Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 85–90
DOI: 10.17076/mat1345

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА СЕРИЙ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Изучается схема перестановок размера n с r подряд идущими сериями возрастающих элементов. Решаются задачи нахождения количества исходов схемы, строится процедура их перечисления с использованием r последовательных схем сочетаний набора разных составов серий растущих номеров элементов перестановок, решается задача нумерации для исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Ключевые слова: схема перестановок; схема сочетаний; серия растущих номеров элементов.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME FOR A CERTAIN TYPE OF SERIES

The article deals with a permutation scheme of size n with r successive series of increasing elements. I solve the problems of finding the number of outcomes of the scheme, and design the procedure for their enumeration using r successive schemes of combinations of an array of different compositions of series of increasing serial numbers of permutation elements. The numbering problem for outcomes of the scheme is solved, and their simulation is discussed.

Keywords: permutation scheme; combination scheme; series of increasing serial numbers of elements.

Введение

Рассматривается схема перестановок со всеми r подряд идущими с ее начала заданных размеров сериями элементов, где *сериями* будем называть последовательности заданных размеров > 1 возрастающих элементов перестановки. Последовательность убывающих элементов в конце перестановки будем называть ее *хвостом* (элементы хвоста не могут располагаться по-другому, т. к. иначе там возникнут серии).

Пространство элементарных исходов схемы состоит из части равновероятных исходов схемы перестановок (см. [4]), удовлетворяющих заданным последовательным размерам и расположению серий, а каждый исход нашей схемы является исходом схемы перестановок, поэтому вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов схемы перестановок определяется отношением соответствующих численностей их исходов.

Решаются задачи нахождения количества исходов схемы, строится процедура их перечисления с использованием последовательных зависимых схем сочетаний набора разных составов серий с определенными ограничениями, диктуемыми возможностью существования схемы, решается задача нумерации для исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Введем необходимые начальные определения и обозначения данных параметров схемы: для краткости номера элементов перестановки будем иногда называть элементами; n – размер изучаемой перестановки; r – число серий возрастающих ее элементов, $n \geqslant 2r$; $l = \overline{1,r}$; k_l – длина l-й серии, $k_l > 1$, $\sum_{l=1}^{r} k_l \leqslant n$; M_l – максимальное значение элемента в l-й серии; S_l – последовательность элементов с 1-й по l-ю серию.

Серия называется *промежуточной*, если $1 \leqslant l < r$; при $l = r$ – *завершающей*, если хвоста нет, в противном случае – *незавершающей*, при $l = 1$ – *первой*, а при $l = r$ – *последней*.

В основе анализа схемы лежит прямое перечисление ее исходов, использующее соответствующие результаты схем сочетаний [3] и обобщенных схем последовательных действий [1] (действиями здесь являются последовательные зависимые наборы серий, начиная с первой) с учетом специфики – ограничений рассматриваемой схемы, которые здесь приведем в виде очевидных утверждений, и это будет служить аргументацией дальнейших комбинаторных рассуждений и выводов:

1) длина серии > 1;

2) при $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ перестановка состоит только из r серий заданных размеров;

3) при $\sum_{i=1}^{r} k_i < n$ перестановка состоит из r серий заданных размеров, идущих подряд, после которых стоят остальные элементы в убывающем порядке – хвост перестановки;

4) хвост не может содержать элемент n, т. к. в противном случае он (как убывающая последовательность) должен начинаться с n, а тогда (как максимальный элемент) он должен войти в последнюю серию, поэтому хвост должен начинаться со своего наибольшего элемента, меньшего последнего в последней серии (в частности, при $r = 1$ для первой-последней серии заданной длины $k_1 < n$ она должна заканчиваться числом n, а в случае $k_1 = n$ такая перестановка одна: $(1, 2, \ldots, n)$);

5) i-я промежуточная серия а) не может содержать со своими предшествующими сериями, составляющими вместе множество элементов S_i, все элементы от 1 до M_i (т. е. $\{1, 2, \ldots, M_i\} \notin S_i$ или $\sum_{j=1}^{i} k_j < M_i$), т. к. иначе для следующей серии не найдется первый элемент $< M_i$; б) она не может состоять только из элементов $> M_{i-1}$, т. к. иначе для нее не найдется первый элемент $< M_{i-1}$;

6) последняя серия содержит максимальный элемент из не вошедших к ее набору в предыдущие серии, т. к. если она завершающая, то это очевидно из того, что в нее входят все остальные элементы, а если она незавершающая, то хвост перестановки, как убывающая последовательность, должен с него начинаться, но это невозможно, т. к. тогда этот элемент должен относиться к последней серии;

7) для последней завершающей серии заданной длины k_r при $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ выполняется условие $\{1, 2, \ldots, M_r\} \in S_r$, тогда такая серия – единственная и имеет вид последовательности всех ее не вошедших в предыдущие серии возрастающих элементов;

8) для последней незавершающей серии заданной длины k_r при $\sum_{i=1}^{r} k_i < n$, составляющих вместе множество элементов S_r, все элементы – от 1 до M_r, т. е. $\{1, 2, \ldots, M_r\} \notin S_r$ или $\sum_{i=1}^{r} k_i < M_r$), т. к. иначе для хвоста не найдется первый элемент $< M_r$.

Перечисление исходов схемы с вычислением их числа будем производить последовательным набором составов серий заданных размеров в заданном порядке по схемам сочетаний с ограничениями, обеспечивающими существование исходов схемы, обсужденными выше, с однозначным добавлением хвоста перестановки. По [1] для анализа схемы по предлагаемым направлениям достаточно определить пошаговые пучковые структуры графа перечисления исходов схемы по мере совершения последовательных действий – наборов серий. Поэтому в общем случае будем находить в качестве размеров пучков на каждом i-м шаге числа вариантов наборов i-х серий в зависимости от уже имеющихся предыдущих серий.

Введем обозначения: T_i и T_i^* – схемы перечисления составов серий после i-й итерации, если она последняя или промежуточная соответственно; N_i – число исходов в i-й итерации, $\{N^{(i)}\} = (N_1^{(i)}, \ldots, N_{N_{i-1}}^{(i)})$ – пучковая структура i-й итерации. Считаем $N_0 = 1$, откуда $N^{(1)} = (N_1^{(1)})$, а $N_i = \sum_{j=1}^{N_{i-1}} N_j^{(i)}$.

Для наглядности анализа и ссылок на соответствующие общие вышеприведенные закономерности изучим подробно случаи $r = 1$, $r = 2$, $r > 2$, где различие размеров пучков внутри итерации проявляется при $r > 1$.

1. Анализ схемы при $r = 1$

1.1. Перечисление исходов схемы и вычисление их числа

При $k_1 = n$ одна перестановка $1, 2, \ldots, n$ является исходом нашей схемы.

При $k_1 < n$ исход схемы состоит из двух наборов элементов подряд: возрастающих элементов первой серии и убывающих – хвоста перестановки.

По 4) и 7) из введения при $k_1 < n$ серия содержит элемент n, а остальные ее элементы набираются всеми равновероятными способами (см. [3]) по схеме сочетаний (схема T_1) с числом вариантов $N_1 = C_{n-1}^{k_1-1}$, к каждому из которых однозначно дописывается элемент n и хвост перестановки из остальных элементов в убывающем порядке. Число исходов схемы $N = N_1 = C_{n-1}^{k_1-1}$, т. к. первая серия однозначно определяет исход схемы.

1.2. Задача нумерации (ЗН)

Прямая ЗН. Пусть дан номер исхода схемы N^* и $k_1 < n$. Требуется найти его вид R^*.

Шаги решения:

1) по решенной в [3] ЗН по $N^* = N_1^*$ – номеру исхода схемы сочетаний получаем из элементов без n вид R_1^* исхода схемы T_1;

2) добавляя к результату 1) сначала элемент n, а потом все остальные элементы, не вошедшие в исход схемы T_1, в убывающем порядке, получаем искомый вид исхода R^*.

Обратная ЗН. Пусть дан вид исхода схемы R^*. Требуется найти его номер N^*.

Шаги решения:

1) первые k_1 чисел из R^* с исключением элемента n дают нам вид R_1^* исхода схемы сочетаний T_1 из элементов $1, 2, 3, \ldots, n$–1;

2) по решенной ЗН в [3] для схемы сочетаний из результата 1) получаем его номер, который совпадает с искомым номером исхода схемы N^* в силу однозначно определенного исходом схемы T_1 видом хвоста.

Покажем решение ЗН на примере.

Пример 1. Пусть $n = 5$, $k_1 = 4$. Приведем по [3] граф полного перечисления исходов схемы для визуальной проверки алгоритмического решения ЗН. Число исходов схемы по п. 1.1 $N = C_4^3 = 4$.

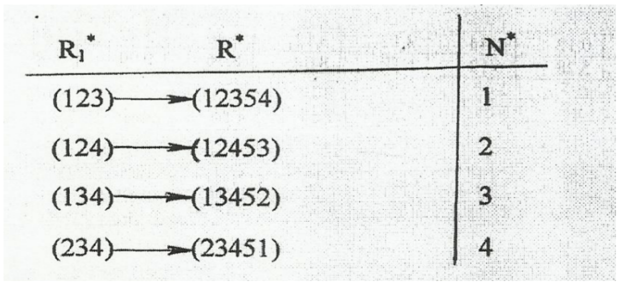

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы в примере 1
Fig. 1. Enumeration graph of outcomes of the scheme in example 1

Прямая ЗН. Пусть $N^* = 4$, найти его вид R^*.

Шаги решения:

1) $N^* = 4 \Rightarrow R_1^* = (2, 3, 4)$;

2) $R^* = (2, 3, 4, 5, 1)$,

что совпадает с результатом по рис. 1.

Обратная ЗН. Пусть $R^* = (2, 3, 4, 5, 1)$, найти его номер N^*.

Шаги решения:

1) $R_1^* = (2, 3, 4)$;

2) $R_1^* \Rightarrow N^* = 4$,

что совпадает с результатом по рис. 1.

2. Анализ схемы при $r = 2$. Перечисление исходов схемы и вычисление их числа

Исход схемы состоит из наборов подряд идущих возрастающих элементов первой, второй серий и убывающих – хвоста перестановки, если он есть, причем последний однозначно определяется первыми двумя сериями.

Первая серия размера k_1 по 5) из введения набирается всеми способами по схеме сочетаний с запретом одной – подряд идущих начальных номеров элементов числом способов $N_1 = C_n^{k_1} - 1$ (схема T_1^*); вторая серия размера k_2, если хвоста нет, однозначно определяется первой и число исходов $N = N_1 = N_2$ или, если хвост есть, должна (по 6) из введения) заканчиваться максимальным из оставшихся элементов после набора первой серии, среди которых выбираются ее остальные элементы по схеме T_2 сочетаний с исходами (T_2), начинающимися каждый с одного из оставшихся к ее набору элементов $< M_1$ всеми способами, т. е. из элементов множества $\{\bar{d}\} = \{1, 2, \ldots, M_1\} - S_1$ мощности d числом способов

$$N_2 = \sum_{(T_1^*)} \sum_{m=1}^{d} C_{n-k_1-1-m}^{k_2-2} \qquad (1)$$

по операции суммы по перечислению исходов схемы T_1^* с вариациями возрастающих значений из множества $\{\bar{d}\}$ первых фиксированных элементов второй серии в количестве d. Тогда число исходов схемы $N = N_2$, т. к. хвост перестановки однозначно определяется составами серий.

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы задается на первой итерации размером единственного пучка (N_1), а второй – значениями слагаемых внутренней суммы (1), соответствующими всем разным фиксациям по внешней сумме составов первой серии.

Результат решения задачи нумерации в схеме при известной пучковой структуре графа перечисления ее исходов приведен в [1].

Дадим числовой пример перечисления и расчета числа исходов схемы и пучковой структуры ее графа перечисления исходов.

Пример 2. Пусть $n = 7$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

Вычислим значения $N_1 = C_7^2 - 1 = 20$ и $N_2 = N$.

Приведем по [3] для визуальной проверки расчетов (и в силу большого размера) начальный фрагмент графа перечисления всех исходов схемы для первых двух составов первой серии: (13) и (14) исходов перестановки.

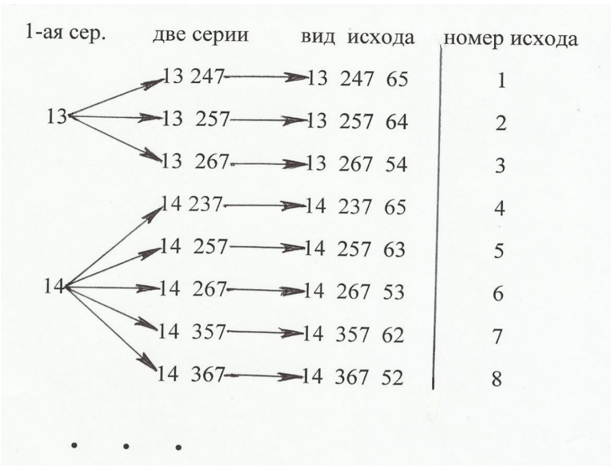

Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов к примеру 2
Fig. 2. A fragment of the enumeration graph of outcomes for example 2

При первой серии (13) получаем $\{\bar{d}\} = (2)$, откуда $d = 1$; при второй серии (14) получаем $\{\bar{d}\} = (2, 3)$, откуда $d = 2$. Найдем численности исходов второй итерации $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$ по данному фрагменту при приведенных фиксациях состава первой серии, представляющие размеры пучков его второй итерации и составляющие в сумме число исходов всего фрагмента N_2.

Из (1) находим $N_1^{(1)} = C_{7-2-1-1}^{3-2} = 3$; $N_2^{(1)} = C_{7-2-1-1}^{3-2} + C_{7-2-1-2}^{3-2} = 5$, отсюда $N = 3 + 5 = 8$. А пучковая структура графа при начальной пучковой структуре фрагмента (2) состоит для первой итерации из (3,5), а для второй – (1,1,1,1,1,1,1,1).

3. Анализ схемы при $r > 2$

3.1. Перечисление исходов схемы и вычисление их числа

Исход схемы состоит из r наборов размерами $(k_1, \ldots, k_r)$ возрастающих номеров элементов каждой из подряд идущих r серий и убывающих элементов хвоста перестановки при $\sum_{i=1}^{r} k_i \leqslant n$ или его отсутствии при $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Из комбинаторного разбора схемы во введении следует логика перечисления исходов схемы как исходов обобщенной схемы последовательных действий – итераций (см. [1]) наборов серий с добавлением хвоста перестановки и определения числа вариантов всех исходов нашей схемы как суммы размеров пучков предпоследней итерации в графе перечисления ее исходов.

Здесь все серии являются промежуточными, кроме r-й.

Первая серия размера k_1 набирается из n элементов всеми способами по схеме сочетаний T_1^* с запретом (по 5) из введения) одной – подряд идущих начальных элементов – числом способов:

$$N_1 = C_n^{k_1} - 1;$$

i-е серии при $i = \overline{2, r-1}$ набираются из оставшихся элементов для каждой по перечислению всеми вариантами составов предыдущих серий по схеме T_{i-1}^* варьированием минимального элемента в каждой по их возрастанию из множества $\{\bar{d}\}$, введенного в п. 2 с заменой здесь S_1 на S_{i-1} числом способов:

$$N_i = \sum_{(T_{i-1}^*)} \sum_{m=1}^{d} \left(C_{n-\sum_{j=1}^{i-1} k_j - m}^{k_i - 1} - I(A^*) \right) \qquad (2)$$

по операции суммы по перечислению исходов схемы T_{i-1}^* с вариациями возрастающих значений из множества $\{\bar{d}\}$ первых фиксированных элементов $(i-1)$-й серии в количестве d, и где событие $A = (\sum_{j=1}^{i} k_j = M_i)$, $I(A^*) = 1$ при $A^* = A$; $I(\overline{A^*}) = 0$ при $A^* = \bar{A}$, обеспечивающее выполнение свойства 5) из введения для промежуточной серии.

Последняя r-я серия набирается числом вариантов, рассчитываемых аналогично промежуточной по (2), с заменой i на r, – суммирования во внешней сумме (2) по перечислению по схеме T^*_{r-1} и – слагаемого во внутренней сумме (2) на

$$C^{k_r-2}_{n-\sum_{j=1}^{r-1} k_j-m-1},$$

т. к. при наборе состава последней серии он должен включать максимальный из оставшихся к ее набору элемент. В результате получаем для числа N_r вариантов ее набора следующие формулы: $N_r = N_{r-1}$, если хвоста нет, или, если он есть,

$$N_r = \sum_{(T^*_{i-1})} \sum_{m=1}^{d} \left(C^{k_i-2}_{n-\sum_{j=1}^{r-1} k_j-m-1} - I(A^*) \right) \quad (3)$$

с числом исходов схемы $N = N_r$, т. к. хвост перестановки однозначно определяется составами r серий, или $N = N_r = N_{r-1}$, если хвоста нет.

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы задается на начальной итерации размером единственного пучка (N_1), а остальных – значениями слагаемых внутренней суммы (2) для промежуточных итераций или (3) – для последней итерации, соответствующих всем разным фиксациям по внешней сумме составов серий.

Приведем числовой пример перечисления и расчета числа исходов схемы и пучковой структуры ее графа перечисления исходов по одной первой серии.

Пример 3. Пусть $n = 7$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$ и пусть первая серия есть (1,5). Тогда допустимые наборы второй серии легко визуально перечисляются: (2,3,6), (2,3,7), (2,4,6), (2,4,7), (2,6,7), (3,4,6), (3,4,7), (3,6,7), (4,6,7). Число исходов $N_3 = N_2$, т. к. последняя завершающая серия однозначно определяется первыми двумя при данных примера $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Таким образом, из первой серии (1,5) имеем следующие 9 исходов нашей схемы перестановок: (15 236 47), (15 237 46), (15 246 37), (15 247 36), (15 267 34), (15 346 27), (15 347 26), (15 367 24), (15 467 23), где серии разделены промежутками и перечисляются без запятых.

Вычислим теперь число исходов фрагмента схемы $N = N_2$ с заданной первой серией (15) по формуле (3):

$$\begin{aligned}(C^{3-1}_{7-2-1} - 1) + (C^{3-1}_{7-2-2} - 0) + (C^{3-1}_{7-2-3} - 0) \\ = (C^2_4 - 1) + C^2_3 + C^2_2 = 9, \qquad (4)\end{aligned}$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Пучковая структура фрагмента графа по итерациям при начальной структуре (1) на первой итерации – (5,3,1), а на второй – (1,1,1,1,1,1,1,1,1).

3.2. Задача нумерации (ЗН)

Исходы нашей схемы являются результатом реализации обобщенной схемы последовательных действий, для которой результаты решения ЗН приведены в [1] по известной из п. 3.1 пучковой структуре графа перечисления ее исходов, определяемой числами вариантов этих действий – наборов серий перестановок, и вычисляются по п. 3.1 алгоритмически. В частном случае п. 1 приведено решение ЗН в прямой и обратной постановках с численным примером.

3.3. Вероятность появления исходов схемы в схеме перестановок и вероятностное распределение исходов схемы

При равновероятном распределении исходов схемы перестановок вероятность p появления исходов нашей схемы среди ее исходов равна отношению численности исходов нашей схемы, определенной формулой (4), ко всем $n!$ исходам схемы перестановок, т. е. $p = N/n!$.

Допустимыми исходами схемы перестановок для нашей схемы являются перестановки с заданным числом r заданного вида серий, остальные – недопустимыми.

Для определения вероятностного распределения исходов нашей схемы (см. [2]) в графе перечисления исходов схемы перестановок для учета ограничений, связанных с заданным видом исходов нашей схемы, удаляем траектории, ведущие к недопустимым в ней итоговым исходам с пропорциональным пересчетом итерационных переходных вероятностей из всех промежуточных состояний процесса с иллюстрацией на нижеследующем численном примере.

Пример 4. Пусть $n = 4$, $r = 2$. В порядке перечисления всех исходов схемы перестановок по МГ (см. [4, 5]) перечислим исходы перестановок с данным числом серий $r = 2$, это исходы 2314, 2413, 3412, 1342, 1423. Тогда после удаления недопустимых исходов с $r \neq 2$ и пропорциональным пересчетом вероятностей итерационных переходов для оставшихся состояний получим граф перечисления исходов нашей схемы, по которому вычисляем вероятности итоговых исходов схемы: $P(2314) = P(2413) = (1/2)(1/2) = 1/4$, $P(3412) = P(1342) = P(1423) = (1/2)(1/3) = 1/6$.

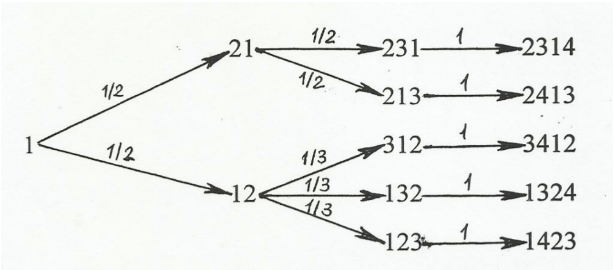

Рис. 3. Граф перечисления схемы при $r = 2$
Fig. 3. Enumeration graph of the scheme at $r = 2$

Проверка на распределение вероятностей: $2/4 + 3(1/6) = 1$.

3.4. Моделирование исходов схемы

Предлагается при найденном выше числе исходов схемы проводить моделирование ее исхода методом (см. [1]), состоящим в разыгрывании его случайного номера с полученным по п. 3.3 его вероятностным распределением, и далее находить вид исхода нашей схемы с этим номером по результату решения прямой ЗН по п. 3.2.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750

2. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

4. *Энатская Н. Ю., Колчин А. В.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

5. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 09.12.2020

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Analiz kombinatornykh skhem v doasimptoticheskoi oblasti izmeneniya parametrov [Analysis combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameters]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 117–133. doi: 10.17076/mat750

2. *Enatskaya N. Yu.* Veroyatnostnye modeli kombinatornykh skhem [Probabilistic models of combinatorial schemes]. *Vestnik YuUrGU MMP* [Bull. South Ural St. Univ.] 2020. Vol. 13, no. 3. P. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

4. *Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of the permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.

5. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative cobinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, and Diagnostics]. 2016. No. 8. P. 15–21.

Received December 09, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345