Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 123–130
DOI: 10.17076/mat138

УДК 519.175.4

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Для моделирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности Интернета, часто используется конфигурационный граф, степени вершин которого являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. В настоящей статье рассматривается случайный граф, содержащий $N+1$ вершину. Случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ являются независимыми одинаково распределенными, равными степеням вершин с номерами от 1 до N, у которых вероятность $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \ldots, N$, эквивалентна $h(k)/k^\tau$ при $k \to \infty$, где $h(k)$ интегрируемая на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция и $\tau > 1$. Вершина с номером 0 является фиктивной, ее степень равна 1, если сумма степеней всех остальных вершин является нечетной, в противном случае степень равна 0. Рассматривается множество таких графов при условии, что сумма степеней всех основных вершин равна n. Получены предельные распределения максимальной степени и числа вершин с заданной степенью в случае, когда $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \mathbf{E}\eta_1$ при $N, n \to \infty$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайный граф; конфигурационный граф; степень вершины; предельное распределение.

I. A. Cheplyukova. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN A CONFIGURATION GRAPH

The configuration graph where vertex degrees are independent identically distributed random variables is often used for models of complex networks such as the Internet. We consider a random graph consisting of $N+1$ vertices. The random variables $\eta_1, \ldots, \eta_N$ are equal to the degrees of vertices with the numbers $1, \ldots, N$. The probability $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \ldots, N$, is equivalent to $h(k)/k^\tau$ as $k \to \infty$ where $h(x)$ is a slowly varying function integrable in any finite interval, $\tau > 1$. The vertex 0 has degree 0 if the sum of degrees of all other vertices is even, else the degree is 1. We obtain the limit distribution of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree under the condition that the sum of degrees is equal to n and $N, n \to \infty, 1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \mathbf{E}\eta_1$.

K e y w o r d s: random graph; configuration graph; vertex degree; limit distribution.

В последнее время уделяется большое внимание изучению структуры и свойств случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций (см., например, [8, 11, 12]). Одна из наиболее известных моделей – конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение этой модели состоит из двух этапов. На первом этапе построения конфигурационного графа, состоящего из N основных и одной фиктивной вершины, для каждой из N основных вершин определяется ее степень в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Для удобства изложения процесса построения такой модели часто используется понятие полуребра, введенное в [12]. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер, число которых равно степени данной вершины. Предполагается, что все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит последовательное образование ребер: на каждом шаге два полуребра выбираются равновероятно и, соединившись, образуют ребро. Дополнительная вершина носит вспомогательный характер, ее степень равна 0, если сумма всех полуребер является четным числом, в противном случае степень равна 1. Очевидно, что такая конструкция допускает образование петель и кратных ребер.

Одним из основных свойств большого числа реальных сетей является то, что число вершин со степенью k пропорционально $k^{-\tau}$ при $k \to \infty$, где $\tau > 0$ (см., например, [9]). Существует множество работ (см., например, [7, 10, 12]), направленных на исследование асимптотических свойств различных числовых характеристик таких случайных графов при $N \to \infty$. В частности, в [12] рассматривается случайный граф, степени вершин η которого имеют распределение $\mathbf{P}\{\eta \geqslant k\} = h(k)k^{-\tau+1}$, где $h(k)$ медленно меняющаяся функция, авторы этой работы полагают, что вид функции $h(k)$ не влияет на результаты исследования и при изучении случайного графа можно заменить $h(k)$ на 1. В [3] доказана локальная предельная теорема для суммы степеней вершин такого графа. В [7] рассматривается множество случайных графов, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами со степенным распределением с положительным параметром τ при условии, что сумма степеней вершин равна n. В этой статье показано, что для исследования асимптотического поведения таких графов можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам [2]. В работах [3–7] получены предельные распределения максимальной степени и числа вершин заданной степени в таких графах в различных зонах изменения параметров n и N при $n, N \to \infty$.

В данной работе рассматривается конфигурационная модель, состоящая из $N+1$ занумерованной вершины, в которой степени вершин с номерами от 1 до N являются независимыми одинаково распределеными случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$ с распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau \Sigma(1,\tau)},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $h(x)$ интегрируемая на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция, $\tau > 1$ и

$$\Sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{h(k)}{k^y}. \tag{2}$$

Далее мы будем рассматривать множество конфигурационных графов при условии, что сумма степеней вершин $\eta_1 + \cdots + \eta_N = n$. Нетрудно заметить, что появление в распределении (1) медленно меняющейся функции $h(x)$ позволяет рассматривать данную модель в качестве обобщения случайных графов, исследуемых в работах [3–7].

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, распределение которых имеет вид

$$p_r(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k \Sigma(1,\tau)}{\Sigma(\lambda,\tau)},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где λ, $0 < \lambda < 1$ – параметр распределения. Из (1)–(3) несложно получить, что

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\Sigma(\lambda, \tau-1)}{\Sigma(\lambda,\tau)},$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{\Sigma(\lambda,\tau-2)}{\Sigma(\lambda,\tau)} - m^2. \tag{4}$$

Пусть параметр распределения (3) выбран так, что выполнено равенство

$$\frac{\Sigma(\lambda,\tau-1)}{\Sigma(\lambda,\tau)} = n/N. \tag{5}$$

Обозначим через $\eta_{(N)}$ максимальную степень вершины и μ_r – число вершин степени r. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $n, N \to \infty$, $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1,\tau-1)/\Sigma(1,\tau)$, r *выбран так, что*

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^\tau} \to \gamma,$$

где γ некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r + k\} = \exp\left\{-\frac{\gamma\lambda^k}{1-\lambda}\right\}(1 + o(1)).$$

(Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.)

Теорема 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, r фиксированное натуральное число. Тогда равномерно относительно k таких, что $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{u_r^2}{2}\right\}(1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)\right).$$

Теорема 3. *Пусть $n, N, r \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k - Np_r(\lambda))/(\sqrt{Np_r(\lambda)})$ лежит в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(1 + o(1))}{k!}(Np_r(\lambda))^k \times$$
$$\times \exp\{-Np_r(\lambda)\}.$$

Ниже мы докажем несколько вспомогательных утверждений (леммы 1–4), с помощью которых будут доказаны теоремы 1–3. В основе доказательства лежит обобщенная схема размещений, введенная В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). Из (1)–(3) нетрудно видеть, что для рассматриваемого множества случайных графов справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Следовательно, выполнены условия обобщенной схемы размещения.

Введем два множества вспомогательных независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ и $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ таких, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant r\},$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \neq r\}, k = 1, 2, \ldots \quad (6)$$

Пусть

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)},$$
$$\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

В [2] показано, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times$$
$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \quad (8)$$

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 1 справедливо*

$$NP_{r+k} = \gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$NP_{r+k} = N \sum_{i \geqslant 0} p_{r+k+i+1}(\lambda) =$$

$$= N\left(\sum_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda) + \sum_{i \geqslant M+1} p_{r+k+i+1}(\lambda)\right), \quad (9)$$

где выбор положительной постоянной M будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda)$. Из (1)–(3) получаем, что

$$\sum_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda) = p_{r+1}(\lambda) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{M} \frac{\lambda^{k+i} h(r+k+i)}{h(r+1)}\left(1 - \frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}. \quad (10)$$

Согласно условию леммы $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, тогда из (5) следует, что

$$0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1. \quad (11)$$

Известно (см., например, [1]), что интегрируемые на любом конечном интервале медленно меняющиеся функции обладают следующими свойствами:

1. При больших x функция $h(x) > 1/\sqrt{x}$;
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{h(x+t)}{h(x)} = 1, \quad t \geqslant 0$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x^\varepsilon}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)x^\varepsilon=\infty$, при всех значениях $\varepsilon>0$;

4. Допускается следующее каноническое представление
$$h(x)=c(x)\exp\left\{\int\limits_\alpha^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\},$$
где при $x\to\infty$
$$c(x)\to c\neq 0,\qquad \varepsilon\to 0,$$
а число $\alpha>0$.

Используя третье свойство медленно меняющейся функции, из условий теоремы 1 и (11), несложно показать, что r пропорционально $\ln N$. Тогда из равенства (10) и второго свойства медленно меняющейся функции находим, что
$$\sum_{i=0}^M p_{r+k+i+1}(\lambda)=p_{r+1}(\lambda)\sum_{i=0}^M\lambda^{k+i}(1+o(1)).$$
Следовательно, при выборе достаточно большого M сумма $\sum\limits_{i=0}^M p_{r+k+i+1}(\lambda)$ сколь угодно мало отличается от
$$\frac{\lambda^{r+k+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^\tau(1-\lambda)}(1+o(1)).\tag{12}$$

Осталось показать, что
$$\sum_{i\geqslant M+1}p_{r+k+i+1}(\lambda)=o\left(\sum_{i=0}^M p_{r+k+i+1}(\lambda)\right).\tag{13}$$

Из (1)–(3) несложно получить, что
$$\sum_{i\geqslant M+1}p_{r+k+i+1}(\lambda)=\frac{\lambda^{r+k+1}}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^\tau}\times$$
$$\times\sum_{i\geqslant M+1}\lambda^i\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^\tau\times$$
$$\times h(r+k+i+1).\tag{14}$$

Для справедливости равенства (13) достаточно показать, что выполнено следующее соотношение
$$\sum_{i\geqslant M+1}\lambda^i\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^\tau\times$$
$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\to 0.\tag{15}$$

Разделим область суммирования $\{i:i\geqslant M+1\}$ на три части:
$$K_1=\{i:M+1\leqslant i<C_5r\};$$
$$K_2=\{i:i\geqslant C_5r, i=o(N^\varepsilon)\};$$
$$K_3=\{i:i\geqslant C_6N^\varepsilon\},$$
где ε – некоторая положительная постоянная.

Из первого и третьего свойств медленно меняющейся функции $h(x)$ нетрудно получить, что
$$\sum_{K_3}\lambda^i\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^\tau\times$$
$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\leqslant C_7\sqrt{r+1}\sum_{K_3}\lambda^i i^\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant C_7\frac{\lambda^{C_8N^\varepsilon}}{1-\lambda^{C_9}}\to 0.\tag{16}$$

Используя канонический вид медленно меняющейся функции $h(x)$, можно показать, что
$$\sum_{K_1}\lambda^i\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^\tau\times$$
$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\leqslant C_{10}\sum_{K_1}\lambda^i\times$$
$$\times\exp\left\{\int\limits_{r+1}^{r+k+i+1}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\}\leqslant C_{11}\frac{\lambda^{M+1}}{1-\lambda},\tag{17}$$
следовательно, выбором достаточно большого M последняя сумма может быть сделана сколь угодно малой.

Применяя первое и третье свойства медленно меняющейся функции, несложно получить, что
$$\sum_{K_2}\lambda^i\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^\tau\times$$
$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\to 0.\tag{18}$$

Из (14)–(18) следует справедливость (13). Тогда утверждение леммы 1 вытекает из соотношений (9), (12) и (13).

Лемма 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1,\tau-1)/\Sigma(1,\tau)$. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1+o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Докажем слабую сходимость к нормальному закону. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau)}{\Sigma(\lambda,\tau)}.$$

В дальнейшем нам потребуется явный вид третьей производной от $\ln\varphi(t)$. Из (3) несложно получить, что

$$(\ln\varphi(t))''' = i\left(-\frac{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-3)}{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau)}+\right.$$
$$+3\frac{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-2)\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-1)}{\Sigma^2(e^{it}\lambda,\tau)}-$$
$$\left.-2\frac{\Sigma^3(e^{it}\lambda,\tau-1)}{\Sigma^3(e^{it}\lambda,\tau)}\right).$$

Отсюда, из (2) и (11), легко видеть, что

$$|(\ln\varphi(t))'''| \leqslant C_{12}\Sigma(\lambda,\tau-3) + \tag{19}$$
$$+C_{13}\Sigma(\lambda,\tau-2)\Sigma(\lambda,\tau-1) + C_{14}\Sigma^3(\lambda,\tau-1).$$

Рассмотрим $\Sigma(\lambda,\tau-j), j=0,1,2,3$. Используя каноническое представление медленно меняющейся функции, из (2) находим, что

$$\Sigma(\lambda,\tau-j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\frac{\lambda^k}{k^{\tau-j}}c(k)\exp\left\{\int_\alpha^k \frac{\varepsilon t}{t}\right\} + \sum_{k>M}\frac{\lambda^k h(k)}{k^{\tau-j}} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant M} c(k)\sum_{k=1}^{M}\lambda^{C_{15}k} + \sum_{k>M}\lambda^{C_{16}k},$$

значит, при достаточно большом M справедлива следующая оценка:

$$\Sigma(\lambda,\tau-j) \leqslant C_{17}, j=0,1,2,3. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$|(\ln\varphi(t))'''| \leqslant C_{18}. \tag{21}$$

При достаточно малых t справедливо равенство

$$\ln\varphi(t) = t\,(\ln\varphi(t))'\,|_{t=o} + \frac{t^2}{2}\,(\ln\varphi(t))''\,|_{t=o}+$$
$$+\frac{t^3}{3!}Q(t),$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2\max_{|u|\leqslant|t|}|(\ln\varphi(u))'''|.$$

Тогда

$$\ln\varphi(t) = itm + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + \frac{t^3}{3!}Q(t). \tag{22}$$

Пусть $\varphi_N(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - k)/(\sigma\sqrt{N})$. Тогда

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right).$$

Учитывая, что в рассматриваемой зоне изменения параметров n и N дисперсия $\sigma^2 > C_{19}$, из (21) и (22) находим, что

$$\ln\varphi_N(t) = \frac{t^2}{2} + o(1). \tag{23}$$

Согласно формуле обращения, представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ в виде следующего интеграла

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

где $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$. Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-t^2/2}dt, \tag{24}$$

разность

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izt}[\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}]dt,$$
$$I_2 = \int_{A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt, \tag{25}$$
$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant|t|\leqslant\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$
$$I_4 = -\int_{A<|t|} e^{-izt-t^2/2}dt,$$

выбор положительных постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что разность R стремится к нулю.

Из (23) следует, что $I_1 \to 0$. Кроме того,

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-t^2/2} dt, \qquad (26)$$

и выбором достаточно большого A интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым.

Оценим интеграл I_2. Из соотношений (21) и (22), учитывая, что $\sigma^2 \geqslant C_{19}$, получаем, что

$$|\varphi_N(t)| \leqslant e^{-C_{20}t^2},$$

следовательно, для I_2 справедлива следующая оценка:

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-C_{20}t^2} dt,$$

и выбором достаточно большого A интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым.

Рассмотрим I_3. Для $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant e^{-C_{21}},$$

тогда несложно видеть, что при $N \to \infty$ интеграл $I_3 \to 0$, это и завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\}$ в виде следующего интеграла

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(r)} = k\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int\limits_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_r(t) dt,$$

где $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$, а $\varphi_r(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Используя равенство (24), разность

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4$, где I_4 определен в (25), а интегралы $I_1^{(r)}$–$I_3^{(r)}$ строятся аналогично I_1–I_3, заданных при доказательстве леммы 2 с заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_r(t)$.

Рассмотрим $I_1^{(r)}$. Легко видеть, что

$$\varphi_r(t) = \exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\}(1-P_r)^{-N}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\times$$
$$\times\left(1-(1+o(1))\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)\exp\left\{\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\right)^N. \qquad (27)$$

Несложно заметить, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)\exp\left\{\frac{tk}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + R(t), \qquad (28)$$

где

$$R(t) \leqslant \left|\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)k.$$

Учитывая, что при выполнении условий теоремы 1 r пропорционально $\ln N$, из (1)–(3), первого и третьего свойств медленно меняющейся функции можно получить, что

$$\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k>r} p_k(\lambda)k \leqslant \frac{t(r+1)^2 p_{r+1}}{\sigma\sqrt{N}(1-\lambda)} = o\left(\frac{1}{N}\right). \qquad (29)$$

Тогда из (23), (27) и (28) следует, что $\varphi_r(t) \to e^{-t^2/2}$, значит $I_1^{(r)} \to 0$.

Из соотношений (19), (21), (22) и (27) находим, что

$$|\varphi_r(t)| \leqslant (1-P_r)^{-N}\left(\exp\left\{-\frac{C_{22}t^2}{N}\right\} + \frac{C_{23}}{N}\right)^N.$$

Тогда при выполнении условий леммы справедливо

$$|I_2^{(r)}| \leqslant C_{24}\int\limits_A^{\infty} e^{-C_{25}t^2} dt.$$

Следовательно, интеграл $I_2^{(r)}$ может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Используя (27) и (29), легко оценить интеграл $I_3^{(r)}$ аналогично оценке I_3 в доказательстве леммы 2, а для I_4 справедлива оценка (26), что и завершает доказательство леммы 3.

Из (3) и (6) несложно найти, что

$$m_r = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} = (m - rp_r(\lambda))/(1 - p_r(\lambda)),$$

$$\sigma_r^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)} = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2}\times$$

$$\times\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)\right). \qquad (30)$$

Аналогично леммам 2 и 3 нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть* $n, N \to \infty$ *так, что* $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. *Тогда для* $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ *равномерно относительно целых* k *таких, что* $z = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\right\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}}e^{-z^2/2}(1 + o(1)).$$

Теперь мы можем доказать теоремы 1–3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда из леммы 1 легко получить, что при целых фиксированных k

$$(1 - P_{r+k})^N =$$

$$= \exp\{-\gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}\}(1 + o(1)). \qquad (31)$$

Из лемм 2 и 3 находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1.$$

Отсюда и из (7), (31) следует утверждение теоремы 1.

Получить теорему 2 нетрудно, воспользовавшись нормальным приближением биномиального рапределения при $Np_r(\lambda)(1-p_r(\lambda)) \to \infty$, справедливом для всех k таких, что

$$(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}$$

лежит в любом конечном интервале:

$$\binom{N}{k}p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} =$$

$$= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}\right\}.$$

Тогда из лемм 2 и 4, равенств (8) и (30) следует утверждение теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 заметим, что в силу (3) и (11) верно соотношение $p_r(\lambda) \to 0$ и, согласно пуассоновскому приближению биномиального распределения, справедливому равномерно относительно целых k, для которых $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ лежит в любом конечном интервале,

$$\binom{N}{k}p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} =$$

$$= \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!}e^{-Np_r(\lambda)}(1 + o(1)). \qquad (32)$$

Используя леммы 2, 4 и соотношение (30), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1,$$

поэтому теорема 3 следует из (8) и (32).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00009.

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi:10.4213/dm963

4. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23. doi:10.4213/dm1057

5. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi:10.4213/dm1104

6. *Павлов Ю. Л., Дертишникова Е. Н.* О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3, вып. 1. С. 59–65.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi:10.4213/dm1008

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.

10. *Hofstad R., Hooghiemstra G., Znamenski D.* Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0502581, 2006. doi: 10.1214/EJP.v12-420

11. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118. doi:10.1103/PhysRevE.64.026118

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23. doi:10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *Ibragimov I. A., Linnik Ju. V.* Nezavisimye i stacionarno svjazannye velichiny [Independent and stationary sequences of random variables]. Moscow: Nauka, 1965. 524 p.

2. *Kolchin V. F.* Sluchajnye otobrazhenija [Random Mappings]. Moscow: Nauka, 1984. 209 p.

3. *Pavlov Ju. L.* Predel'noe raspredelenie objema gigantskoj komponenty v sluchajnom grafe Internet-tipa [The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2007. Vol. 19, iss.3. P. 22–34. doi:10.4213/dm963

4. *Pavlov Ju. L.* O predel'nyh raspredelenijah stepenej vershin v uslovnyh Internet-grafah [On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2009. Vol. 21, iss. 3. P. 14–23. doi:10.4213/dm1057

5. *Pavlov Ju. L.* Ob uslovnyh Internet-grafah, stepeni vershin kotoryh ne imejut matematicheskogo ozhidanija [On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2010. Vol. 22, iss. 3. P. 20–33. doi:10.4213/dm1104

6. *Pavlov Ju. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noj stepeni vershiny v sluchajnom grafe Internet-tipa [On limit distribution of maximum vertex degree in a random graph of Internet type]. Trudy KarNC RAN [Proceedings of KarRC RAS]. 2010. N 3, iss. 1. P. 59–65.

7. *Pavlov Ju. L., Chepljukova I. A.* Sluchajnye grafy Internet-tipa i obobshhennaja shema razmeshhenija [Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2008. Vol. 20, iss. 3. P. 3–18. doi:10.4213/dm1008

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology. Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.

10. *Hofstad R., Hooghiemstra G., Znamenski D.* Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0502581, 2006. doi:10.1214/EJP.v12-420

11. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. Physical Review E. 2001. 64. 026118. doi:10.1103/PhysRevE.64.026118

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23. doi:10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, доцент, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370