Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 77–84
DOI: 10.17076/mat1347

УДК 519.115:519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ С ФИКСИРОВАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ИХ МИНИМАЛЬНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

В схемах равновероятного размещения r частиц по n ячейкам изучаются вероятностные распределения минимальных уровней заполнения ячеек, чисел ячеек с фиксированным минимальным уровнем заполнения и числа пустых ячеек. Рассматриваемые схемы отличаются разными парными качествами ячеек и частиц по их различимости.

Ключевые слова: варианты размещения частиц; число пустых ячеек; вероятностное распределение минимального заполнения ячеек.

N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF THE SCHEMES OF PARTICLE ALLOCATION TO CELLS WITH A FIXED MINIMUM FILLING VALUE

Schemes of equiprobable allocation of r particles to n cells are studied for the probability distributions of minimum cell fill levels, numbers of cells with a fixed minimum fill level, and the number of empty cells. The schemes have different paired qualities of cells and particles in terms of their distinguishability.

Keywords: particle allocation variants; number of empty cells; probability distribution of the minimal numbers of elements per cells.

Введение

Вероятностные распределения указанных для исследования характеристик определяются в следующих четырех схемах размещения частиц по ячейкам, характеризующихся разными парными качествами ячеек и частиц в них:

схема A – размещение различимых частиц по различимым ячейкам;

схема B – размещение различимых частиц по неразличимым ячейкам;

схема C – размещение неразличимых частиц по различимым ячейкам;

схема D – размещение неразличимых частиц по неразличимым ячейкам.

Вероятностный анализ схем проводится на основе процедур прямого перечисления благоприятных исходов схем для допустимых значений изучаемых характеристик со следующими обозначениями:

U – минимальный уровень заполнения ячеек в исходе схемы;

μ_k – число ячеек с минимальным уровнем заполнения $U = k$, где k – целое $\geqslant 0$;

μ_0 – число пустых ячеек.

Для всех схем считаем, что $r \geqslant nk$.

Укажем диапазоны изменения возможных значений k, μ_k изучаемых характеристик. Очевидно, что

$$k = \overline{0, [r/n]}, \tag{1}$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z,

$$\mu_k = \overline{l, L}, \tag{2}$$

где для μ_k при заданном значении k величины l и L очевидно определяются из условий $r - \mu_k k \geqslant (n - \mu_k)(k+1)$, т. к. μ_k ячеек с k частицами, а остальные $(n-\mu_k)$ ячеек с более чем k частицами, откуда $r \geqslant \mu_k k + (n - \mu_k)(k+1)$, а $L = n$, когда $r = nk$, или $L = n - 1$, когда $r > nk$, что можно записать следующими формулами для значений l и L:

$$l = max(1, n(k+1) - r),$$

$$J = 1 - C_n^{n+r-nk}, \quad L = n - J. \tag{3}$$

Число пустых ячеек равно 0 при $U = k > 0$.

Вероятностный анализ характеристик схем начнем с нахождения распределения случайной величины (с. в.) U с учетом разных качеств ячеек и частиц (по их различимости):

а) при различимости ячеек будем различать варианты наборов составов частиц в ячейках (для различимых частиц) или их количеств (для неразличимых частиц);

б) при различимости частиц будем различать наборы составов частиц в ячейках с учетом порядка этих наборов (для различимых ячеек) или без учета их порядка (для неразличимых ячеек).

Теперь по приведенным общим соображениям будем находить вероятностные распределения исследуемых характеристик в каждой схеме со спецификой, определяемой качествами ячеек и частиц.

1. Вероятностный анализ схемы A

Теорема 1. *Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при k, удовлетворяющего (1), выполняется соотношение*

$$P(U = k) = \frac{M_A(k)}{n^r} = \frac{1}{n^r} \sum_{i=l}^{L} \sum_{(\{\bar{w}\})} \left(\frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!} \right) \left(\frac{n!}{\prod_{a=0}^{r} q_a!} \right), \tag{4}$$

где $M_A(k)$ – число исходов события $(U = k)$, т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по k частиц, а в остальных ячейках больше, чем по k, последняя сумма производится по перечислению всех наборов $\{\bar{w}\}$ уровней заполнения ячеек $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ в данном их порядке при каждой фиксации числа i ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения k, а $\bar{q} = (q_0, \dots, q_r)$ – вторая маркировка уровней заполнения ячеек, где q_a – число ячеек с уровнем заполнения a, $a = \overline{0, r}$.

Доказательство. Число исходов N_A схемы A размещения различимых частиц по различимым ячейкам известно: $N_A = n^r$. Вероятность $P(U = k)$ для допустимых по (1) значений k будем искать в виде $M_A(k)/n^r$. Число исходов $M_A(k)$ определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

1) перечисляем все допустимые по (2) и (3) значения μ_k ячеек, содержащих ровно по k частиц;

2) для каждого значения $\mu_k = i$ из 1) перечисляем все размеры превышения заданного уровня заполнения остальных $(n - i)$ ячеек по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек при размещении по ним $(r - nk)$ неразличимых частиц числом способов C_{r-nk-1}^{n-i-1} в виде $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$, где компоненты превышений перечисляются в порядке нумерации ячеек, и на местах выбранных в 1) i ячеек стоят нули;

3) прибавляя ко всем компонентам каждого вектора из 2) $\bar{m}$ по k, получаем все наборы требуемых размеров уровней заполнения ячеек $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$;

4) для каждого $\bar{w}$ вычисляем $\bar{q}$;

5) по результатам 3) и 4) по схеме перестановок с повторением находим число размещений r различимых частиц по n различимым ячейкам во всех заданных вектором $\bar{w}$ количествах при фиксированном значении i, обеспечивающих выполнение события $(U = k)$ – это первый сомножитель в круглых скобках в (4), и число делений n ячеек на группы ячеек с совпадающими уровнями заполнений – это второй сомножитель в круглых скобках в (4).

Тогда

$$M_A(k) = \sum_{i=l}^{L} \sum_{(\{\bar{w}\})} \frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!} \frac{n!}{\prod_{a=0}^{r} q_a!},$$

а перечисление всех наборов $\{\bar{w}\}$ при каждой фиксации числа i ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения k следует из перечисления исходов схемы сочетаний с повторением в количестве C_{r-nk-1}^{n-i-1} в связи с перебором наборов размеров превышений уровня заполнения ячеек, описанным в п. 2) перечисления благоприятных исходов события $(U = k)$, что приводит к формуле (4).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в. μ_k при заданном значении k с. в. U, т. е.

$$P(\mu_k = i/U = k)$$
$$= (1/M_A(k)) \sum_{(\{\bar{w}^*\})} \frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!} \frac{n!}{\prod_{a=0}^{r} q_a!}, \qquad (5)$$

где сумма производится по перечислению всех наборов $\{\bar{w}^*\} = \{\bar{w}\} : \sum_{j=1}^{n} I(w_j - k) = n - i$ при $I(Z) = 0$, когда $Z = 0$, и $I(Z) = 1$, когда $Z > 0$. Тогда при $j = 0$

$$P(\mu_0 = j) = P(U \neq 0),$$

и при $j > 0$ (6)

$$P(\mu_0 = j) = P(\mu_0 = j/U = 0)P(U = 0).$$

□

Замечание 1. а) Очевидно, что $\sum_k M_A(k) = n^r$.

б) Формулы (6) верны для всех схем $A - D$.

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

Пример 1. Пусть $n = 3,\ r = 3$. Общее число исходов схемы $N_A = 3^3 = 27$; $k = \overline{0, [3/3]} = \overline{0, 1}$; по (2) и (3) при $k = 0 \quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 3 - 3) = 1,\ L = 2$, а при $k = 1 \quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 6 - 3) = 3,\ L = 3$.

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 1.

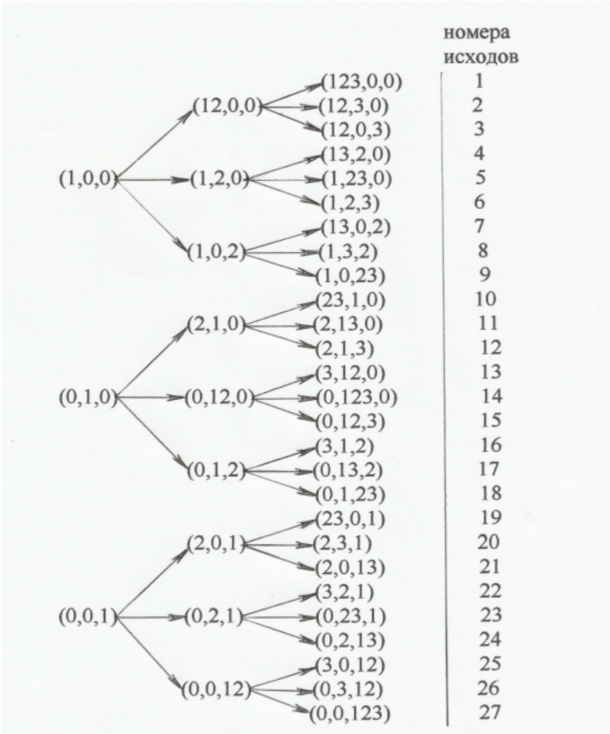

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы A в примере 1

Fig. 1. Enumeration graph of outcomes of the scheme A in example 1

Для $k = 0,\ i = 1$ при любой фиксации одной ячейки с уровнем заполнения 0 получаем одинаковые по составу наборы уровней заполнения $\bar{w} = (0, 1, 2)$, для которых $\bar{q} = (1, 1, 1, 0)$;

для $k = 0,\ i = 2$ при любой фиксации двух ячеек с уровнем заполнения 0 получаем одинаковые по составу наборы уровней заполнения $\bar{w} = (0, 0, 3)$, для которых $\bar{q} = (2, 0, 0, 1)$; тогда находим

$$M_A(0) = \frac{3!}{0!1!2!} \frac{3!}{1!1!1!0!} + \frac{3!}{0!0!3!} \frac{3!}{2!0!0!1!}$$
$$= 18 + 3 = 21.$$

Отсюда по (4) получаем $P(U = 0) = 21/27 = 7/9$.

Для $k = 1,\ i = 3$ при фиксации трех ячеек с уровнем заполнения 1 получаем один набор уровней заполнения $\bar{w} = (1, 1, 1)$, для которого $\bar{q} = (0, 3, 0, 0)$; тогда находим

$$M_A(1) = \frac{3!}{1!1!1!} \frac{3!}{0!3!0!0!} = 6.$$

Проверка по замечанию 1: $M_A(0) + M_A(1) = 27 = 3^3$.

В результате получено: $P(U = 0) = 7/9$; $P(U = 1) = 2/9$ – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (5) находим условные распределения для с. в. μ_k:

$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 18/21 = 6/7$;
$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 3/21 = 1/7$;
$P(\mu_1 = 3/U = 1) = 6/6 = 1$.

Тогда число пустых ячеек μ_0 имеет по (6) распределение

$P(\mu_0 = 0) = 6/27 = 2/9$;
$P(\mu_0 = 1) = 18/27 = 6/9$;
$P(\mu_0 = 2) = 3/27 = 1/9$.

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 1.

2. Вероятностный анализ схемы B

Теорема 2. *Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при k, удовлетворяющего (1), выполняется соотношение*

$$P(U=k)=\frac{M_B(k)}{N_B} = \frac{1}{N_B}\sum_{i=l}^{L}\sum_{(\{\bar w\})}\frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!\prod_{a=1}^{n^*} q_a!}, \tag{7}$$

где число исходов N_B схемы B размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам, $M_B(k)$ – число исходов события ($U{=}k$), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по k частиц, а в остальных ячейках больше, чем по k, а последняя сумма производится по перечислению всех наборов $\{\bar w\}$ уровней заполнения ячеек $\bar w$ в порядке их возрастания при каждой фиксации числа i ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения k, а $\bar q = (q_1,\ldots,q_{n^*})$ – вторые маркировки уровней заполнения ячеек по всем положительным заполнениям $n^* \leqslant r$.

Доказательство. Число исходов N_B схемы B размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам N_B получено в [1]. Вероятность $P(U=k)$ для допустимых по (1) значений k будем искать в виде $M_B(k)/N_B$. Число исходов $M_B(k)$ определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

1) при заданном по (1) числе k по всем допустимым по (2) и (3) значениям i ячеек с минимальным уровнем заполнения k перечисляем все размеры превышения заданного уровня заполнения остальных $(n-i)$ ячеек по схеме деления остальных $(r-nk)$ частиц, считая их номера от 1 до $(r-nk)$, на $(n-i)$ непустых частей по [2] и проводя по ним перечисление всех разных упорядоченных по возрастанию наборов размеров этих превышений по всем $(n-i)$ ячейкам, в виде $\bar m = (m_1,\ldots,m_n)$, где первые i компонент $= 0$;

2) прибавляя ко всем компонентам каждого вектора из 1) $\bar m$ по k, получаем все наборы требуемых размеров уровней заполнения ячеек $\bar w = (w_1,\ldots,w_n)$, среди которых проводим вторые маркировки по всем положительным размерам заполнений $n^* \leqslant r$ вида $\bar q = (q_1,\ldots,q_{n^*})$;

3) по результату 2) по схеме из [3] находим число размещений r различимых частиц по n различимым ячейкам во всех заданных вектором $\bar w$ количествах при фиксированном значении i, обеспечивающих выполнение события $(U=k)$.

Тогда в связи с неразличимостью ячеек, учитывая делением на $\prod_{a=1}^{n^*} q_a!$ неразличимость перестановок составов ячеек, совпадающих по уровням $\geqslant 1$ заполнения ячеек, получаем число исходов схемы

$$M_B(k)=\sum_{i=l}^{L}\sum_{(\{\bar w\})}\frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!\prod_{a=1}^{n^*} q_a!},$$

где первая сумма производится по значениям i, а вторая – по перечислению всех наборов $\{\bar w\}$ при каждом значении i с их заданным минимальным уровнем заполнения k, которое следует из перечисления исходов указанной схемы из [2] в связи с перебором наборов размеров превышений уровня заполнения ячеек, описанным в п. 1) перечисления благоприятных исходов события $(U=k)$ (значение k меняется по (1)).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в. μ_k при заданном значении k с. в. U, т. е.

$$P(\mu_k = i/U=k) = (1/M_B(k))\sum_{(\{\bar w^*\})}\frac{r!}{\prod_{j=1}^{n} w_j!\prod_{a=1}^{n^*} q_a!}, \tag{8}$$

где сумма производится по перечислению всех наборов $\{\bar w^*\} = \{\bar w\} : \sum_{j=1}^{n} I(w_j-k) = n-i$ при $I(Z)=0$, когда $Z=0$, и $I(Z)=1$, когда $Z>0$.

Тогда вероятностное распределение с. в. μ_0 снова находится по (6). □

Замечание 2. Очевидно, что $\sum_k M_B(k)$ – число исходов схемы B.

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

Пример 2. Пусть $n=3$, $r=4$. Общее число исходов схемы N_B по [1] равно 14 и можно проверить по графу перечисления (см. рис. 2); $k=\overline{0,[4/3]}=\overline{0,1}$; по (2) и (3) при $k=0$ $i=\overline{l,L}$, где $l=max(1,3-4)=1$, $L=2$, а при $k=1$ $i=\overline{l,L}$, где $l=max(1,6-4)=2$, $L=2$.

Для $k=0$, $i=1$ получаем все $\bar w$ – это $\bar w=(0,1,3)$ с $\bar q=(1,1)$ и $\bar w=(0,2,2)$ с $\bar q=(2)$.

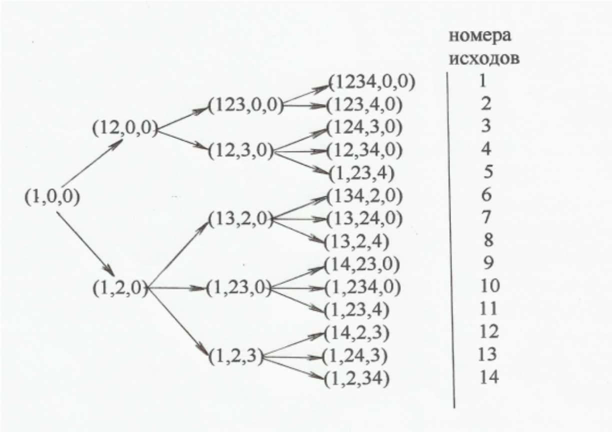

Рис. 2. Граф перечисления всех исходов схемы B в примере 2
Fig. 2. Enumeration graph of all outcomes of the scheme B in example 2

Для $k = 0$, $i = 2$ получаем все $\bar{w}$ – это $\bar{w} = (0, 0, 4)$ с $\bar{q} = (1)$. Отсюда по (7) находим

$$P(U = 0) = (1/14)\left(\frac{4!}{0!1!3!1!1!} + \frac{4!}{0!2!2!2!} + \frac{4!}{0!0!4!1!}\right) = (1/14)(4{+}3{+}1) = 8/14 = 4/7 \quad (M_B(0){=}8).$$

Для $k = 1$, $i = 2$ получаем все $\bar{w}$ – это $\bar{w} = (1, 1, 2)$ с $\bar{q} = (2, 1)$. Отсюда по (7) находим

$$P(U = 1) = (1/14)\frac{4!}{1!1!2!2!1!} = 6/14 = 3/7 \quad (M_B(1) = 6).$$

По замечанию 2 число исходов схемы есть $M_B(0) + M_B(1) = 14$.

В результате получено: $P(U = 0) = 4/7$; $P(U = 1) = 3/7$ – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (8) находим условные распределения для с. в. μ_k:

$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 7/8$;

$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 1/8$;

$P(\mu_1 = 1/U = 1) = 0/6 = 0$;

$P(\mu_1 = 2/U = 1) = 6/6 = 1$;

$P(\mu_1 = 3/U = 1) = 0/6 = 0$.

Тогда число пустых ячеек μ_0 имеет по (6) распределение

$P(\mu_0 = 0) = 6/14$;

$P(\mu_0 = 1) = 7/14$;

$P(\mu_0 = 2) = 1/14$.

Вероятностный анализ схемы C

Подобная схема исследовалась в [5].

Теорема 3. *Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при k, удовлетворяющего (1), выполняется соотношение*

$$P(U = k) = \frac{M_C(k)}{C^r_{n+r-1}}$$

при $r = nk$ и

$$P(U = k) = \frac{M_C(k)}{C^r_{n+r-1}} = \frac{1}{C^r_{n+r-1}} \sum_{i=l}^{L} C^i_n C^{n-i-1}_{r-nk-1} \tag{9}$$

при $r > nk$, где $M_C(k)$ – число исходов события $(U = k)$, т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по k частиц, а в остальных ячейках больше, чем по k частиц.

Доказательство. Число исходов N_C схемы C размещения неразличимых частиц по различимым ячейкам известно: $N_C = C^r_{n+r-1}$. Вероятность $P(U = k)$ для допустимых по (1) значений k будем искать в виде $M_C(k)/C^r_{n+r-1}$, где число $M_C(k)$ определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

1) перечисляем все допустимые по (2) и (3) фиксации i ячеек, содержащих ровно по k частиц числом способов C^i_n;
2) для каждой фиксации 1) перечисляем все размещения остальных $(r-nk)$ частиц по остальным $(n - i)$ ячейкам по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек числом способов C^{n-i-1}_{r-nk-1}. Они и определяют все возможные благоприятные событию $(U = k)$ исходы при данной фиксации ровно i ячеек с минимальным уровнем заполнения k.

Тогда $M_C(k) = 1$ при $r = nk$ и

$$M_C(k) = \sum_{i=l}^{L} C^i_n C^{n-i-1}_{r-nk-1}$$

при $r > nk$, что и приводит к формуле (9).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в. μ_k при заданном значении k с. в. U, т. е. $P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_C(k))$ при $r = nk$ и

$$P(\mu_k{=}i/U{=}k) = (1/M_C(k))C^i_n C^{n-i-1}_{r-nk-1} \tag{10}$$

при $r > nk$. Тогда вероятностное распределение с. в. μ_0 снова находится по (6). □

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

Пример 3. Пусть $n = 3$, $r = 4$. Общее число исходов схемы $N_A = C_6^4 = 15$; $k = \overline{0, [4/3]} = \overline{0,1}$; по (2) и (3) при $k = 0 \quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 3-4) = 1$, $L = 2$, а при $k = 1 \quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 6-4) = 2$, $L = 2$.

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 3, где исходы будем задавать в виде перечня уровней заполнения ячеек в порядке их нумерации.

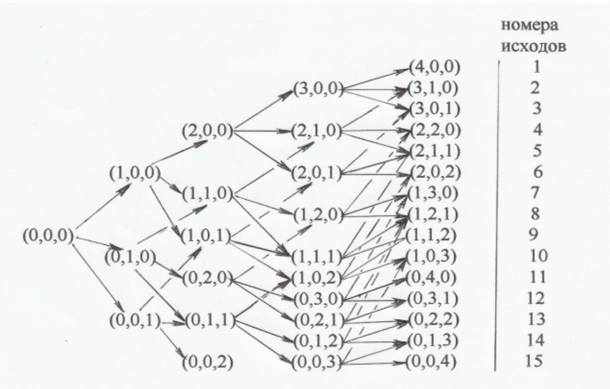

Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы C в примере 3
Fig. 3. Enumeration graph of outcomes of the scheme C in example 3

По формуле (9) при $k = 0$ получаем

$$P(U = 0) = (1/15)(C_3^1 C_3^1 + C_3^2 C_3^0)$$
$$= (9 + 3)/15 = 12/15 = 4/5 \quad (M_C(0) = 12),$$

а при $k = 1$

$$P(U = 1) = (1/15) C_3^2 C_0^0 = 3/15 = 1/5$$
$$(M_C(1) = 3).$$

В результате получено: $P(U = 0) = 4/5$; $P(U = 1) = 1/5$ – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (10) находим условные распределения для с. в. μ_k:

$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 9/12 = 3/4$;
$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 3/12 = 1/4$;
$P(\mu_1 = 2/U = 1) = 3/3 = 1$.

Тогда число пустых ячеек μ_0 имеет по (6) распределение

$P(\mu_0 = 0) = 3/15 = 1/5$;
$P(\mu_0 = 1) = 9/15 = 3/5$;
$P(\mu_0 = 2) = 3/15 = 1/5$.

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 3.

Вероятностный анализ схемы D

Теорема 4. *Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при k, удовлетворяющего (1), выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \frac{M_D(k)}{N^*(r, n)} \\ &= \frac{1}{N^*(r, n)} \sum_{i=l}^{L} N(r - nk, n - i), \end{aligned} \tag{11}$$

где $N^*(r, n)$ – число исходов схемы D размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам, а число исходов в той же схеме без пустых ячеек обозначено через $N(r, n)$, $M_D(k)$ – число исходов события $(U = k)$, т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по k частиц, а в остальных ячейках больше, чем по k частиц.

Доказательство. В [4] получены число исходов схемы D размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам $N^*(r, n)$ и число исходов в той же схеме без пустых ячеек $N(r, n)$ (в обозначениях [4]). Вероятность $P(U = k)$ для допустимых по (1) значений k будем искать в виде $M_D(k)/N^*(r, n)$, где $M_D(k)$ – число благоприятных исходов события $(U = k)$, т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по k частиц, а в остальных ячейках больше, чем по k частиц. Число $M_D(k)$ определяется по процедуре их перечисления: при заданном по (1) числе k при всех допустимых по (2) и (3) значениях $i \in [l, L]$, считая, что во всех n ячейках уже находится по k частиц, размещаем $(r - nk)$ остальных частиц по любым $(n - i)$ ячейкам без пустых известным из [4] числом $N(r-nk, n-i)$ (в принятых там обозначениях) способами, определяющими при каждом значении i благоприятное число исходов события $U = k$.

Тогда

$$M_D(k) = \sum_{i=l}^{L} N(r - nk, n - i),$$

что и приводит к формуле (11).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в. μ_k при заданном значении k с. в. U, т. е.

$$P(\mu_k{=}i/U{=}k){=}(1/M_D(k))N(r{-}nk, n{-}i). \tag{12}$$

Тогда вероятностное распределение с. в. t_0 снова находится по (6). $\square$

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

Пример 4. Пусть $n = 3$, $r = 4$. Общее число исходов схемы по [4] $N^*(r, n) = 4$, $k = \overline{0, [4/3]} = \overline{0, 1}$; по (2) и (3) при $k = 0$ $\quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 3 - 4) = 1$, $L = 2$, а при $k = 1$ $\quad i = \overline{l, L}$, где $l = max(1, 6 - 4) = 2$, $L = 2$.

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 4, где исходы будем задавать в виде перечня в возрастающем порядке уровней заполнения ячеек.

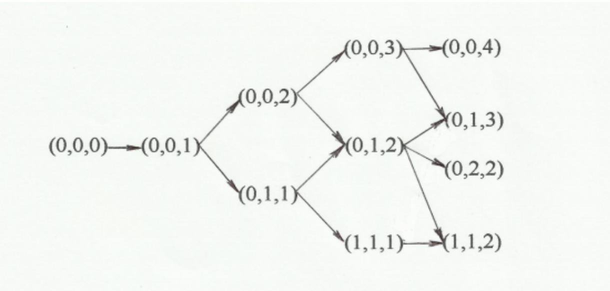

Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы D в примере 4
Fig. 4. Enumeration graph of outcomes of the scheme D in example 4

Очевидно, при $k = 0$, $i = 1$ по уровням заполнения ячеек получаем два исхода: (0,1,3) и (0,2,2), а при $k = 0$, $i = 2$ один исход: (0,0,4), откуда по (11) при $k = 0$ получаем

$$P(U = 0) = (1/4)(2 + 1) = 3/4 \quad (M_D(0) = 3),$$

а при $k = 1$, $i = 2$ получаем один исход: (1,1,2), откуда по (11) получаем

$$P(U = 1) = 1/4 \quad (M_D(1) = 1).$$

В результате получено: $P(U = 0) = 3/4$; $P(U = 1) = 1/4$ – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (12) находим условные распределения для с. в. μ_k:

$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 2/3$;
$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 1/3$;
$P(\mu_1 = 2/U = 1) = 1$.

Тогда число пустых ячеек μ_0 имеет по (6) распределение

$P(\mu_0 = 0) = 1/4$;
$P(\mu_0 = 1) = 1/2$;
$P(\mu_0 = 2) = 1/4$.

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 4.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторное представление схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 1. С. 86–93. doi: 10.4213/dm1410

2. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ подстановок с фиксированным числом циклов // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 110–119. doi: 10.17076/mat1171

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы деления совокупности различимых элементов на части заданных размеров без учета их порядка // Труды КарНЦ РАН. 2019. № 7. С. 63–69. doi: 10.17076/mat972

4. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В.* Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

5. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы домино и случай фиксированной минимальной цифры на фишке домино // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 86–93. doi: 10.17076/mat562

Поступила в редакцию 09.12.2020

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornoe predstavlenie skhemy razmeshchenia razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representation of the scheme of distiguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410

2. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz podstanovok s fiksirovannym chislom tsiklov [Combinatorial analysis of the permutations with a fixed number of cycles]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 110–119. doi: 10.17076/mat1171

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy deleniya sovokupnosti razlichimykh elementov na chasti zadannykh razmerov bez ucheta ikh poryadka [Combinatorial analysis of the scheme of division of a population of distinguishable elements into parts of given sizes irrespective of their order]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2019. No. 7. P. 63–69. doi: 10.17076/mat972

4. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analisis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.

5. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy domino i sluchai fiksirovannoi minimal'noi tsifry na fishke domino [Combinatorial analysis of the scheme of domino and case of fixed minimal figure on board of domino]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 86–93. doi: 10.17076/mat562

Received December 09, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Московский институт
электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345