Труды Карельского научного центра РАН
№ 6. 2021. С. 49–58
DOI: 10.17076/mat1295

УДК 519.857

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

А. А. Нестеренко, В. М. Хаметов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

В статье приведено решение задач об оптимальной остановке с конечным и с бесконечным горизонтом в ситуации, когда наблюдается случайное блуждание, а функция полезности наблюдателя – экспоненциальная. Для этих задач найдено: i) явное решение соответствующего уравнения Беллмана; ii) граница, отделяющая внутренность области остановки от области продолжения наблюдений; iii) оптимальное правило остановки.

Ключевые слова: момент остановки; правило остановки; случайное блуждание; экспоненциальная функция полезности; конечный горизонт; бесконечный горизонт.

A. A. Nesterenko, V. M. Khametov. OPTIMAL STOPPING OF RANDOM WALK WITH EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION

The article provides solutions for optimal stopping problems for finite and infinite horizons in the case of random walk with exponential utility function. For these problems we found: i) explicit solution of the corresponding Bellman equation; ii) solution of free boundary problem; iii) optimal stopping rule.

Keywords: optimal stopping; optimal stopping rule; random walk; exponential utility function; finite horizon; infinite horizon.

Введение

Статья посвящена одному из важных направлений теории оптимального стохастического управления – теории оптимальной остановки случайных последовательностей. Особенностью этой теории является то, что управление используется всего один раз для остановки наблюдаемой последовательности. Остановка осуществляется в момент времени, в который ожидаемое значение функции полезности наблюдателя максимально. Этот момент времени обычно называют оптимальным, а соответствующее значение ожидаемой полезности – ценой.

Теория оптимальных правил остановки имеет многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Приведем некоторые из них: 1) в статистике [1] – это процедуры последовательного анализа; 2) в экономике [7, 9] – построение расчета: i) американского опциона, ii) наискорейшего обнаружения разладки производственного процесса; 3) в радиосвязи и радиолокации – создание процедур обнаружения сигналов и т. д.

Приведем краткий обзор результатов, посвященных проблемам, затрагиваемым в статье. В [1], по-видимому, впервые сформулирована и решена задача последовательной проверки простых гипотез по наблюдениям за случайной последовательностью. В предположении, что рассматривается задача проверки двух простых гипотез, а наблюдается последовательность независимых случайных величин, выведено рекуррентное соотношение относительной апостериорной вероятности принятия одной из этих гипотез. Затем с применением вышеуказанного рекуррентного соотношения в работе при заданной функции риска выведено рекуррентное соотношение беллмановского типа относительно апостериорного риска. Решение этого соотношения и, следовательно, оптимальное правило остановки построены для некоторых частных случаев в предположении, что горизонт бесконечен. В [3, 4], с опорой на [1], приведено несколько примеров задач об оптимальной остановке, допускающих явное решение.

В монографиях [2, 5, 10] последовательно излагается общая теория оптимальных правил остановки для марковских случайных последовательностей как для конечного, так и для бесконечного горизонтов. В них установлены условия применимости принципа Беллмана для урезанной цены оптимальной остановки, что позволило вывести рекуррентное соотношение беллмановского типа для урезанной цены в случае конечного горизонта. Кроме того, был обоснован предельный переход (когда горизонт стремится к бесконечности) в рекуррентном соотношении, которому удовлетворяет урезанная цена оптимальной остановки. Последнее дало возможность вывести нелинейное уравнение, которому удовлетворяет цена оптимальной остановки для случая бесконечного горизонта. Эти утверждения позволили установить условия: i) существования областей остановки и продолжения наблюдений, ii) оптимальности момента остановки. В указанных работах содержатся также несколько точно решаемых примеров конкретных задач об оптимальной остановке: а) задача о секретаре/о разборчивой невесте для случая конечного горизонта, б) последовательная проверка простых гипотез, возникающих в финансовой математике, когда горизонт бесконечен.

В [7, 9] доказано, что задача расчета опционов американского типа на полном биномиальном рынке сводится к решению задачи об оптимальной остановке. В [9] для опциона call (put) и случая бесконечного горизонта построено оптимальное правило остановки. В [8, 9] изложен мартингальный подход к построению решения задачи об оптимальной остановке.

Анализ вышеуказанных работ показал, что для нахождения решения задачи об оптимальной остановке необходимо уметь: i) находить решение рекуррентного соотношения беллмановского типа относительно урезанной цены в случае конечного горизонта и нелинейного уравнения относительно цены в случае бесконечного горизонта, ii) строить границу, разделяющую область продолжения наблюдений от внутренности области остановки. Эти проблемы оказались труднорешаемыми, поскольку граница остановки описывается либо в терминах решений рекуррентных соотношений беллмановского типа относительно урезанной цены для конечного горизонта, либо в терминах решения нелинейного уравнения, которому удовлетворяет цена для бесконечного горизонта.

Помимо случаев, когда задача об оптимальной остановке допускает решения, приведенные в [1, 3, 9, 10], относительно недавно появились статьи, где установлены условия, при выполнении которых она имеет эффективное решение. Так, в [11] описано и обосновано, что в случаях бесконечного горизонта для случайного блуждания с функцией полезности, совпадающей с платежным обязательством типа call, оптимальное правило остановки состоит в нахождении точки максимума полинома Аппеля. Кроме того, в [12, 13] для американского опциона с конечным горизонтом по наблюдениям за геометрическим случайным блужданием, когда платежное обязательство монотонно и непрерывно, установлена единственность границы, отделяющей внутренность области остановки от области продолжения наблюдений.

В этой статье для ситуации, когда наблюдается случайное блуждание, а функция полезности наблюдателя – экспоненциальная, для случаев конечного и бесконечного горизонтов дается и обосновывается явный вид решения соответствующих задач об оптимальной остановке. Уточним, что имеется в виду. Для задачи с конечным горизонтом, постановка которой приведена в разделе 1, в разделе 2 предложена и обоснована методика, позволяющая явно предъявить решение рекуррентного соотношения для урезанной цены (теорема 1), которое, в свою очередь, позволило построить в явном виде границу, отделяющую внутреннюю область остановки от области продолжения наблюдений, т. е. свободную границу (теорема 2). Последнее позволило установить простые условия оптимальности момента остановки. Для случая бесконечного горизонта (раздел 3): i) выведено нелинейное уравнение, которому удовлетворяет цена, ii) установлен явный вид его решения (теорема 3). Этот результат позволил найти явный вид свободной границы, отделяющей внутренность области остановки от области продолжения наблюдений, которая состоит из одной точки (теорема 3), а также сформировать простые и легко проверяемые условия оптимальности момента остановки (теорема 3). Все доказательства вынесены в приложения.

1. Постановка задачи с конечным горизонтом

В этом разделе сформулирована задача об оптимальной остановке случайного блуждания, когда функция полезности наблюдателя – экспоненциальная, а горизонт конечен. Кроме того, здесь приведены известные результаты из теории оптимальных правил остановки в терминах рассматриваемой задачи.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана частичная последовательность случайных величин $\{X_n^{0,x}\}_{n\in N_0}$ (где $N_0 \triangleq \{0, ..., N\}$, горизонт $N < \infty$):

$$X_{n+1}^{0,x} = X_n^{0,x} + p_{n+1},\, X_n^{0,x}\big|_{n=0} = x, \qquad (1)$$

здесь $x \in R^1$ – любое, $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_p(x)$. Ясно, что частичная последовательность $\{X_n^{0,x}\}_{n\in N_0}$ является однородной марковской и описывает случайное блуждание на R^1. Зададим фильтрацию: $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{p_1, ..., p_n\}$, $n \in \{1, ..., N\}$, $\mathcal{F}_0$ – тривиальная σ-алгебра.

Положим, что для любого $n \in N_0$ значение полезности для наблюдателя определяется по формуле

$$f_n = \beta^n(1 - e^{-\delta X_n^{0,x}}), \qquad (2)$$

где $\beta \in (0, 1]$ – коэффициент дисконтирования, а $\delta \in (0, \infty)$ – коэффициент неприятия риска.

Пусть τ – момент остановки относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N_0}$, а T_n^N – множество моментов остановки τ таких, что $0 \leqslant n \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$ для любого $\omega \in \Omega$. Очевидно, что если $\tau \in T_0^N$, то имеет место равенство $f_\tau \triangleq f_n|_{n=\tau} = \sum\limits_{l=0}^{N} f_l I_{\{\tau=l\}}$, где $I_{\{\tau=l\}} \triangleq \begin{cases} 1, \tau = l, \\ 0, \tau \neq l. \end{cases}$

Предположим, что для любого $x \in R^1$ выполняется условие:

$$E \max_{n\in N_0} \beta^n \left(1 - e^{-\delta(x+\sum\limits_{i=1}^{n} p_i)}\right) < \infty. \qquad (3)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу об оптимальной остановке, рассматриваемую в статье

$$E\beta^\tau \left(1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}}\right) \to \sup_{\tau\in T_0^N}. \qquad (4)$$

Через $v_0^N(x)$ обозначим величину

$$v_0^N(x) \triangleq \sup_{\tau\in T_0^N} E\beta^\tau \left(1 - e^{-\delta(x+\sum\limits_{i=1}^{\tau} p_i)}\right),$$

которую называют ценой оптимальной остановки. Момент остановки τ^0 такой, что

$$\begin{aligned} &\sup_{\tau\in T_0^N} E\beta^\tau \left(1 - e^{-\delta(x+\sum\limits_{i=1}^{\tau} p_i)}\right) \\ &\quad = E\beta^{\tau^0} \left(1 - e^{-\delta(x+\sum\limits_{i=1}^{\tau^0} p_i)}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

называют оптимальным моментом остановки. Наша задача состоит в нахождении цены $v_0^N(x)$ и построении оптимального правила остановки.

Пусть $v_n^N(x)$ – $\mathcal{F}_n$-измеримая случайная величина, определенная формулой

$$v_n^N(x) \triangleq \sup_{\tau\in T_n^N} E\left[\beta^\tau \left(1 - e^{-\delta X_\tau^{(n,x)}}\right)\right], \qquad (6)$$

где $X_\tau^{(n,x)} \triangleq x + \sum\limits_{i=n+1}^{\tau} p_i$, $n \in N_0$. Ее называют урезанной ценой в момент времени n. Поскольку $T_{n-1}^N \supseteq T_n^N$ $\left(T_n^{N+1} \supseteq T_n^N\right)$, то из (5) для любых $x \in R^1$ следует неравенство

$$v_{n-1}^N(x) \geqslant v_n^N(x) \quad \left(v_n^{N+1}(x) \geqslant v_n^N(x)\right). \qquad (7)$$

Из теории оптимальных правил остановки [6, 10] известно, что если выполнено условие (3), то для любого $x \in R^1$ урезанная цена удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} v_n^N(x) = \max\left\{\beta^n(1 - e^{-\delta x}), \beta E\left[v_{n+1}^N(x + p_1)\right]\right\}, \\ v_n^N(x)\big|_{n=N} = \beta^N(1 - e^{-\delta x}). \end{cases} \qquad (8)$$

Также известно [10], что

$$v_n^N(x) = \beta^n v_0^{N-n}(x). \qquad (9)$$

Пусть $k = N - n$ и $v^k(x) \triangleq v_0^k(x)|_{k=N-n}$. Тогда из (8) следует, что $v^k(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} v^k(x) = \max\left\{1 - e^{-\delta x}, \beta E\left[v^{k-1}(x + p_1)\right]\right\}, \\ v^k(x)\big|_{k=0} = 1 - e^{-\delta x}. \end{cases} \qquad (10)$$

Из (10) следует, что для любого $x \in R^1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} v^k(x) &\geqslant 1 - e^{-\delta x}, \\ v^k(x) &\geqslant \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того, из (7) и (9) следует, что для любого $x \in R^1$

$$v^{k+1}(x) \geqslant v^k(x), \tag{12}$$

т. е. последовательность монотонно не убывает. Отметим еще, что (10) позволяет для каждого $k \in N_0$ разбить пространство R^1 на две области:

$$\begin{aligned} i) \quad \Gamma_k &\triangleq \left\{x \in R^1 : v^k(x) = 1 - e^{-\delta x}\right\} \\ &= \left\{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} \geqslant \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

которую называют множеством остановки [10], и

$$\begin{aligned} ii) \quad C_k &\triangleq \left\{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} < \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]\right\} \\ &= \left\{x \in R^1 : v^k(x) = \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

которую называют множеством продолжения наблюдений [10]. Очевидно, что для любого $k \in N_0$

$$\Gamma_k \cap C_k = \varnothing, \tag{15}$$

$$\Gamma_k \cup C_k = R^1. \tag{16}$$

Из (10) и определения областей Γ_k и C_k следует, что для любых $(k, x) \in N_0 \times R^1$

$$v^k(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta x}, & x \in \Gamma_k, \\ \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right], & x \in C_k. \end{cases} \tag{17}$$

Из последнего равенства следует, что $v^k(x)$ допускает представление

$$\begin{aligned} v^k(x) &= (1 - e^{-\delta x}) I_{\Gamma_k}(x) \\ &\quad + \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right] I_{C_k}(x), \end{aligned} \tag{18}$$

где $I_B \triangleq \begin{cases} 1, x \in B, \\ 0, x \notin B \end{cases}$ – индикатор множества $B \subseteq R^1$. Заметим, что (18) с учетом (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v^k(x) &= (1 - e^{-\delta x}) \\ &\quad + \left(\beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right] - 1 + e^{-\delta x}\right) I_{C_k}(x). \end{aligned}$$

Кроме того, из (12) – (16) следует, что последовательности $\{\Gamma_k\}_{k \in N_0}$ и $\{C_k\}_{k \in N_0}$ монотонны, и имеют место включения

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq ... \subseteq \Gamma_k \subseteq ... \subseteq \Gamma_N = R^1, \tag{19}$$

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq ... \supseteq C_k \supseteq ... \supseteq C_N = \varnothing.$$

Для любого $k \in N_0$ область $\Gamma_k \subseteq R^1$ разобьем на две непересекающиеся подобласти:

i) $\partial\Gamma_k \triangleq \left\{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} = \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]\right\}$ – множество граничных точек области Γ_k,

ii) $\mathrm{int}\Gamma_k \triangleq \left\{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} > \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]\right\}$ – внутренность множества Γ_k. Очевидно, что $\Gamma_k = \partial\Gamma_k \cup \mathrm{int}\Gamma_k$.

Заметим, что $\partial\Gamma_k \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы один корень уравнения

$$1 - e^{-\delta x} = \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right], \tag{20}$$

который обозначим через $x(k) \in R^1$. Очевидно, что если точка $x(k) \in \partial\Gamma_k$, то она является граничной точкой области Γ_k, которая отделяет область C_k от множества $\mathrm{int}\Gamma_k$. Последовательность $\{x(k)\}_{k \in N_0}$ называют свободной границей [9, 10].

Таким образом, проблема построения решения задачи об оптимальной остановке (4) сводится: i) к нахождению решения рекуррентного соотношения (10), ii) к построению свободной границы.

2. Основные результаты для случая конечного горизонта

В этом разделе приведено решение задачи об оптимальной остановке случайного блуждания с дисконтированной экспоненциальной функцией полезности наблюдателя и конечным горизонтом, сформулированной в пункте 1. Здесь устанавливается: i) явный вид решения рекуррентного соотношения (10) (теорема 1), ii) условия существования оптимального правила остановки (теорема 2).

Пусть $\varphi(\delta) \triangleq E\left[e^{-\delta p_1}\right]$ — производящая функция моментов случайной величины p_1 [9, 10]. Предположим, что она удовлетворяет условию:

$$\forall \delta \in (0, \infty): \quad 0 < \varphi(\delta) < \infty. \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть наблюдается случайное блуждание, заданное соотношениями* (1), *а функция полезности имеет вид* (2), *причем выполнены условия* (3), (21). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Для любых $(k, x) \in N_0 \times R^1$ *и* $\delta \in (0, \infty)$ *рекуррентное соотношение* (10) *имеет единственное решение:*

$$\begin{aligned} v^k(x) &= 1 - e^{-\delta x} \\ &\quad + \max\left[\beta^k(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}) - 1 + e^{-\delta x}, 0\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

2) Для любых $k \in N_0$ и $\delta \in (0,\infty)$ области $\partial\Gamma_k$, $int\,\Gamma_k$ и C_k допускают представления соответственно:

$$\partial\Gamma_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} = \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}, \quad (23)$$

$$int\,\Gamma_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} > \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}, \quad (24)$$

$$C_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} < \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и для любого $\delta \in (0,\infty)$:*

1) $E|p_1|e^{-\delta p_1} < \infty$,

2) $E|p_1|^2 e^{-\delta p_1} < \infty$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Пусть $\beta = 1$, $|Ep_1| < \infty$, а $\delta \in (0,\infty)$. Тогда для любого $k \in N_0$ множество $\Gamma_k = \bar{R}^1 (\triangleq R^1 \cup \{\infty\})(x(k) = -\infty)$, а $\tau^0 = 0$.

2) Пусть $\beta \in (0,1)$, $|Ep_1| < \infty$, а $\{(\beta,\delta) \in (0,1)\times(0,\infty) : \beta\varphi(\delta) \geqslant 1\} \neq \varnothing$. Тогда для любого $k \in N_0$ $\Gamma_k = R^1$, а $\tau^0 = 0$.

3) Пусть $\beta \in (0,1)$, $|Ep_1| < \infty$, а $\{(\beta,\delta) \in (0,1)\times(0,\infty) : \beta\varphi(\delta) < 1\} \neq \varnothing$. Тогда:

i) частичная последовательность $\{x(k)\}_{k\in N_0}$, где

$$x(k) \triangleq \frac{1}{\delta}\ln\frac{1 - \beta^k\varphi^k(\delta)}{1 - \beta^k}, \quad (25)$$

монотонно не возрастает и описывает эволюцию свободной границы;

ii) для любого $k \in N_0$ область остановки имеет вид $\Gamma_k = \{x \in R^1 : x \geqslant x(k)\}$;

iii) оптимальное правило остановки τ^0 является пороговым и имеет вид

$$\tau^0 = \inf\left\{k \in N_0 : X_k^{0,x} \geqslant x(k)\right\} \wedge N. \quad (26)$$

Теорема 2 доказана в приложении 2.

3. Задача с бесконечным горизонтом

В этом разделе приведено решение задачи об оптимальной остановке в предположениях, что: i) наблюдается случайное блуждание, ii) наблюдатель руководствуется дисконтированной экспоненциальной функцией полезности, iii) горизонт бесконечен.

Пусть горизонт $N = \infty$. Наблюдается случайная последовательность $\{X_n^{0,x}, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, заданная соотношениями (1). Пусть T_0^∞ – множество конечных марковских моментов относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Предположим, что функция полезности наблюдателя имеет вид $\beta^\tau\left(1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}}\right)$. Наша задача состоит в следующем:

$$E\left[\beta^\tau\left(1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}}\right)\right] \to \sup_{\tau\in T_0^\infty}. \quad (27)$$

Обозначим

$$v(x) \triangleq \sup_{\tau\in T_0^\infty} E\left[\beta^\tau\left(1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}}\right)\right]. \quad (28)$$

Функцию $v(x)$, определенную в (28), называют ценой оптимальной остановки в задаче с бесконечным горизонтом. Момент остановки $\tau^0 \in T_0^\infty$ называют оптимальным, если $v(x) = E\left[\beta^{\tau^0}\left(1 - e^{-\delta X_{\tau^0}^{0,x}}\right)\right]$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого раздела.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем 1–2, $\beta \in (0,1)$ и*

$$E\sum_{n\geqslant 0}\beta^n\left(1 - e^{-\delta\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right) < \infty. \quad (29)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Цена оптимальной остановки $v(x)$ для любых $x \in R^1$ допускает представление

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} v^k(x), \quad (30)$$

где $\{v^k(x)\}_{k\geqslant 1}$ – последовательность, элементы которой – урезанные цены, удовлетворяющие (10) и допускающие представление (22). Кроме того, для любых $x \in R^1$ и $\delta \in (0,\infty)$ цена $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$v(x) = \max\left\{1 - e^{-\delta x}, \beta E v(x + p_1)\right\}. \quad (31)$$

2) Пусть $\delta_{1/\beta} > 0$ – корень уравнения $\varphi(t) = \frac{1}{\beta}$, а $\delta \in (0, \delta_{1/\beta})$ – любое. Тогда для любых $x \in R^1$ решение задачи (27) имеет вид

$$v(x) = 1 - e^{-\delta x} + \max\{A^* e^{-\delta_{1/\beta}x} - 1 + e^{-\delta x}, 0\}, \quad (32)$$

$$\tau^0 = \inf\left\{k \geqslant 0 : X_k^{(0,x)} \geqslant x_r\right\}, \quad (33)$$

где $(A^*, x_r) \in R^2$:

$$A^* = -\frac{\delta}{\delta_{1/\beta}}\left(\frac{\delta_{1/\beta} - \delta}{\delta}\right)^{\frac{\delta_{1/\beta}-\delta}{\delta}}, \quad (34)$$

$$x_r = \frac{1}{\delta}\ln\frac{\delta_{1/\beta} - \delta}{\delta}. \quad (35)$$

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении 3.

Заключение

В статье приведен новый пример построения решения задачи об оптимальной остановке случайного блуждания с экспоненциальной функцией полезности, содержательная часть которого состоит в том, что в этом случае удается найти явное решение рекуррентного соотношения беллмановского типа, которое соответствует вышеуказанной задаче как с конечным, так и с бесконечным горизонтом.

Приложение 1.

Доказательство теоремы 1 опирается на вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а семейство* $\{\tilde{v}^k(x)\}_{k\in N_0}$ *скалярных борелевских функций, определенных на* R^1, *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{cases} \tilde{v}^k(x) = \beta E\left[\tilde{v}^{k-1}(x+p_1)\right], \\ \tilde{v}^k(x)\big|_{k=0} = 1 - e^{-\delta x}. \end{cases} \tag{36}$$

Тогда для любых $(k,x) \in N_0 \times R^1$ *и* $\delta \in (0,\infty)$ *уравнение* (36) *имеет единственное решение:*

$$\tilde{v}^k(x) = \beta^k\left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right), \tag{37}$$

где $\varphi(\delta)$ *– производящая функция моментов случайной величины* p_1.

Доказательство. Проведем его по индукции. Очевидно, что при $k=0$ предположение индукции выполнено. Пусть теперь $k=1$. Тогда из (36) следует, что $\tilde{v}^1(x) = \beta E\left[1 - e^{-\delta(p_1+x)}\right] = \beta\left(1-\varphi(\delta)e^{-\delta x}\right)$. Пусть теперь

$$\tilde{v}^{k-1}(x) = \beta^{k-1}\left(1 - \varphi^{k-1}(\delta)e^{-\delta x}\right). \tag{38}$$

Установим, что $\tilde{v}^k(x)$ имеет вид (37). Действительно, подставляя (38) в (36), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{v}^k(x) &= \beta E\left[\tilde{v}^{k-1}(x+p_1)\right] \\ &= \beta^k E\left[1 - \varphi^{k-1}(\delta)Ee^{-\delta(x+p_1)}\right] \\ &= \beta^k\left(1 - \varphi^{k-1}(\delta)\ Ee^{-\delta p_1}e^{-\delta x}\right) \\ &= \beta^k\left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right). \end{aligned}$$

Основной шаг индукции обоснован, а с ним и утверждение леммы, поскольку единственность решения (36) очевидна. □

Доказательство теоремы 1. Доказательство пункта 1. Рассмотрим рекуррентное соотношение (10), решение которого допускает представление (18). К (10) применим метод индукции. Отсюда следует существование единственного решения (10).

Из (12) – (16) следует, что для любых $k \in N_0$ имеется три возможности: а) $C_k = \varnothing$ ($\Gamma_k = R^1$), б) $C_k = R^1$ ($\Gamma_k = \varnothing$), в) $C_k \neq \varnothing$ и $\Gamma_k \neq \varnothing$. Рассмотрим их.

Возможность 1. Из (17) следует, что для любых $k \in N_0$ величина $v^k(x) = 1 - e^{-\delta x}$. Поэтому из (18) следует, что для любого $l \in \{k, ..., N\}$ множество $\Gamma_l = R^1$. Стало быть, для любых $l \in \{k, ..., N\}$ и $x \in R^1$ функция $v^l(x) = 1 - e^{-\delta x}$.

Возможность 2. Из (14) следует, что $v^k(x) = \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]$. Из (19) получаем для любого $0 \leqslant m \leqslant k$ включение $C_m \subseteq C_k$. Поэтому из (13) следует, что $v^k(x)|_{m=0} = 1 - e^{-\delta x}$. А в силу леммы 1 $v^m(x)$ для любого $x \in C_m$ допускает представление

$$v^m(x) = \beta^m\left[1 - \varphi^m(\delta)e^{-\delta x}\right]. \tag{39}$$

Возможность 3. Из (13) и условия $C_k \neq \varnothing$ в силу (19) следует, что имеет место включение $C_0 \subseteq C_1 \subseteq ... \subseteq C_{k-1} \subseteq C_k \neq \varnothing$. Поэтому $C_{k-1} \neq \varnothing$ и из леммы 1 имеем для любого $x \in C_{k-1}$:

$$v^{k-1}(x) = \beta^{k-1}\left(1 - \varphi^{k-1}(\delta)e^{-\delta x}\right). \tag{40}$$

Поскольку $C_k \neq \varnothing$, то для любого $x \in C_k$ имеет место равенство $v^k(x) = \beta E\left[v^{k-1}(x+p_1)\right]$.

Значит, проведя выкладку, аналогичную (39), получим, что при $x \in C_k (\neq \varnothing)$

$$v^k(x) = \beta^k\left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right). \tag{41}$$

Стало быть, (13) с учетом (40) и (41) дает для любого $x \in R^1$ следующий вид урезанной цены $v^k(x)$:

$$\begin{aligned} v^k(x) &= 1 - e^{-\delta x} \\ &\quad + \left[\beta^k\left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}\right] I_{C_k}(x). \end{aligned} \tag{42}$$

Поскольку $C_k \neq \varnothing$, то из (42) для любого $x \in C_k$ следует соотношение

$$\begin{aligned} 0 &< v^k(x) - 1 + e^{-\delta x} \\ &= \beta^k\left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}. \end{aligned} \tag{43}$$

Следовательно, (42), с учетом (43), для любого $x \in R^1$ примет вид (22). Пункт 1) теоремы доказан полностью.

Доказательство пункта 2. Пусть $C_k \neq \varnothing$. Тогда из пункта 1 теоремы 1 и (42) следует, что для любого $x \in R^1$ имеет место равенство

$$v^k(x) - 1 + e^{-\delta x}$$
$$= \begin{cases} 0, & x \notin C_k, \\ \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}, & x \in C_k. \end{cases}$$

Отсюда, из (11) и определения C_k следует равенство

$$\begin{aligned} C_k &= \{x \in R^1 : v^k(x) - 1 + e^{-\delta x} > 0\} \\ &= \left\{x \in R^1 : \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x} > 0\right\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Определение $\Gamma_k (\triangleq R^1 / C_k)$ и (44) дают

$$\Gamma_k = \{x \in R^1 : \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right) \leqslant 1 - e^{-\delta x}\}. \tag{45}$$

Из (45) и определений $\partial\Gamma_k$ и $\mathrm{int}\Gamma_k$ следуют (23) и (24). $\square$

Приложение 2.

При доказательстве теоремы 2 нам потребуются следующие свойства производящей функции моментов $\varphi(\delta)$ случайной величины p_1.

Лемма 2. *Пусть для любого $\delta \in (0, \infty)$ выполнены условия:*

a) $0 < \varphi(\delta) < \infty$,

б) $0 < E\left[p_1^2 e^{-\delta p_1}\right] < \infty$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) $\varphi(0) = 1$.

2) Существуют и конечны первая и вторая правые производные $\varphi(\delta)$ в точке 0, причем: i) $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} = -Ep_1$, ii) $\frac{d^2\varphi(0)}{d\delta^2} = Ep_1^2$.

3) Для любого $\delta \in (0, \infty)$ функция $\varphi(\delta)$ строго выпукла и для любого $\beta \in (0, 1]$ существует единственный корень $\delta_{1/\beta}$ уравнения

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\beta}. \tag{46}$$

Доказательство. Из условий а) и б) очевидным образом следуют утверждения 1 и 2. Кроме того, из условия б) вытекает для любого $\delta \in (0, \infty)$ неравенство $\frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} = Ep_1^2 > 0$. Поэтому очевидно, что $0 < \frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} < \infty$. Значит, производящая функция $\varphi(\delta)$ – строго выпукла. Поскольку $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} = -Ep_1$, то имеется два возможных варианта поведения функции $\varphi(\delta)$.

Вариант 1. Пусть $Ep_1 \leqslant 0$. Тогда $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} \geqslant 0$ и $\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta}$ не убывает. Следовательно, $\varphi(\delta)$ – непрерывная монотонно неубывающая функция. Поэтому существует единственный корень уравнения (46).

Вариант 2. Если $Ep_1 > 0$, то $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} < 0$. Раз для любых $\delta \in (0, \infty)$ вторая производная $\frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} > 0$, то существует $0 < \delta_0 < \infty$: $\min\limits_{\delta \in (0,\infty)} \varphi(\delta) = \varphi(\delta_0)$ (где $\frac{d\varphi(\delta_0)}{d\delta} = 0$, а $\frac{d^2\varphi(\delta_0)}{d\delta^2} > 0$). Стало быть, для любых $\delta > \delta_0$ функция $\varphi(\delta)$ является непрерывной и монотонно неубывающей. Поэтому существует единственное решение уравнения (46). $\square$

Доказательство теоремы 2. Сначала заметим, что из утверждения 2 теоремы 1 следует, что множество граничных точек $\partial\Gamma_k \neq \varnothing$, если и только если уравнение (20) разрешимо относительно $x \in R^1$.

1) Пусть $\beta = 1$, $|Ep_1| < \infty$, $\delta \in (0, \infty)$, $x(k)$ – корень уравнения, а $k \in N_0$ – любое. Тогда, в силу условий, (20) примет вид $x(k) = \frac{1}{\delta} \ln\left[\varphi^k(\delta) - 1\right]$. Отсюда в силу леммы 2 следует, что $x(k) = -\infty$. Поэтому $\Gamma_k = \bar{R}^1$, а $\tau^0 = 0$.

2) Пусть $|Ep_1| < \infty$, а множество пар $(\beta, \delta) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ такое, что $\beta\varphi(\delta) \geqslant 1$. Тогда из (23) и (24) следует, что относительно любых $x \in R^1$ выполняется неравенство $(0 <) 1 - \beta^k \geqslant (1 - \beta^k \varphi^k(\delta)) e^{-\delta x}$. Значит, $\Gamma_k = R^1$. Следовательно, $\tau^0 = 0$.

3) Пусть $|Ep_1| < \infty$, $\beta \in (0, 1]$, а $\delta \in (0, \delta_{1/\beta})$, где $0 < \delta_{1/\beta}$ – решение уравнения $\varphi(\delta) = \frac{1}{\beta}$. Тогда очевидно, что в этом случае $1 - \beta^k \varphi^k(\delta) > 0$, поскольку $\beta\varphi(\delta) < 1$. Из этого следует, что существуют $x \in R^1$ такие, что $\partial\Gamma_k \neq \varnothing$. Значит, уравнение $1 - \beta^k = (1 - \beta^k \varphi^k(\delta)) e^{-\delta x}$ имеет для любого $k \in N_0$ единственное решение (25). При этом $\Gamma_k = \{x \in R^1 : x \geqslant x(k)\}$, а τ^0 имеет вид (26). $\square$

Приложение 3.

Доказательство теоремы 3 опирается на два вспомогательных утверждения. Сначала выведем уравнение, которому удовлетворяет цена в задаче об оптимальной остановке с бесконечным горизонтом, а также некоторые свойства его решения.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Предположим, что для любого $x \in R^1$ выполнено условие (29). Тогда для любого $x \in R^1$ справедливы следующие утверждения.*

1) Цена $v(x)$ удовлетворяет (30) и (31).

2) Справедливы неравенства

$$v(x) \geqslant 1 - e^{-\delta x}, \tag{47}$$

$$v(x) \geqslant \beta E v(x + p_1). \tag{48}$$

3) Решение уравнения (31) допускает представление (32) – (35).

Доказательство. 1) Сначала докажем, что имеет место (30), т. е. обоснуем возможность осуществления поточечного предельного перехода для последовательности $\{v^k(x)\}_{k\in N_0}$. Для этого заметим, что: i) для любых $(k,x)\in N_0\times R^1$,

$$\left|v^k(x)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\beta^n\left(1+Ee^{-\delta\left(x+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)}\right),$$

ii) последовательность $\{v^k(x)\}_{k\in N_0}$ – монотонная, в силу (6) – неубывающая. Поэтому существует поточечный предел, обозначаемый $v(x)\triangleq\lim\limits_{k\to\infty}v^k(x)$. Теперь рассмотрим рекуррентное соотношение (9) и обоснуем возможность предельного перехода в нем. Действительно, в силу теоремы о монотонной сходимости и вышеуказанных замечаний получаем, что $v(x)$ удовлетворяет уравнению (31).

2) Неравенства (47) и (48) следуют из неравенств (10), (11) и устанавливаются с помощью предельного перехода при $k\to\infty$.

3) Для доказательства (32) – (35) нам придется ввести ряд новых объектов. Из рекуррентного соотношения (31) следует, что R^1 можно разбить на две непересекающиеся области:

i) область остановки Γ:

$$\begin{aligned}\Gamma &\triangleq \{x\in R^1: v(x)=1-e^{-\delta x}\}\\ &=\{x\in R^1: 1-e^{-\delta x}\geqslant \beta Ev(x+p_1)\},\end{aligned}\tag{49}$$

ii) область продолжения наблюдений

$$\begin{aligned}C &\triangleq \{x\in R^1: v(x)=\beta E\left[v(x+p_1)\right]\}\\ &=\{x\in R^1: \beta E\left[v(x+p_1)\right]>1-e^{-\delta x}\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\Gamma\cap C=\varnothing$, $\Gamma\cup C=R^1$. В силу (31) и (49) для любого $x\in R^1$

$$v(x)=\begin{cases}1-e^{-\delta x}, & x\in\Gamma,\\ \beta E\left[v(x+p_1)\right], & x\in C,\end{cases}$$

или, что то же,

$$v(x)=\left(1-e^{-\delta x}\right)I_\Gamma(x)+\beta E\left[v(x+p_1)\right]I_C(x).\tag{50}$$

Отсюда следует, что решение (50) допускает представление:

$$\begin{aligned}v(x)&=1-e^{-\delta x}+\left[\beta E\left[v(x+p_1)\right]-1+e^{-\delta x}\right]I_C(x)\\ &=1-e^{-\delta x}+\max\left[\beta E\left[v(x+p_1)\right]-1+e^{-\delta x},0\right].\end{aligned}$$

□

Лемма 4. *Пусть $\omega^k(x)$ для любых $k\in N_0$ и $x\in R^1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{cases}\omega^k(x)=\beta E\left[\omega^{k-1}(x+p_1)\right],\\ \omega^k(x)|_{k=0}=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x},\end{cases}\tag{51}$$

где $\delta_{1/\beta}$ – единственный корень уравнения $\varphi(\delta)=\frac{1}{\beta}$, A^* – некоторая константа. Тогда существует $\omega(x)$ такое, что $\omega(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\omega^k(x)=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}$, которое является единственным решением уравнения

$$\omega(x)=\beta E\left[\omega(x+p_1)\right].\tag{52}$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Из (51) следует, что

$$\begin{aligned}\omega^1(x)&=\beta E\left[A^*e^{-\delta_{1/\beta}(x+p_1)}\right]\\ &=\beta A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}Ee^{-\delta_{1/\beta}p_1}\\ &=\beta\varphi(\delta_{1/\beta})A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}.\end{aligned}$$

Поскольку $\beta\varphi(\delta_{1/\beta})=1$, то $\omega^1=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}$. Пусть $\omega^{k-1}=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}$. Установим, что $\omega^k=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}$. Из рекуррентного соотношения (51) следует искомое равенство

$$\begin{aligned}\omega^k(x)&=\beta E\left[A^*e^{-\delta_{1/\beta}(x+p_1)}\right]\\ &=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}\beta\varphi(\delta_{1/\beta})\\ &=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\omega(x)=\lim_{k\to\infty}\omega^k(x)=A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}.\tag{53}$$

Очевидно, что $A^*e^{-\delta_{1/\beta}x}$ – решение (52). Единственность следует из единственности предела. □

Доказательство теоремы 3. 1) В силу монотонности последовательности функций $\{v^k(x)\}_{k\in N_0}$ (см. (12)) для любого $x\in R^1$ существует предел

$$\begin{aligned}v(x)&=\lim_{k\to\infty}v^k(x)=\lim_{N\to\infty}\left(v^k(x)\Big|_{k=N-n}\right)\\ &=\lim_{N\to\infty}\sup_{\tau\in T_n^N}E\beta^\tau(1-e^{\delta X_\tau}).\end{aligned}$$

При этом, в силу условий, $|v(x)|<\infty$, поэтому из утверждения леммы 3 следует, что цена $v(x)$ удовлетворяет уравнению (31). Кроме того, из леммы 3 следует, что для любого $x\in R^1$ величина $v(x)$ допускает представление (32). Из (32) следует, что имеется три возможности: 1) $\Gamma=\varnothing\quad(C=R^1)$, 2) $\Gamma=R^1\quad(C=\varnothing)$, 3) $\Gamma\neq\varnothing$ и $C\neq\varnothing$ $(\Gamma\cup C=R^1)$.

В случае 1 из (50) для любого $x \in R^1$ получаем $v(x) = 1 - e^{-\delta x}$.

В случае 2 из (31) и (50) следует, что $v(x)$ удовлетворяет (52). Заметим также, что в силу леммы 4 решение уравнения (52) существует, единственно и имеет вид (53).

В случае 3 из условия $C \neq \varnothing$ для любого $x \in R^1$ получаем (50). Поэтому, согласно лемме 4, для любого $x \in C$ цена имеет вид (53), а решение (31) можно представить в виде $v(x) = 1 - e^{-\delta x} + \max(A^* e^{-\delta_{1/\beta} x} - 1 + e^{-\delta x}, 0)$.

Для завершения доказательства теоремы 3 нам осталось найти значения A^* и границу области остановки, которую обозначим через x_r. Ранее отмечалось, что $\partial\Gamma \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда разрешимо (относительно x) уравнение

$$1 - e^{-\delta x} = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}. \tag{54}$$

Его решение — это и есть граница x_r. Кроме того, известно [9, 10], что в точке x_r должно выполняться условие «гладкого склеивания», которое в данном случае имеет вид

$$\delta e^{-\delta x_r} = -\delta_{1/\beta} A^* e^{-\delta_{1/\beta} x_r}. \tag{55}$$

Легко убедиться в том, что (54) и (55) образуют систему, вообще говоря, нелинейных уравнений относительно (A^*, x_r). Очевидно, что она имеет единственное решение, которое имеет вид (32) – (35). Равенство (35) очевидно. $\square$

Литература

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматлит, 1960. 328 с.

2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977. 252 с.

3. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 496 с.

4. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967. 232 с.

5. *Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977. 168 с.

6. *Розов А. К.* Оптимальные правила остановки и их применение. СПб.: Политехника, 2009. 212 с.

7. *Фёльмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. 496 с.

8. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами. 2014. Вып. 52. С. 6–22.

9. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998. 544 с.

10. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М.: Физматлит, 1976. 272 с.

11. *Ширяев А. Н., Новиков А. А.* Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, вып. 2. С. 373–382.

12. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I. // Theory Probability and Math. Statist. 2005. Vol. 71. P. 93–103.

13. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. II // Theory Probability and Math. Statist. 2006. Vol. 72. P. 47–58.

Поступила в редакцию 10.08.2020

References

1. *Wald A.* Posledovatelnyi analiz [Sequential analysis]. Moscow: Fizmatlit, 1960. 328 p.

2. *Gikhman I. I., Skorokhod A. V.* Upravlyaemye sluchainye protsessy [Controlled random processes]. Kiev: Naukova dumka, 1977. 252 p.

3. *De Groot M.* Optimal'nye statisticheskie resheniya [Optimal statistical decisions]. Moscow: Mir, 1974. 496 p.

4. *Dynkin E. B., Yushkevich A. A.* Teoremy i zadachi o protsessakh Markova [Theorems and problems on Markov processes]. Moscow: Nauka, 1967. 232 p.

5. *Robbins G., Sigmund D., Chao I.* Teoriya optimal'nykh pravil ostanovki [Theory of optimal stopping rules]. Moscow: Nauka, 1977. 168 p.

6. *Rozov A. K.* Optimal'nye pravila ostanovki i ikh primeneniya [Optimal stopping rules and their application]. St. Petersburg: Politekhnika, 2009. 212 p.

7. *Felmer G., Shid A.* Vvedenie v stokhasticheskie finansy. Diskretnoe vremya [An introduction to stochastic finance. Discrete time]. Moscow: MTsNMO, 2008. 496 p.

8. *Khametov V. M., Shelemekh E. A., Yasonov E. V.* Algoritm resheniya zadachi ob optimal'noi ostanovke s konechnym gorizontom

[Algorithm for solving the problem of optimal stopping with a finite horizon]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Managing large systems]. 2014. Iss. 52. P. 6–22.

9. *Shiryaev A. N.* Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. T. 2. Teoriya [Foundations of stochastic financial mathematics. Vol. 2. Theory]. Moscow: Fazis, 1998. 544 p.

10. *Shiryaev A. N.* Statisticheskii posledovatel'nyi analiz. Optimal'nye pravila ostanovki [Statistical sequential analysis. Optimal stopping rules]. Moscow: Fizmatlit, 1976. 272 p.

11. *Shiryaev A. N., Novikov A. A.* Ob odnom effectivnom sluchae resheniya zadachi ob optimal'noi ostanovke dlya sluchainykh bluzhdanii [An effective case of solving the optimal stopping problem for random walks]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Probability Theory and its Applications]. 2004. Vol. 49, iss. 2. P. 373–382.

12. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I. *Theory Probability and Math. Statist.* 2005. Vol. 71. P. 93–103.

13. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. II. *Theory Probability and Math. Statist.* 2006. Vol. 72. P. 47–58.

Received August 10, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Нестеренко Александр Александрович
аспирант
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
ул. Мясницкая, 20, Москва, Россия, 101000
эл. почта: aanesterenko@hse.ru
тел.: +79686582745

Хаметов Владимир Минирович
д. ф.-м. н., профессор
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
ул. Мясницкая, 20, Москва, Россия, 101000
эл. почта: khametovvm@mail.ru
тел.: (495) 7729590

CONTRIBUTORS:

Nesterenko, Alexander
National Research University Higher School of Economics
20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia
e-mail: aanesterenko@hse.ru
tel.: +79686582745

Khametov, Vladimir
National Research University Higher School of Economics
20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia
e-mail: khametovvm@mail.ru
tel.: (495) 7729590