Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 8–14
DOI: 10.17076/mat139

УДК 517.51

ТОЧКИ ВТЯГИВАНИЯ В КОНУС И ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ ВОРОНОВСКОЙ

Ю. Г. Абакумов[1], В. Г. Банин[2]

[1] *Забайкальский государственный университет,*
[2] *Финансовый университет при правительстве РФ*

Рассмотрен общий подход к теоремам типа теоремы Вороновской о скорости сходимости последовательности линейных операторов к функциям из некоторых классов с помощью введенного функционала, который во многих конкретных ситуациях имеет дифференциальный вид. Для представления этого функционала применен метод точек втягивания в конус банахова пространства.

Ключевые слова: линейные операторы; конус; аппроксимирующая последовательность.

Yu. G. Abakumov, V. G. Banin. POINTS OF RETRACTION INTO CONE AND VORONOVSKAYA TYPE THEOREMS

The general approach to Voronovskaya theorems about the rate of convergence of linear operators sequence to the functions of some classes is considered. These theorems are proved with the help of a functional which in many concrete situations may have a differential structure. The method of retraction points into some cone of Banach space is used to define this functional.

Key words: linear operators; cone; approximation sequence.

Введение

Раздел теории приближений, посвященный равномерному приближению функций алгебраическими полиномами, был заложен теоремой К. Вейерштрасса, согласно которой любую непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию можно приблизить на этом отрезке алгебраическими полиномами с любой точностью (как мы сейчас говорим, в метрике $C[a, b]$). Результат имел важное теоретическое значение, однако предложенный Вейерштрассом способ нахождения приближающего полинома для практических целей был не пригоден. Вскоре появилось несколько новых доказательств теоремы Вейерштрасса. Различные авторы (Э. Ландау, С. Н. Бернштейн, Л. Фейер и др.) предлагали свои аппроксимирующие последовательности (у Фейера это были тригонометрические операторы). Однако для практической аппроксимации эти операторы также не годились ввиду низкой скорости приближения. Начиная, видимо, с работ Д. Джексона (см. [9]) возникают новые задачи: получение аппроксимационных оценок. Эти задачи прочно вошли в практику теории приближений. Аппроксимационные оценки получены как для конкретных операторов, так и для классов операторов. Для практики они дают ориентиры о возможностях известных (а также и неизвестных еще) аппроксимирующих конструкций. Теорема Вороновской [5] (конкретная информация в п. 1 предлагаемой статьи) занимает особое место. Этот результат, полученный в 1932 г., содержит элементы двух направлений, которые определились в теории приближений значительно позже. Это точные константы [7] и явление насыщения [3].

В 60-е годы прошлого века ряд задач теории приближения стали изучать, используя аппарат банаховых и некоторых абстрактных пространств более общего вида. Для нас, с точки зрения исследований аппроксимирующих последовательностей операторов, представляет интерес работа Климова и др. [6]. Первоначально мы использовали введенное в этой работе понятие точки гладкости конуса, однако впоследствии пришли к выводу, что более целесообразно ввести новое понятие точки втягивания (см. п. 2 статьи).

1. Источник постановки задачи

В 1912 г. С. Н. Бернштейн ввел операторы

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

f определенная на [0, 1] функция, $x\in[0,1]$.

Обстоятельства открытия этих операторов описаны в статье В. С. Виденского [4]. Последовательность $B_n(f,x)$ является аппроксимирующей, то есть для любой $f\in C[0,1]$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-B_n(f,x)\|=0. \qquad (1)$$

Операторы $B_n(f,x)$ положительные. Это значит, что из $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[0,1]$ следует $B_n(f,x)\geqslant 0$. Непосредственным вычислением устанавливается:

$$B_n(1,x)=1,$$

$$B_n(t,x)=x,$$

$$B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{n},$$

$$B_n((t-x)^3,x)=\frac{x(1-x)}{n^2}(1-2x),$$

$$B_n((t-x)^4,x)=\frac{x(1-x)}{n^2}(\frac{1}{n}(1-6x(1-x))+3x(1-x)).$$

Здесь и в приведенных ниже примерах для линейных операторов L, отображающих пространство $C[a,b]$ в себя, используем классические обозначения Коровкина [8]. $L(f)$ обозначим $L(f(t),x)$ или $L(f,x)$, где буква x выделена для обозначения образа функции $f(t)$ при отображении L, так как этот образ является функцией из $C[a,b]$. При фиксированных x получаем функционалы.

Для достаточно гладких функций $f(t)$ предельное равенство (1) допускает уточнения. Например, если f дважды дифференцируема и $\|f''(t)\|=M$ (чебышевская норма пространства $C[0,1]$), то для любого $x\in[0,1]$ выполняется

$$|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant\frac{M}{2}B_n((t-x)^2,x).$$

Уточнение к этому результату составляет теорему Вороновской: если f дважды дифференцируема , то для любого $x\in[0,1]$

$$B_n(f,x)-f(x)=\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}+o(\frac{1}{n}). \qquad (2)$$

Это равенство обеспечивается благодаря тому, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n((t-x)^4,x)}{B_n((t-x)^2,x)}=0.$$

Схема получения равенств типа (2) допускает рассмотрение в довольно общей ситуации. Рассмотрению условий сходимости последовательностей функционалов в терминах линейных нормированных пространств (ЛНП) посвящен ряд работ: [1], [2], [6] и некоторые другие. Дальнейшее изложение содержит обзор некоторых результатов, полученных авторами (см. [1], [2]).

2. Основные понятия

Полагаем, что читателю известны понятия ЛНП и линейного непрерывного функционала, заданного на элементах ЛНП.

Если X некоторое ЛНП, то множество $K\subset X$ называется конусом, если оно выпуклое и замкнутое и, кроме того, из $p\in K,\lambda\geqslant 0$ следует $\lambda p\in K$. Множество линейных, непрерывных неотрицательных на K функционалов обозначается K^* и называется конусом, сопряженным K.

Считаем, что зафиксировано действительное ЛНП X и конус $K\subset X$, а также линейный непрерывный функционал $\mu\in K^*$ (то есть $p\in K\Rightarrow\mu(p)\geqslant 0$). Предполагаем, что имеется элемент $g\in K$ такой, что $g\neq 0$, $\mu(g)=0$ (в этом случае говорят, что μ проходит через g).

Пусть, далее, зафиксированы $p_0,p_1\in X$ такие, что $p_0\in K\bigcap Ker\mu$ $(p_0\neq 0)$, $\mu(p_1)>0$ ($Ker\mu$ множество нулей функционала μ).

Обозначим $\gamma(p_0,p_1)$ – множество, принадлежащее $Ker\mu$, при этом $p\in\gamma(p_0,p_1)$, тогда и только тогда, когда найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что для всякого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ можно найти число $c>0$ (зависящее от p и ε) такое, что

$$\begin{array}{c} cp_0+\varepsilon p_1-p\in K,\\ -cp_0-\varepsilon p_1-p\in -K. \end{array} \qquad (3)$$

Далее положим

$$T(p_0, p_1) = lin(\gamma(p_0, p_1) \bigcup \{p_1\}).$$

Здесь $linQ$ – линейная оболочка множества Q.

По отношению к любому подпространству $Y \subset T(p_0, p_1)$ будем говорить, что p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

С помощью понятия точек втягивания в конус и некоторых функционалов, проходящих через них, можно доказать теоремы о скорости сходимости последовательности линейных операторов типа теоремы Вороновской [5].

Докажем две вспомогательные теоремы.

Теорема 1. *Пусть K конус в действительном ЛНП X, $\mu \in K^*$ – линейный непрерывный функционал. Если для последовательности линейных непрерывных функционалов $\mu_n \in K^*$ выполнены условия:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(p_0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n(p_1) = \mu(p_1) \quad , \qquad (4)$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(p) = \mu(p) \qquad (5)$$

для всех $p \in T(p_0, p_1)$, где p_0 – точка μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

Доказательство. Пусть $p \in T(p_0, p_1)$.
Тогда $\tilde{p} = p - p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1} \in \gamma(p_0, p_1)$.
Действительно,

$$\mu(\tilde{p}) = \mu(p) - \mu(p)\mu(p_1)(\mu(p_1))^{-1} = 0$$

и p является линейной комбинацией $\tilde{p}$ и p_1. Следовательно, по любому достаточно малому $\varepsilon > 0$ найдется $c > 0$ такое, что

$$cp_0 + \varepsilon p_1 + p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1} - p \in K,$$

$$-cp_0 - \varepsilon p_1 + p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1} - p \in -K.$$

Тогда в силу того что $\mu_n \in K^*$ (μ_n неотрицательны на K) и следующих отсюда неравенств

$$\mu_n(-cp_0 - \varepsilon p_1 + p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1} - p) \leqslant 0,$$

$$\mu_n(cp_0 + \varepsilon p_1 + p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1} - p) \geqslant 0$$

из линейности μ_n получим

$$-c\mu_n(p_0) - \varepsilon\mu_n(p_1) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_n(p) - \mu_n(p_1)(\mu(p_1))^{-1}\mu(p) \leqslant$$

$$\leqslant c\mu_n(p_0) + \varepsilon\mu_n(p_1).$$

Отсюда, учитывая (4), получим

$$-\varepsilon\mu(p_1) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (\mu_n(p) - \mu(p)) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (\mu_n(p) - \mu(p)) \leqslant \varepsilon\mu(p_1).$$

Так как ε может быть как угодно мало, получаем (5).
Теорема 1 доказана. □

Следующая теорема будет в дальнейшем весьма полезна.

Теорема 2. *Пусть линейный непрерывный функционал μ, подпространство Y, конус K, элементы $p_0, p_1 \in Y$ связаны соотношениями: $\mu(p_0) = 0$, $\mu(p_1) > 0$, $\mu \in K^*$, $Y = lin(Y_\mu \bigcup \{p_1\})$, где $Y_\mu = Y \bigcap Ker\mu$, $p_0 \in K$.*
Пусть, далее, для любого $z \in Y$ такого, что $\mu(z) > 0$, найдется $\lambda \in (0,1)$ такое, что $\lambda z + (1-\lambda)p_0 \in K$.
Тогда p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

Доказательство. Пусть $p \neq 0$ – произвольный элемент $p \in Y_\mu$. Это значит, что $\mu(p) = 0$. Возьмем произвольно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Так как $\mu(\varepsilon p_1 - p) = \varepsilon\mu(p_1) > 0$, то найдется $\lambda \in (0,1)$ такое, что $\lambda(\varepsilon p_1 - p) + (1-\lambda)p_0 \in K$. Тогда $\varepsilon p_1 - p + \lambda^{-1}(1-\lambda)p_0 \in K$. Обозначив $c_1 = (1-\lambda)\lambda^{-1}$, имеем

$$c_1 p_0 + \varepsilon p_1 - p \in K. \qquad (6)$$

Далее, $\mu(p + \varepsilon p_1) = \varepsilon\mu(p_1) > 0$. Следовательно, найдется $\sigma \in (0,1)$ такое, что

$$\sigma(p + \varepsilon p_1) + (1-\sigma)p_0 \in K.$$

И если обозначить $c_2 = \sigma^{-1}(1-\sigma)$, то получим

$$c_2 p_0 - \varepsilon p_1 - p \in -K. \qquad (7)$$

Обозначим $c = \max(c_1, c_2)$.
Очевидно, $(c - c_1)p_0 \in K$. Отсюда и из (6) получим

$$cp_0 + \varepsilon p_1 - p \in K.$$

Далее, $-(c - c_2)p_0 \in -K$. Отсюда и из (7) имеем

$$-cp_0 - \varepsilon p_1 - p \in -K.$$

В силу произвольности $p \in Y_\mu$ получаем, по определению, что p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.
Теорема 2 доказана. □

3. Теорема Вороновской с общей точки зрения

Пусть функционал $\mu \in X^*$, конус K, элементы p_0, p_1 удовлетворяют тем условиям, о которых была речь в предыдущем пункте. Последовательность $\mu_n \in K^*$ такова, что $\mu_n(p_0) \to 0$, $\mu_n(p_1) \to \mu(p_1) > 0$. Тогда, если элемент $p \in Ker\mu$ удовлетворяет (3), то можно поставить вопрос: как определить предел последовательности $\frac{\mu_n(x)}{\mu_n(x_0)}$?

Предполагаем, что существует элемент $y \in Ker\mu$, $y \in K$, $y \notin lin(\{p, p_0\})$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n(y)}{\mu_n(p_0)} = 0.$$

Рассмотрим пространство $P = lin(\{p, p_0, y\})$ и конус $K(p) = K \bigcap P$.

Если обозначить z – текущий элемент пространства P, то равенством

$$\Phi_n(z) = \frac{\mu_n(z)}{\mu_n(p_0)}$$

определяется последовательность линейных непрерывных на P функционалов Φ_n.

При этом Φ_n неотрицательны на элементах $K(p)$, $\Phi_n(p_0) = 1$, $\Phi_n(y) \to 0$.

Если, кроме того, на P определен линейный непрерывный функционал $v(z)$, неотрицательный на $K(p)$ и проходящий через y, и если y – точка v-втягивания P в $K(p)$ по направлению p_0 и $v(p_0) = 1$, то в случае существования конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n(z)}{\mu_n(p_0)} = v(z) \qquad (8)$$

для всех $z \in P$ будем называть функционал v из (8) функционалом Вороновской.

Каких-то общих правил нахождения (вычисления) функционала Вороновской неизвестно, но с помощью теоремы 2 в конкретных ситуациях можно проверить, является или нет тот или иной функционал функционалом Вороновской.

Вид функционала Вороновской зависит от выбора элементов p_0 и y. Для практических приложений наиболее удобны случаи, в которых функционалы Вороновской имеют дифференциальный вид (см. [1], [2]).

4. Некоторые примеры

Пример 1. Классический вариант теоремы Вороновской. Положительные операторы.

Пусть $L_n : C[a, b] \to C[a, b]$ произвольная последовательность линейных положительных операторов. Для сходимости операторов L_n в точке $x \in [a, b]$ к значению $f(x)$, если x – точка непрерывности ограниченной функции $f(t)$, достаточно выполнения двух предельных отношений: $L_n(1, x) \to 1$, $L_n((t-x)^2, x) \to 0$ (теорема Коровкина [8]).

Пусть $f(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = x$ и в ее окрестности. Обозначим

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t-x),$$
$$p_0(t) = (t-x)^2, y(t) = (t-x)^4,$$
$$P = lin(\{\varphi(t), p_0(t), y(t)\}),$$

K – конус неотрицательных функций, $K(\varphi) = K \bigcap P$. Применяя теорему 2, можно убедиться, что функционалом Вороновской в этом случае является

$$v(z) = \frac{1}{2} z''(x)$$

(см. [1]). Доказательство приведем в примере 2 для более сложного случая положительных операторов, определенных на функциях двух переменных.

Таким образом, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n((t-x)^4, x)}{L_n((t-x)^2, x)} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\varphi, x)}{L_n((t-x)^2, x)} = \frac{1}{2}\varphi''(x).$$

Если обозначить теперь

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t-x) - \frac{1}{2}(t-x)^2 - \frac{1}{6}(t-x)^3,$$
$$p_0(t) = (t-x)^4, y(t) = (t-x)^6,$$

то функционалом Вороновской будет

$$v(z) = \frac{1}{4!} z^{(4)}(x).$$

(см. [1]).

Пример 2. Положительные операторы, определенные на функциях двух переменных.

Пусть $L_n(f(t,u), x, y) : C[a, b]^2 \to C[a, b]^2$ последовательность линейных положительных операторов таких, что

$$\begin{array}{l} \|L_n(1,\ x,\ y) - 1\| \to 0, \\ \|L_n(t^i,\ x,\ y) - x^i\| \to 0, \\ \|L_n(u^i,\ x,\ y) - y^i\| \to 0 \end{array} \qquad (9)$$

при $n \to \infty$, $i = 1, 2$.

Тогда, если для $(x, y) \in [a, b]^2$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n((t-x)^4 + (u-y)^4, x, y)}{L_n((t-x)^2 + (u-y)^2, x, y)} = 0,$$

то для $f(t, u) \in C^2[a,\ b]^2$ выполняется

$$\begin{array}{l} L_n(f(t,u), x, y) = f(x,y)L_n(1, x, y) + \\ \ + f'_t(x,y)L_n(t-x, x, y) + \\ \ + f'_u(x,y)L_n(u-y, x, y) + \\ \ + 0.5(f''_{tt}(x,y)L_n((t-x)^2, x, y) + \\ \ + 2f''_{tu}(x,y)L_n((t-x)(u-y), x, y) + \\ \ + f''_{uu}(x,y)L_n((u-y)^2, x, y)) + \\ \ + o(L_n((t-x)^2 + (u-y)^2, x, y)). \end{array} \qquad (10)$$

Действительно, при выполнении условий (9) для любой функции $f(t,u) \in C^2[a,b]^2$ выполняется равенство

$$\|L_n(f(t,u),x,y) - f(x,y)\| = O(\gamma_n),$$

где γ_n максимальная из величин

$$\|L_n(1,x,y) - 1\|,$$

$$\|L_n(t^i,x,y) - x^i\|,$$

$$\|L_n(u^i,x,y) - y^i\|,$$

$i = 1, 2$ (см., например, [1], гл. 1, п. 5).

Пусть произвольным образом зафиксирована точка $(x,y) \in [a,b]^2$. Для функции $f(t,u) \in C^2[a,b]^2$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(t,u) = f(t,u) - f(x,y) - f'_t(x,y)(t-x) -$$

$$-f'_u(x,y)(u-y) - (t-x)(u-y)f''_{tu}(x,y) +$$

$$+\frac{1}{2}(u-y)^2(f''_{tt}(x,y) - f''_{uu}(x,y)).$$

Пространство P определим равенством

$$P = lin\{\Phi(t,u), p_0(t,u), Y(t,u)\},$$

где

$$p_0(t,u) = (t-x)^2 + (u-y)^2,$$

$$Y(t,u) = (t-x)^4 + (u-y)^4.$$

Здесь $Y(t,u)$ играет роль элемента p_1 из условия теоремы 2.

Заметим, что любой элемент $z(t,u) \in P$ обладает следующими свойствами:

$$z(x,y) = z'_t(x,y) = z'_u(x,y) = z''_{tu}(x,y) = 0,$$

$$z''_{tt}(x,y) = z''_{uu}(x,y),$$

так как этими свойствами обладают функции p_0, Φ и Y.

Обозначим через $K(\Phi)$ пересечение с пространством P конуса K неотрицательных функций. Покажем, что если обозначить

$$v(z) = \frac{1}{2}z''_{tt}(x,y),$$

(v – функционал Вороновской), то $Y(t,u)$ является точкой v-втягивания пространства P в конус $K(\Phi)$ по направлению $p_0(t,u)$.

Пусть $z(t,u) \in P$ произвольный элемент такой, что $z''_{tt}(x,y) > 0$. Тогда в силу свойств элементов пространства P

$$z''_{tt}(x,y)z''_{uu}(x,y) - [z''_{tu}(x,y)]^2 > 0.$$

Следовательно, найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для точки $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$ выполняется

$$z''_{tt}(t,u)z''_{uu}(t,u) - [z''_{tu}(t,u)]^2 > 0.$$

Здесь $U(\varepsilon)$ это ε-окрестность точки (x,y).

Это означает, что функция $z(t,u)$ выпукла вниз на $U(\varepsilon)$. А так как $z(x,y) = z'_t(x,y) = z'_u(x,y) = 0$, то $z(t,u) \geqslant 0$, если точка $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$. Следовательно, при любом $\lambda \in (0;1]$, для $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$ выполняется неравенство

$$\lambda z(t,u) + (1-\lambda)Y(t,u) \geqslant 0. \qquad (11)$$

Далее, для $(t,u) \in [a,b]^2 \backslash U(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$Y(t,u) \geqslant 0,5\varepsilon^4, |z(t,u)| \leqslant \|z(t,u)\| = m.$$

Тогда если для $\lambda \in (0;1]$ выполняется неравенство $\lambda < \frac{0,05\varepsilon^4}{m}$, то

$$\lambda z(t,u) + (1-\lambda)Y(t,u) \geqslant 0$$

для $(t,u) \in [a,b]^2 \backslash U(\varepsilon)$. Таким образом, для этих λ неравенство (11) выполняется для всех точек $(t,u) \in [a,b]^2$. Значит, $\lambda z + (1-\lambda)Y \in K$. Из теоремы 2 следует, что Y является точкой v-втягивания в конус K по направлению p_0.

Теперь мы можем сделать вывод, что при выполнении равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(Y(t,u),x,y)}{L_n(p_0(t,u),x,y)} = 0$$

выполняется аналогичное равенству (8) равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\Phi(t,u),x,y)}{L_n(p_0(t,u),x,y)} = \frac{1}{2}\Phi''_{tt}(x,y).$$

Раскрывая выражения для $\Phi(t,u)$ и $p_0(t,u)$ и учитывая, что $\Phi''_{tt}(x,y) = f''_{tt}(x,y)$, после преобразований получим (10).

Пример 3. Квазиположительные операторы.

Смысл термина «квазиположительные операторы» будет ясен из дальнейшего изложения.

Пусть зафиксировано $x \in [a,b]$. Пусть, далее, $f(t) \in Lip1$ имеет в точке x односторонние производные, при этом, очевидно, $|f'_+(x)| < \infty$ и $|f'_-(x)| < \infty$. Полагаем, кроме того, что $f(t)$ дифференцируема на $[x-\delta_0, x]$ и на $[x, x+\delta_0]$ при некотором $\delta_0 > 0$.

Конус K состоит из функций, обращающихся в нуль при $t = x$, не возрастающих на $[a,x]$, не убывающих на $[x,b]$. Обозначим

$$t^- = \frac{1}{2}(t - |t|),$$

$$\varphi(t)=f(t)-f(x)-(f'_+(x)+f'_-(x))(t-x)^-=$$

$$=f(t)-f(x)-(f'_+(x)+f'_-(x))\frac{1}{2}(t-x-|t-x|),$$

$$p_0(t)=|t-x|, y(t)=(t-x)^2,$$
$$P=lin(\{p_0(t),y(t),\varphi(t)\}).$$

Очевидно, для любого $z(t)\in P$, $z'_-(x)=-z^-_+(x)$.

Тогда определенный в пространстве P функционал $v(z)=z'_+(x)$ является функционалом Вороновской, а $y(t)$ является точкой v-втягивания P в конус $K(\varphi)=K\bigcap P$ по направлению $p_0(t)$ (см. [1]).

Отсюда получим, что из

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n((t-x)^2,x)}{L_n(|t-x|,x)}=0$$

следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(\varphi(t),x)}{L_n(|t-x|,x)}=f'_+(x)$$

или, по-другому

$$L_n(f(t),x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{2}(f'_+(x)+f'_-(x))L_n(t-x,x)+$$

$$+\frac{1}{2}(f'_+(x)-f'_-(x))L_n(|t-x|,x)+o(L_n(|t-x|,x)).$$

Пример 4. Положительные операторы, определенные на функциях нескольких переменных.

Далее обозначаем $\Delta=[a,b]^r$, $r>0$ – целое, $t,x\in\Delta$, $t=(t_1,...,t_r)$, $x=(x_1,...,x_r)$, $L_n:C(\Delta)\to C(\Delta)$ – последовательность линейных положительных операторов.

Размещением с повторениями из r элементов, а для определенности, из элементов множества $\{1,2,...,r\}$ по μ элементов, будем называть упорядоченное множество (последовательность) $(n_1,n_2,...,n_\mu)$, где $n_i\in\{1,2,...,r\}$. (Для каждого i можно записать $n_i\in(n_1,n_2,...,n_\mu)$).

T^μ_r – множество всех размещений с повторениями из r элементов по μ. Если $\tau\in T^\mu_r$, то будем писать $|\tau|=\mu$.

Пользуясь этими обозначениями, формулу Тейлора для $f(t)\in C^{2m}(\Delta)$ в окрестности $t=x$ можно записать в виде

$$f(t)=f(x)+\sum_{i=1}^{2m}\frac{1}{i!}\sum_{|\tau|=i}\frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau}\partial t_j}(x)\prod_{j\in\tau}(t_j-x_j)+\rho(t).$$

Положим

$$\varphi(t)=f(t)-f(x)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2m}\frac{1}{i!}\sum_{|\tau|=i}\frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau}\partial t_j}(x)\prod_{j\in\tau}(t_j-x_j)+$$

$$+\frac{1}{(2m)!}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^{2m}f}{\partial t_1^{2m}}(x)(t_j-x_j)^{2m}$$

и

$$p_0(t)=\sum_{j=1}^{r}(t_k-x_k)^{2m},$$

$$y(t)=\sum_{j=1}^{r}(t_k-x_k)^{2m+2}.$$

K – конус неотрицательных на Δ функций, $P=lin(\{p_0(t),y(t),\varphi(t)\})$, $K(\varphi)=K\bigcap P$.

Функционал

$$v(z)=\frac{1}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}z}{\partial t_1^{2m}}(x)$$

является функционалом Вороновской, $y(t)$ – точка v-втягивания P в $K(\varphi)$ по направлению $p_0(t)$. (см. [1]).

Итак, имеем следующее утверждение: пусть $L_n:C(\Delta)\to C(\Delta)$ последовательность линейных положительных операторов, таких, что $L_n(1,x)=1$, $\|L_n(\sum_{i=1}^r(t_i-x_i)^2,x)\|\to 0$. Если, кроме того, для $x\in\Delta$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(\sum_{i=1}^r(t_i-x_i)^{2m+2},x)}{L_n(\sum_{i=1}^r(t_i-x_i)^{2m},x)}=0,$$

то для $f(t)\in C^{2m}(\Delta)$ верна оценка

$$L_n(f(t),x)=f(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\frac{1}{i!}\sum_{|\tau|=i}\frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau}\partial t_j}(x)L_n(\prod_{j\in\tau}(t_j-x_j),x)+$$

$$+o(L_n(\sum_{j=1}^{r}(t_j-x_j)^{2m},x)).$$

Заключение

Итак, как показывают примеры, рассмотренные в п. 4, теоремы 1 и 2 из п. 2 являются эффективным аппаратом получения теорем типа теоремы Вороновской. Хотя и нет способа «вычисления» функционала Вороновской, применение метода точек втягивания позволяет разобраться в ситуациях, которые вызывают большие технические трудности при непосредственном подходе. Так, случай функций нескольких переменных (пример 4 п. 4) удалось разобрать только используя выше указанный метод.

Литература

1. *Абакумов Ю. Г., Банин В. Г.* Аппроксимативные свойства некоторых классов линейных операторов. Чита: СО РАН, ЧГПИ, 1993. 62 с.

2. *Абакумов Ю. Г.* Последовательности линейных функционалов и аппроксимативные свойства линейных операторов. Чита: ЧитГУ, 2004. 179 с.

3. *Бабенко К. И.* О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 1 (241). С. 3–27.

4. *Виденский В. С.* К столетию открытия полиномов Бернштейна // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 15 (50). 2014. С. 40–46.

5. *Вороновская Е. В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. Сер. А. 1932. Т. 4. С. 79–85.

6. *Климов В. С., Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.* Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1966. Т. 15. С. 55–69.

7. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. М.: Наука, 1987. 424 с.

8. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.

9. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ИНТ, 1987. Т. 14. С. 105–260.

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *Abakumov Y. G., Banin V. G.* Approksimativnye svojstva nekotoryh klassov linejnyh operatorov [Approximation properties of some classes of linear operators]. Chita: SO RAN, CHGPI, 1993. 62 p.

2. *Abakumov Y. G.* Posledovatelnosti linejnyh funkcionalov i approksimativnye svojstva linejnyh operatorov [Sequences of linear functionals and approximation properties of linear operators]. Chita: ChitGU, 2004. 179 p.

3. *Babenko K. I.* O nekotorih zadachah teorii priblizheniy i chislennogo analiza [Some problems in approximation theory and numerical analysis]. Uspehi mat. nauk [Russian mathematical surveys]. 1985. Vol. 40, iss. 1 (241). P. 3–27.

4. *Videnskiy V. S.* K stoletiyu otkrytiya polinomov Bernshteyna [The centenary of the discovery of Bernstein polynomials]. Istoriko-matematicheskie issledovaniya. Vtoraya seriya [Historical and mathematical surveys. 2nd ser.]. 2014. Iss. 15 (50). P. 40–46.

5. *Voronovskaja E. V.* Opredelenie asimptoticheskogo vida priblizheniya funkciy polinomami S. N. Bernshteyna [Determination of the asymptotic form of the approximation of functions by S. N. Bernstein polynomials]. DAN SSSR. Ser. A [Proc. USSR AS. Ser. A.]. 1932. Vol. 4. P. 79–85.

6. *Klimov V. S., Krasnoselskiy M. A., Lifshitc E. A.* Tochki gladkosti konusa i shodimost polozhitelnyh funkcionalov i operatorov [Points of smoothness of a cone and the convergence of positive functionals and operators]. Tr. Mosk. mat. o-va [Trans. Mosc. math. soc.]. Moscow, 1966. Vol. 15. P. 55–69.

7. *Kornejchuk N. P.* Tochnye konstanty v teorii priblizheniy [Exact constants in approximation theory]. Moscow: Nauka, 1987. 424 p.

8. *Korovkin P. P.* Linejnye operatory i teorija priblizheniy [Linear operators and approximation theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 212 p.

9. *Tihomirov V. M.* Teorija priblizheniy [Approximation theory]. Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya [Encyclopedia of mathematical sciences. Fundamental surveys]. Moscow: INT, 1987. Vol. 14. P. 105–260.

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Абакумов Юрий Георгиевич
профессор, к. ф.-м. н.
Забайкальский государственный университет
ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039
эл. почта: abakumovug@yandex.ru
тел.: (8302) 2416444

Банин Виктор Григорьевич
доцент, к. ф.-м. н.
Финансовый университет при правительстве РФ
Ленинградский проспект, 49, Москва, Россия, 125993
эл. почта: vikbanin@mail.ru
тел.: (8499) 2772118

CONTRIBUTORS:

Abakumov, Yury
Zabaykalskiy State University
30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia,
e-mail: abakumovug@yandex.ru
tel.: (8302) 2416444

Banin, Victor
Financial University (Government of Russian Federation)
49 Leningradskiy St., 125993 Moscow, Russia,
e-mail: vikbanin@mail.ru
tel.: (8499) 2772118