топологией, называется пространством идемпотентных вероятностных мер компакта X. Топологические свойства пространства $I(X)$ исследованы в работе М. Заричного [1], где показано, в частности, что $I(X)$ является компактом для любого компакта X. Конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений $Comp$, который является нормальным в смысле Е. В. Щепина [5]. Таким образом, свойства функтора I аналогичны свойствам функтора P классических вероятностных мер.

Для обычных вероятностных мер построена содержательная теория квантования, имеющая широкие приложения [8] (квантованием меры называется ее приближение мерами с конечными носителями). Естественно встает вопрос о построении аналогичной теории для идемпотентных вероятностных мер, к которому можно подходить с общих функториальных позиций (см. [2]). Для решения задачи квантования необходимо выбрать удобную метрику на $I(X)$, совместимую с топологией и задающую метризацию функтора I в смысле В. В. Федорчука [3]. Например, для функтора экспоненты exp такой метрикой является метрика Хаусдорфа ($\exp X$ – пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X с топологией Вьеториса), для функтора P – метрика Канторовича – Рубинштейна.

В работе Л. Базилевич с соавт. [7] для каждого метрического компакта (X, ρ) была определена метрика на $I(X)$, которая фактически задает метризацию функтора I по Федорчуку. Однако квантование идемпотентных вероятностных мер с использованием этой метрики сталкивается с техническими трудностями, которые вызваны сложной структурой ее определения (в первую очередь это касается оценок расстояния сверху).

В настоящей работе предложена модификация метрики, определенной в [7], облегчающая построение теории квантования идемпотентных мер и при этом удовлетворяющая естественные требования, которые можно предъявить к метризации функтора I. В частности, ограничение этой метрики на подпространство $\exp X \subset I(X)$ совпадает с метрикой Хаусдорфа.

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта) X через $C(X)$, как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на X; c_X – постоянная функция на X со значением $c \in \mathbb{R}$.

Определение 1. [1] Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется идемпотентной вероятностной мерой, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$

1) $\mu(c_X) = c$;
2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;
3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

Множество идемпотентных вероятностных мер обозначается через $I(X)$. Любой функционал $\mu \in I(X)$ *сохраняет порядок*. Это означает, что если функции $f, g \in C(X)$ связаны поточечным неравенством $f(x) \leqslant g(x)$ для любого $x \in X$, то $\mu(f) \leqslant \mu(g)$. Из указанного свойства следует, что для любой меры $\mu \in I(X)$ и $f \in C(X)$ выполняются неравенства

$$\min f \leqslant \mu(f) \leqslant \max f. \tag{1}$$

Через $\mathbb{R}_{\max}$ в идемпотентной математике обозначается полупрямая, компактифицированная точкой $-\infty$: $\mathbb{R}_{\max} = [-\infty, 0]$. Для каждой идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \to \mathbb{R}_{\max}$ по формуле $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leqslant 0_X,\ f(x) = 0\}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. Последнее означает, что для любой точки $x \in X$ и любого числа $r \in \mathbb{R}$ такого, что $d_\mu(x) < r$, существует окрестность U точки x такая, что $d_\mu(x') < r$ для любого $x' \in U$. При этом функция плотности определяет исходную меру μ:

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

где $f \in C(X)$. (Формула (2) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X). И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \to \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (2) определяет идемпотентную вероятностную меру μ_g:

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [6]).

Множество $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ с тихоновской топологией.

Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. В [1] показано, что для любого компакта X пространство $I(X)$ является компактом.

Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \to Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \to I(Y)$, действующее по формуле: $I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$, где $f \in C(Y)$. Конструкция I определяет ковариантный функтор в категории $Comp$ компактов и непрерывных отображений (см. [1]).

Определение 2. [4] Функтор $\mathcal{F}$ в категории $Comp$ называется полунормальным, если $\mathcal{F}$:

1) сохраняет точку и пустое множество;
2) сохраняет мономорфизмы;
3) сохраняет пересечения;
4) непрерывен, то есть перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

В дальнейшем через $\mathcal{F}$ обозначается полунормальный функтор, и при этом мы считаем дополнительно, что $\mathcal{F}$ сохраняет вес всякого бесконечного компакта. Если A – замкнутое подмножество компакта X, то в силу условия 2) $\mathcal{F}(A)$ естественно вкладывается в $\mathcal{F}(X)$. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$. Для каждой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определен ее носитель $supp(\xi)$ как наименьшее замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |supp(\xi)| \leqslant n\}$$

является замкнутым подмножеством $\mathcal{F}(X)$. При этом $\mathcal{F}_1(X)$ естественно гомеоморфно X (каждая точка $x \in$ X отождествляется с единственной точкой пространства $\mathcal{F}(\{x\})$).Таким образом, $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$.

В работе [1] доказано, что функтор I идемпотентных вероятностных мер удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Нетрудно показать, что $supp(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}$ для любой меры $\mu \in I(X)$.

Определение 3. [3] Функтор $\mathcal{F}$ называется метризуемым, если для любого метрического компакта (X, ρ) может быть указана совместимая с топологией метрика $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ так, что выполнены следующие условия:

1) для любого изометрического вложения $i : (X_1, \rho_1) \to (X_2, \rho_2)$ отображение $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$ также является изометрическим вложением;
2) $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$;
3) $diam(\mathcal{F}(X)) = diam(X)$.

При этом семейство метрик $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$ по определению задает метризацию функтора $\mathcal{F}$.

В работе [7] для каждого метрического компакта (X, ρ) определена метрика на пространстве $I(X)$ следующим образом. Для $n \in \mathbb{N}$ и любых двух мер $\mu, \nu \in I(X)$

$$\rho_n(\mu, \nu) = \frac{1}{n} \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_n(X)\}, \tag{3}$$

где $Lip_n(X)$ – множество вещественных функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой n.

Функции ρ_n являются непрерывными псевдометриками[1] (см. [7], теорема 4.1). При этом семейство $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ разделяет точки $I(X)$, и функция

$$\rho'_I(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(\mu, \nu)}{2^n}$$

является совместимой метрикой на $I(X)$.

Определение 4. Для мер $\mu, \nu \in I(X)$ положим

$$\rho_I(\mu, \nu)$$

$$= \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{n2^n} : f \in Lip_1(X)\}. \tag{4}$$

Заметим, что в силу (1) для функции $f \in Lip_1(X)$

$$|\mu(nf) - \nu(nf)| \leqslant \max(nf) - \min(nf)$$

$$\leqslant n \cdot diam(X).$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf)-\nu(nf)|}{n2^n}$ сходится и

$$\rho_I(\mu, \nu) \leqslant diam(X). \tag{5}$$

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для открытого (замкнутого) ε-шара точки x используются следующие обозначения: $O(x, \varepsilon, \rho) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ $(B(x, \varepsilon, \rho) = \{y : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\})$. Если из контекста ясно, о какой метрике идет речь, допускается сокращенная запись: $O(x, \varepsilon)$ $(B(x, \varepsilon))$. Аналогично обозначаются открытый и замкнутый ε-шары подмножества $A \subset X$.

Теорема. *Для любого метрического компакта (X, ρ) функция ρ_I является совместимой с топологией метрикой на $I(X)$, которая задает метризацию функтора I.*

[1]Из условия $\rho_n(\mu, \nu) = 0$ не следует, вообще говоря, равенство $\mu = \nu$.

Доказательство. Очевидно, что ρ_I симметрична и $\rho_I(\mu,\mu)=0$ для $\mu\in I(X)$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство

$$n\cdot Lip_1(X)=\{nf : f\in Lip_1(X)\}=Lip_n(X).$$

Следовательно, согласно формуле (3)

$$\rho_n(\mu,\nu)=\frac{1}{n}\sup\{|\mu(nf)-\nu(nf)| : f\in Lip_1(X)\}. \tag{6}$$

Таким образом, для любых $\mu,\nu\in I(X)$ и любого $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^n}\rho_n(\mu,\nu)\leqslant\rho_I(\mu,\nu). \tag{7}$$

Поскольку семейство $\{\rho_n : n\in\mathbb{N}\}$ разделяет точки $I(X)$, в силу (7) $\rho_I(\mu,\nu)>0$ при $\mu\neq\nu$.

Покажем, что для ρ_I выполняется неравенство треугольника. Пусть $\mu,\nu,\xi\in I(X)$. Тогда

$$\rho_I(\mu,\nu)$$

$$=\sup\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(nf)-\nu(nf)|}{2^n n} : f\in Lip_1(X)\}$$

$$\leqslant\sup\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(nf)-\xi(nf)|}{2^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\xi(nf)-\nu(nf)|}{2^n n}$$

$$: f\in Lip_1(X)\}\leqslant\rho_I(\mu,\xi)+\rho_I(\nu,\xi).$$

Итак, ρ_I – метрика на $I(X)$. Проверим совместимость ρ_I с топологией $I(X)$. Для любых $\mu,\nu\in I(X)$ выполняется неравенство

$$\rho_I(\mu,\nu)\leqslant\rho'_I(\mu,\nu). \tag{8}$$

В самом деле,

$$\rho_I(\mu,\nu)$$

$$=\sup\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(nf)-\nu(nf)|}{2^n n} : f\in Lip_1(X)\}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sup\{\frac{|\mu(nf)-\nu(nf)|}{2^n n} : f\in Lip_1(X)\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(\mu,\nu)}{2^n}=\rho'_I(\mu,\nu).$$

В силу (8) для любого $\varepsilon>0$ и $\mu\in I(X)$ имеет место включение $O(\mu,\varepsilon,\rho'_I)\subset O(\mu,\varepsilon,\rho_I)$. Метрика ρ'_I совместима с топологией $I(X)$ (см. [7]). Следовательно, любая ε-окрестность $O(\mu,\varepsilon,\rho_I)$ содержит некоторую топологическую окрестность точки μ.

Пусть теперь U – топологическая окрестность μ в $I(X)$. Для каждой точки $\nu\in I(X)\setminus U$ выберем псевдометрику ρ_n, которая разделяет μ и ν. Пусть

$$\frac{\rho_n(\mu,\nu)}{2^n}=a_\nu>0.$$

В силу непрерывности ρ_n найдется окрестность $O\nu$ меры ν такая, что для любого $\xi\in O\nu$

$$\frac{\rho_n(\mu,\xi)}{2^n}\geqslant\frac{a_\nu}{2}.$$

И тогда в силу (7)

$$\rho_I(\mu,\xi)\geqslant\frac{a_\nu}{2}$$

для любого $\xi\in O\nu$. Из покрытия $\{O\nu : \nu\in I(X)\setminus U\}$ множества $I(X)\setminus U$ выделим конечное подпокрытие $\{O\nu_1,\ldots,O\nu_k\}$. Пусть

$$\varepsilon=\min\{\frac{a_{\nu_i}}{2} : i=1,\ldots,k\}.$$

По построению $\rho_I(\mu,\xi)\geqslant\varepsilon$ для любой точки $\xi\in I(X)\setminus U$. Следовательно, $O(\mu,\varepsilon,\rho_I)\subset U$, что и требовалось.

Покажем теперь, что метрика ρ_I задает метризацию функтора I. Для проверки условия 1) определения 3 достаточно убедиться в том, что для любого замкнутого подмножества F метрического компакта (X,ρ) и любых мер $\mu,\nu\in I(F)\subset I(X)$, выполняется равенство

$$(\rho|_F)_I(\mu,\nu)=\rho_I(\mu,\nu). \tag{9}$$

Как известно, любая функция $f\in Lip_1(F)$ допускает продолжение $\overline{f}\in Lip_1(X)$ на метрический компакт X. Продолжение $\overline{f}$ может быть определено, например, по формуле:

$$\overline{f}(x)=\sup\{f(u)-\rho(x,u) : u\in F\}.$$

Из существования $\overline{f}$ следует равенство (9).

Каноническое вложение $X\subset I(X)$ определяется отождествлением точек $x\in X$ с мерами Дирака $\delta_x\in I(X)$. Пусть $a,b\in X$. Для любой функции $f\in Lip_1(X)$

$$|f(a)-f(b)|\leqslant\rho(a,b). \tag{10}$$

Следовательно, $\rho_I(\delta_a,\delta_b)\leqslant\rho(a,b)$. В то же время для функции $f(x)=\rho(a,x)\in Lip_1(X)$ неравенство (10) превращается в равенство. Таким образом, $\rho_I(\delta_a,\delta_b)=\rho(a,b)$ – условие 2) определения метризуемого функтора выполнено.

Условие 3) является прямым следствием неравенства (5) и условия 2). □

Как обычно, через $\exp X$ мы будем обозначать пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X с топологией Вьеториса. В [1] показано, что $\exp X$ естественно вкладывается в пространство $I(X)$ (более того, функтор exp является подфунктором функтора I). При этом вложении замкнутое подмножество $F \in \exp X$ отождествляется с мерой $\mu_F \in I(X)$, которая определяется по формуле

$$\mu_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где $f \in C(X)$. Для метрического компакта (X, ρ) топологию Вьеториса на $\exp X$ порождает классическая метрика Хаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(F, G) = \min\{\varepsilon : G \subset B(F, \varepsilon),\ F \subset B(G, \varepsilon)\},$$

$F, G \in \exp X$.

Следующее предложение показывает, что ограничение метрики ρ_I на $\exp X$ совпадает с метрикой Хаусдорфа.

Предложение. Для любых $F, G \in \exp X$

$$\rho_I(\mu_F, \mu_G) = \rho_H(F, G).$$

Доказательство. Пусть $F, G \in \exp X$. $\rho_H(F, G) = a$ и $f \in Lip_1(X)$. Предположим для определенности, что $\mu_F(f) \geqslant \mu_G(f)$ и $\mu_F(f) = f(p)$, где $p \in F$. Для точки p найдется точка $q \in G$ такая, что $\rho(p, q) \leqslant a$. Тогда $f(p) - f(q) \leqslant a$, откуда следует, что $\mu_F(f) - \mu_G(f) \leqslant a$. Аналогичные выкладки можно провести для функции nf, где $n \in \mathbb{N}$, и мы получим, что

$$\mu_F(nf) - \mu_G(nf) \leqslant na. \qquad (11)$$

Из формулы (11) следует неравенство $\rho_I(\mu_F, \mu_G) \leqslant a$.

Поскольку $\rho_H(F, G) = a$, в одном из множеств (F или G) существует точка, удаленная от другого множества на расстояние a. Пусть $s \in G$ и $\rho(s, F) = a$. Рассмотрим функцию $g(x) = \rho(x, F) \in Lip_1(X)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_G(ng) \geqslant ng(s) = na$ и $\mu_F(ng) = 0$. Следовательно, $|\mu_F(ng) - \mu_G(ng)| \geqslant na$. Значит, $\rho_I(\mu_F, \mu_G) \geqslant a$. □

В силу определения идемпотентных вероятностных мер (свойство 2)) в формулах (4) и (6) можно рассматривать только функции $f \in Lip_1(X)$, которые принимают нулевое значение в некоторой фиксированной точке $x_0 \in X$. Множество таких функций будем обозначать через $Lip_1(X, x_0)$.

Пример. Метрика ρ_I не совпадает с метрикой ρ'_I.

На множестве $X = \{a, b, c\}$ зададим метрику ρ следующим образом: $\rho(a, b) = 1$, $\rho(a, c) = \rho(b, c) = 3$. Меры $\mu, \nu \in I(X)$ определим с помощью функций плотности: $d_\mu(a) = 0$, $d_\mu(b) = -\infty$, $d_\mu(c) = -3$; $d_\nu(a) = -\infty$, $d_\nu(b) = 0$, $d_\nu(c) = -1$. Покажем, что $\rho_I(\mu, \nu) < \rho'_I(\mu, \nu)$.

Пусть $f \in Lip_1(X, a)$. Нетрудно показать, что $\mu(f) = 0$ и $-1 \leqslant \nu(f) \leqslant 2$. Откуда следует, что

$$\rho_1(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_1(X, a)\} = 2, \qquad (12)$$

причем супремум достигается на функции $f \in Lip_1(X, a)$, принимающей значение $f(c) = 3$. При этом

$$\sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_1(X, a), f(c) \leqslant 2\} = 1. \qquad (13)$$

Найдем теперь величину

$$A(n) = \sup\{|\mu(nf) - \nu(nf)| : f \in Lip_1(X, a), f(c) > 2\} \qquad (14)$$

при $n > 1$. Если $f(c) > 2$, то $\mu(f) = nf(c) - 3$, $\nu(f) = nf(c) - 1$ и $|\mu(f) - \nu(f)| = 2$. Следовательно, $A(n) = 2$.

При этом для функции $g \in Lip_1(X, a)$, принимающей значения $g(b) = g(c) = -1$,

$$|\mu(ng) - \nu(ng)| = n.$$

Таким образом, при $n > 2$

$$A(n) < \sup\{|\mu(nf) - \nu(nf)| : f \in Lip_1(X, a), f(c) \leqslant 2\}. \qquad (15)$$

Из формул (12)–(15) следует, что

$$\rho_I(\mu, \nu) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^n n} : f \in Lip_1(X, a)\} < \sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^n n} : f \in Lip_1(X, a)\} = \rho'_I(\mu, \nu).$$

□

Литература

1. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер // Известия РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 45–64. doi: 10.4213/im2785

2. *Иванов А. В.* О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

3. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 396–417.

4. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. № 31. С. 3–62.

6. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.

7. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology and its Applications. 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

8. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

Поступила в редакцию 19.03.2021

References

1. *Zarichnyi M. M.* Prostranstva i otobrazheniya idempotentnykh mer [Spaces and maps of idempotent measures]. *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Izvestiya: Mathematics]. 2010. Vol. 74, iss. 3. P. 45–64. doi: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002495

2. *Ivanov A. V.* O funktore veroyatnostnykh mer i razmernostyakh kvantovaniya. *Vestnik TGU. Matematika i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Mathematics and Mechanics]. 2020. No. 63. P. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

3. *Fedorchuk V. V.* Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.* 1991. Vol. 36, no. 2. P. 411–433.

4. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii [General Topology. Basic design]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

5. *Shchepin E. V.* Functors and uncountable powers of compacta. *Russ. Math. Surveys.* 1981. Vol. 36, no. 3. P. 1–71.

6. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.

7. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topology and its Applications.* 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

8. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

Received March 19, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441