

УДК 517.954:630\*161

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА $CO_2$ В ЛЕСНЫХ ПЕСЧАНЫХ ПОЧВАХ

Ю. В. Заика<sup>1</sup>, О. Н. Бахмет<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

<sup>2</sup> *Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В контексте анализа влияния антропогенных факторов на изменения глобальных биосферных процессов исследования круговорота углерода в масштабе «атмосфера–растения–почва» соответствующие математические модели представляют значительный интерес. Помимо оценки глобального баланса потоков углерода отмечается необходимость более пристального внимания к математическому описанию газовой фазы почв на локальном уровне, учитывая многообразие почв и условий их жизненного цикла. В частности, именно на основе локальных экспериментальных данных делаются выводы о преимущественной эмиссии или доминирующем стоке углерода на тех или иных территориях, о влиянии мелиорации почв, таяния вечной мерзлоты и т. д. В работе предложена математическая модель продуцирования и переноса углекислого газа в суточном диапазоне времени в лесных почвах, характерных для Восточной Фенноскандии. Модель ориентирована на сравнительный количественный анализ диффузионной и конвективной составляющих с целью оценки динамики дыхания почвы и изменений направлений стока. Предпринята попытка ограничиться минимальным количеством необходимых параметров краевой задачи, требующих оценки по экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** краевые задачи в пористой среде; диффузия и конвекция; перенос  $CO_2$  в песчаных почвах.

### **Yu. V. Zaika, O. N. Bakhmet. BOUNDARY VALUE PROBLEM OF $CO_2$ TRANSPORT IN SANDY FOREST SOILS**

In the context of human-induced changes in global biospheric processes, research on carbon cycling at the ‘atmosphere – plants – soil’ scale and the corresponding mathematical models are of substantial interest. In addition to the global analysis of the balance of carbon fluxes, specialists in soil science argue that closer attention should be given to the mathematical description of the gaseous phase of soils at the ‘local level’, taking into account the diversity of soils and their ‘life cycle’ conditions. Thus, it is the local experimental data that are the basis for conclusions about an area being mainly a source or a sink of carbon, about the effects of soil reclamation, permafrost thawing, etc. A mathematical model is suggested here for daily carbon dioxide production and transport in forest soils typical of Eastern Fennoscandia. The model performs a comparative quantitative analysis of the diffusion and convection components to estimate changes in soil respiration and transfer directions. An attempt is made to minimize the number of boundary value problem parameters to be estimated using experimental data.

**Keywords:** boundary value problems in a porous medium; diffusion and convection;  $CO_2$  transport in sandy soils.

## ВВЕДЕНИЕ

Комплексные модели круговорота углерода в масштабе «атмосфера–растения–почва», обстоятельный обзор литературы, тенденции развития математического моделирования в этой области представлены в [9, 14, 15, 18]. Более пристальное внимание к физически обоснованному математическому описанию газовой фазы почв уделено в [13, 17, 18, 20]. Именно на основе локальных экспериментальных данных о дыхании почв делаются выводы о преимущественной эмиссии или доминирующем стоке углерода на тех или иных территориях, о влиянии мелиорации почв, таяния вечной мерзлоты и т. д. Проблема междисциплинарная. Результаты численного моделирования – лишь один из аргументов при обсуждении дискуссионных вопросов и проблем, возникающих, в частности, при анализе баланса потоков углекислого газа и метана в различных почвенных и болотных экосистемах. Вести речь о какой-либо универсальной математической модели переноса углекислого газа в почвенном горизонте преждевременно. Модель должна «подстраиваться» под конкретную задачу, описывать влияние лишь лимитирующих факторов с учетом имеющихся возможностей и точности измерений тех или иных потоков, концентраций, характеристик (гранулометрический состав, физико-химические параметры и т. д.). Трудно рассчитывать на корректную оценку десятков априори неизвестных параметров в детализированных моделях по измерениям «внешних» потоков  $CO_2$  из почвы, дискретным показаниям температуры, влажности и т. п. Здесь следует иметь в виду и следующее обстоятельство. Коэффициенты (например, диффузии), как известно, не измеряются, а вычисляются по измерениям в рамках конкретной модели (как правило, очень упрощенной). Использовать эти значения в других (более детализированных) моделях нужно с осторожностью, ориентируясь в лучшем случае на порядок величины. Один и тот же (формально по названию) коэффициент, но в разных моделях (например, при различных краевых условиях) примет различные значения, даже если обрабатывается одна и та же «экспериментальная кривая». Поэтому, используя литературные данные, следует, помимо уточнения экспериментальных условий, обращать внимание на методику *вычисления* значения того или иного «табличного» коэффициента. И если не решать глобальные задачи (требующие усилий

больших научных коллективов, длительного времени, дорогостоящих экспериментальных и вычислительных ресурсов), то трудно придумать конкретную прикладную задачу, в которой (условно) при 10-процентной погрешности измерений требуется выделить десять процессов, вносящих сопоставимый друг с другом 10-процентный вклад «в общий поток».

Исходя из этих общих соображений рассмотрим следующую задачу моделирования. Для определенности представим себе обычный погожий летний день в конце июля в обычном сосновом лесу Восточной Фенноскандии. Обычная песчаная почва, покрытая обычной лесной подстилкой. Рассмотрим вопрос о количественном сопоставлении диффузионной и конвективной составляющих переноса углекислого газа (исторически «постулируется» преимущественный характер молекулярной диффузии). В научной литературе анализируются и другие возможные механизмы переноса [13, гл. V], вплоть до «экзотических» (кнудсеновская диффузия, диффузия по поверхности твердой фазы, тепловое скольжение и т. п.). Конечно, эти процессы участвуют, их список можно продолжить, вопрос лишь в их сопоставимости (и где взять значения соответствующих коэффициентов?). В частности, вряд ли тепловое скольжение может играть заметную роль, поскольку оно становится заметным лишь в сильно разреженных газах [12, с. 357]. Это возможно в микропорах, но они слабо связаны и вряд ли представляют «конкурирующий» канал переноса. Впрочем, не будем столь категоричны, поскольку принятая модель основана на интегральных, усредненных характеристиках без детализации многообразия механизмов переноса.

В целом, исходя из поставленной задачи (она еще будет уточняться), будем придерживаться следующего подхода. Постулаты неравновесной термодинамики (уравнения Онзагера) предписывают «перекрестный» учет градиентов концентраций, температуры, давления, влажности . . . , что для наших целей приведет к неоправданному усложнению многопараметрической модели. Будем моделировать динамику газовой фазы (характеристики которой трудно измерить с высокой точностью). А температуру и влажность будем учитывать их влиянием на «эффективные газовые параметры» переноса, ориентируясь на экспериментальные данные и их физически осмысленную аппроксимацию (не выписывая уравнения теплопроводности и влагопереноса).

В общих математических терминах рассуждаем следующим образом. Рассмотрим функционал  $J[t, z, c(t, \cdot)]$ , значение которого в момент времени  $t$  на глубине  $z$  определяется распределением концентрации  $c(t, \cdot)$  в окрестности текущей точки  $z$ . В линейном приближении локально это распределение характеризуется первыми двумя слагаемыми формулы Тейлора: значениями  $c(t, z)$  и  $\partial_z c(t, z)$ . Классическая молекулярная диффузия реагирует на градиент, а конвективное движение углекислого газа (гравитационное, в растворенной форме в почвенной влаге, в результате испарения влаги и т. п.) по величине определяется скоростью среды и значением концентрации. Различные процессы переноса газа в почве достаточно подробно описаны в книге [13, гл. V], а в справочнике [6, с. 437] только для изотермических условий выделены десять основных возможных механизмов переноса. Не задаваясь необозримой задачей явного учета такого многообразия процессов (а конкретную практическую задачу, для которой это необходимо, трудно сформулировать), будем в линейном приближении классифицировать эти процессы по их вкладу преимущественно в коэффициенты при концентрации или при ее градиенте. При этом «накапливается» эффективная скорость конвекции и эффективный коэффициент диффузии. Чтобы не загромождать обозначения индексом  $_{\text{eff}}$ , далее подразумеваем, что упоминаемые коэффициент диффузии и скорость конвективного переноса носят интегральный, усредненный, эффективный, аккумулярующий характер. Численному анализу и сравнению подлежат «типы переноса» (включая их локальное направление по глубине почвенного слоя), а не многочисленные «составляющие», имеющие каждый конкретный физический или биохимический смысл и механизм реализации. В частности, нас будет интересовать, какая часть продуцируемого в почве углекислого газа (в основном благодаря дыханию корней, химическим процессам разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов) достигает поверхности (с которой эмиссия  $\text{CO}_2$  регистрируется достаточно надежно), а какая часть депонируется глубинными слоями почвы (в частности, уносится грунтовыми водами).

При изложении модели в форме краевой задачи будем последовательно анализировать выделенные лимитирующие процессы. Англоязычная версия описания модели представлена в [21]. Авторы ссылались в основном лишь на доступные русскоязычные монографии, не ставя перед собой цель обзора.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### Температура

Начнем с «самого простого» — учета влияния суточных колебаний температуры корнеобитаемого слоя почвы. Кавычки означают, что мы воспользуемся простейшей аппроксимацией температуры  $T(t, z)$  по времени  $t$  и глубине  $z$ , не привлекая сложный математический аппарат теплофизики почв [16]. Летний период в сосновом лесу Восточной Финноскандии характеризуется небольшой суточной амплитудой температуры. Что касается почвы, то следует учесть значительный демпфирующий эффект лесной подстилки. На фоне физико-химических процессов продуцирования  $\text{CO}_2$ , которые обычно характеризуются экспоненциальной зависимостью от температуры (по закону Аррениуса), коэффициенты диффузии и конвекции слабо (степенным образом с удовлетворительной точностью) зависят от  $T$ . Но мы учтем и такую зависимость из соображений сбалансированности модели и исходя из возможности малых колебаний инициировать резонансные явления. Мы не нацелены на предельные упрощения, которые бы позволили надеяться на аналитические выкладки. Для численного анализа указанное уточнение учесть несложно.

Будем ориентироваться на качественный характер динамики температуры почвы, представленный на рис. 1 (см. также [20, с. 15, 16]).

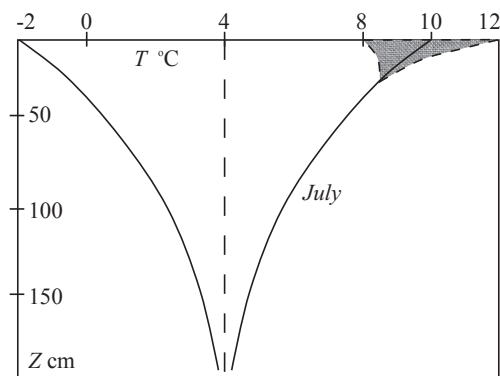


Рис. 1. Сезонный ход температуры  
Fig. 1. Seasonal temperature variations

Воспользуемся решением классической «задачи о температуре земли» [2, §14], точнее, выражениями для температурных волн [12, §55]:

$$\alpha_y \equiv \sqrt{\omega_y [2\chi_y]^{-1}}, \quad T_y(t, z) = T_\infty + \Delta T_y \exp\{-\alpha_y z\} \cos\{\omega_y t - \alpha_y z\}.$$

Вместо функции  $\cos$  можно взять  $\sin$  в зависимости от предпочтительного выбора начала отсчета времени (уточним позже). Пока ограничимся среднегодовыми колебаниями (индекс  $y$  означает «year»). Значение  $T_\infty$  соответствует установившейся температуре на глубине 3–4 метра (например,  $T_\infty = 4^\circ\text{C}$ ). Период колебаний  $\tau_y = 2\pi/\omega_y$  равен году,  $\omega_y$  — соответствующая частота. Для численных расчетов по уравнению диффузии в относительно небольшом диапазоне времени удобно принять  $[t] = \text{s}$ . Для ориентировки по порядку величин [2, с. 101]: период  $\tau_y \approx 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3.15 \times 10^7 \text{s}$ , коэффициент температуропроводности  $\chi_y \approx 2 \times 10^{-3} \text{cm}^2/\text{s}$ . Тепловая волна распространяется с задержкой по фазе, что отражено в формуле. Поверхность равной фазы  $\omega_y t - \alpha_y z = \text{const}$  движется вглубь почвы со скоростью  $v = dz/dt = \sqrt{2\omega_y \chi_y}$ . При  $z = 0$  получаем колебание температуры приповерхностного слоя почвы:  $T_y^0(t) = T_\infty + \Delta T_y \cos\{\omega_y t\}$ . Если для примера фиксировать амплитуду  $\Delta T_y = 6^\circ\text{C}$ , то  $T_y^0(t) \in [-2, 10]$  и на глубине 3–4 метра колебания практически затухают. Формально  $\max T_y^0$  достигается при  $t = 0$ , т. е. здесь за начало отсчета времени примем условно границу июль-август. Поскольку нас далее будет интересовать суточный ход температуры, то, пренебрегая малой величиной  $\omega_y t$  ( $\omega_y \approx 2 \times 10^{-7}$ ), зафиксируем «базовое распределение ( $J = \text{July}$ )»

$$T_J(z) = T_\infty + \Delta T_y \exp\{-\alpha_y z\} \cos\{-\alpha_y z\}.$$

Отметим также, что для указанного значения температуропроводности  $\chi_y$  (по порядку величины)  $\alpha_y \approx 10^{-2}$  и колебательный характер экспоненциально затухающей функции  $T_J(z)$  будет слабо заметен.

Аналогичным образом примем аппроксимацию в дневном диапазоне:

$$\alpha_d \equiv \sqrt{\omega_d [2\chi_d]^{-1}}, \quad T_d(t, z) = T_J(z) - \Delta T_d \exp\{-\alpha_d z\} \cos\{\omega_d t - \alpha_d z\}. \quad (1)$$

При этом  $\omega_d \gg \omega_y$  (примерно в 365 раз) и  $\alpha_d \gg \alpha_y$  (примерно в 19 раз). Дневная амплитуда колебаний  $\Delta T_d$  невелика (например,  $\Delta T_d = 2$ ) за счет демпфирующего влияния лесной подстилки. Для указанных значений имеем  $T_d^0(t) \in [8, 12]^\circ\text{C}$ . Минимум приповерхностной ( $z = 0$ ) температуры достигается при  $t = 0$ , так что в формуле (1) за начало отсчета времени принимаем начало нагрева почвы после ночного охлаждения, условно 6 часов утра. Для краткости говорим о начале светового дня (подразумевая уровень освещения пе-

рехода «охлаждение–нагрев»). Колебания затрагивают, по существу, лишь примерно полуметровый корнеобитаемый подповерхностный слой, где и происходит в основном активное дыхание почвы и продуцирование  $\text{CO}_2$  в результате физико-химических процессов разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов.

Отметим теперь следующие обстоятельства. Даже в безоблачные сутки колебания приповерхностной температуры лишь грубо опишутся синусоидой. Среднегодовая амплитуда  $\Delta T_y$  тоже весьма условна, а измеренная  $\Delta T_d$  будет существенно варьироваться даже в пределах нескольких квадратных метров под лесной подстилкой. Значения температуропроводностей  $\chi_{y,d}$  существенно различны, хотя речь «об одной и той же почве». За сезон можно говорить о некотором усредненном прогреве или охлаждении почвы, а в течение суток колебания температуры приземного слоя воздуха приведут лишь к изменениям температуры некоторого объема почвы «в окрестности каналов порового пространства». Не говоря уже о том, что усредненные (эффективные) значения  $\chi_{y,d}$  не отражают изменения теплопроводности почвы по мере изменения ее структуры и состава с глубиной. Таким образом, формулу (1) будем воспринимать как физически осмысленный вариант аппроксимации (стандартным методом наименьших квадратов) экспериментальных данных по температуре варьированием в разумных пределах параметров  $T_\infty$ ,  $\Delta T_{y,d}$ ,  $\chi_{y,d}$ .

Требования к высокой точности аппроксимации нет, поскольку формула будет использоваться лишь в степенных (невысокой степени) зависимостях коэффициентов от температуры (на фоне экспоненциального всплеска продуцирования  $\text{CO}_2$  в корнеобитаемом слое при благоприятных условиях по температуре и влажности). Вместе с тем анализ значений варьируемых параметров позволяет проводить условный сравнительный анализ почв даже в пределах небольшой территории.

### Концентрация $\text{CO}_2$

Нас будут интересовать концентрации углекислого газа в почвенном воздухе и в почвенной влаге (в растворенном состоянии). Сопряжение с атмосферным воздухом осуществляется в основном вдоль поровых каналов достаточно большого диаметра (микropоры в значительной степени изолированы и не составляют в целом сопоставимого канала переноса газовой фазы почвы). Поэтому за основу дальнейших рассмотрений примем равенство давлений атмосферного воздуха и газовой фа-



зы почвы в слое активного продуцирования  $CO_2$ . Незначительные колебания атмосферного давления в течение суток не учитываем.

При изучении явлений переноса в газах (в частности, диффузионных процессов в смеси газов) общеупотребительны следующие обозначения [12, гл. VII]:  $n$  — полная концентрация (общее число молекул газа в единице объема газа,  $[n] = 1/cm^3$ , можно использовать и  $mol/cm^3$ ,  $mol/m^3$ ); если  $n_1$  относится к какому-либо газу в смеси, то  $c_1 = n_1/n$  — относительная концентрация «первого газа» (которым для нас далее будет  $CO_2$ ). Для отличия массовую концентрацию будем обозначать заглавной буквой  $C$ ,  $[C] = mg/cm^3$ ,  $g/m^3$ . Подчеркнем, что при изучении газовой фазы почвы [13] имеется в виду масса изучаемого газа в единице объема почвенного воздуха. Газ, растворенный в почвенной влаге и адсорбированный на свободной поверхности твердой фазы, учитывается отдельно. Состав атмосферы в объемных %: 78 (азот), 20.9 (кислород), ..., 0.035 ( $CO_2$ ), ... (в массовых %: 75.51, 23.14, ..., 0.05, ...). В почвенном воздухе ситуация кардинально меняется [20, с. 34]. Уже на глубине 10–20 см концентрация  $CO_2$  может возрасти по порядку. В [13, с. 29] и [17, с. 298] указан «предельный» диапазон: 0.035–20 %.

Перейдем к растворимости углекислого газа в жидкой фазе. Учтем, что почвенная влага обладает своеобразной спецификой [8, с. 25], вода (по классификации А. Ф. Лебедева) может принимать следующие формы: 1) водяной пар, 2) гигроскопическая вода, 3) пленочная вода, 4) гравитационная вода, 5) вода в твердом состоянии, 6) кристаллическая вода и 7) химически связанная вода. Локально растворенному углекислому газу не приходится «диффундировать в толщу воды». «Рабочий диапазон» газовой концентрации находится на уровне процентов. Процесс растворения является быстрым в масштабе характерного времени лимитирующей молекулярной диффузии в газовой фазе. По этим причинам примем в линейном приближении модели в целом пропорциональную зависимость  $C_w = \gamma(T)C_g$ , где  $C_w$  — массовая концентрация  $CO_2$ , растворенного в единице объема жидкости,  $C_g \equiv C$ . Здесь  $\gamma(T)$  также следует воспринимать как эффективный коэффициент и только в среднем (по порядку величины) можно ориентироваться на «табличную» растворимость.

В монографии [13] ставится проблема учета адсорбированного углекислого газа на свободной поверхности твердой фазы. Одним из возможных механизмов переноса является поверхностная диффузия. В количественном от-

ношении поверхностная концентрация (особенно если удельная поверхность велика) существенна и регистрируется при проведении экспериментов дегазации образцов почвы. Но нас интересует динамика переноса, а не общая концентрация. Воспринимаем количество адсорбированного газа как слабоподвижный фон (но который, несомненно, следует учесть при оценке общего содержания углекислого газа в почве). В порядке аналогии это согласуется с известным мнением [1, с. 512] (правда, по поводу совсем другого газа): «Правильнее, по всей вероятности, считать, что часть водорода прочно удерживается дефектами решетки и поэтому не должна учитываться при определении концентрации, градиент которой входит в уравнение закона Фика, т. е. часть водорода является полуинертной примесью. Закон Фика применим только к оставшейся части».

Введем теперь в рассмотрение два необходимых параметра:  $\varepsilon(t, z)$  — порозность аэрации (объемная доля газа в почве),  $\theta(t, z)$  — объемная доля влаги. Тогда  $1 - (\varepsilon + \theta) \equiv \zeta(t, z)$  — объемная доля твердого вещества почвы. Теоретически  $\varepsilon \in (0, 1)$ , но близкие к предельным значения не согласуются с понятием почвы, будем рассматривать более узкий реальный диапазон. Начиная с относительно небольшой глубины в пределах метра величина  $\zeta$  (а значит, и доля порового пространства  $\varepsilon + \theta$ ) стабилизируется.

Итак, далее нас будет интересовать основная подвижная часть углекислого газа с общей концентрацией

$$\begin{aligned} C_m(t, z) &= C_g(t, z)\varepsilon(t, z) + C_w(t, z)\theta(t, z) \\ &= C(t, z)[\varepsilon + \gamma(T)\theta] \quad (C \equiv C_g). \end{aligned}$$

Это массовое количество  $CO_2$  в газовой фазе и растворе (суммарно в поровом пространстве), отнесенное к единице объема почвы.

### Диффузия и конвекция

Будем считать, что атмосферное давление стабильно в течение суток. Давление почвенного воздуха находится в квазиравновесном соответствии с приповерхностным атмосферным. При этом учитываем лишь основной канал переноса по системе связанных макропор. Микропоры и микрокапилляры, в которых могут проявляться эффекты теплового скольжения, кнудсеновская диффузия, считаем второстепенным каналом. Поскольку молекулы  $N_2$ ,  $O_2$  сравнимы по массе и размерам, молекула  $CO_2$  тяжелее (но не на порядок) и концентрация углекислого газа находится на уровне нескольких %, то можно воспользоваться теорией диффузии в бинарной смеси газов.

Сначала для простоты представим себе «почву» как набор вертикальных полых цилиндров (каналов) с диаметрами, значительно превышающими длину свободного пробега молекул газа. Порозность аэрации учтем после предварительных рассмотрений.

Обозначим через  $n_1$  концентрацию (плотность) молекул «первого газа» ( $CO_2$ ) с относительно малой концентрацией по сравнению со «вторым газом» ( $N_2 + O_2$ ). Соответственно,  $n_2$  — число молекул  $N_2 + O_2$  в единице объема (для определенности  $cm^3$ ),  $n = n_1 + n_2$  — общая концентрация (плотность) частиц почвенного воздуха. Другими незначительными газовыми составляющими пренебрегаем. Отметим при этом, что в обычных условиях в почве соблюдается примерное равенство (в объемных процентах) [17, с. 298]:  $O_2 + CO_2 \approx 21\%$ .

В указанном приближении плотность диффузионного потока частиц запишется в форме [12, с. 344], [3, с. 117]:

$$J_1 = -Dn \frac{\partial c_1}{\partial z}, \quad c_1 = \frac{n_1}{n},$$

где  $c_1$  — относительная концентрация ( $CO_2$ ). Величина  $n$  не обязательно постоянна, она может меняться в пространстве под действием какой-либо причины (например, силового поля или градиента температуры, так что термодиффузия косвенно учитывается). Но уравнение идеального газа считаем справедливым:  $p = nkT$ . Здесь и далее  $[T] = K$ . Преобразуем производную частного:

$$\begin{aligned} J_1 &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + D n_1 n^{-1} \frac{\partial n}{\partial z} \\ &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + v_1 n_1, \quad v_1 \equiv D[\ln n]'. \end{aligned} \quad (2)$$

В обычных условиях общая концентрация стабильна, можно изменением функции  $\ln n$  пренебречь ( $v_1 \approx 0$  в (2)) и пользоваться выражением  $J_1 \approx -D \partial_z n_1$ . При этом [4, с. 357] (см. также [3, 5]) коэффициент диффузии  $D$  растет с увеличением температуры пропорционально  $T^{3/2}$  (и обратно пропорционален давлению  $p$ ). В принятых единицах измерений  $[J_1] = 1/(cm^2s)$ ,  $[D] = cm^2/s$ ,  $[v_1] = cm/s$ , т. е. слагаемое  $v_1 n_1$  имеет формальный смысл конвективного потока со скоростью среды  $v_1$ . Если скорость течения газа  $u$  ненулевая, то в выражение для потока добавляется слагаемое (молярный перенос), учитывающее течение газа как целого [3, с. 117]:

$$\begin{aligned} J_2 &= -Dn \frac{\partial c_1}{\partial z} + n c_1 u \\ &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + v_2 n_1, \quad v_2 \equiv v_1 + u. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание трудности подробного описания большого числа механизмов переноса, будем их классифицировать по формальному признаку вклада в одно из слагаемых в выражение, обобщающее (3). Локально ситуация определяется не значением концентрации в точке, а распределением в ее окрестности. В линейном приближении  $n_1(t, \cdot)$  задается двумя числами  $n_1(t, z)$  и  $\partial_z n_1(t, z)$ . В (3) выделено стандартное по форме слагаемое для молекулярной диффузии, определяемое градиентом, и конвективное слагаемое, зависящее от концентрации. Движение паров воды, гравитационное стекание более тяжелого газа, облегченный канал переноса вдоль корней, ветровые условия у поверхности, ... — все это приведет к накоплению вместо  $v_2$  некоторого обобщенного коэффициента «скорости среды». Таким образом, далее нас будет интересовать сопоставимость вклада двух механизмов переноса без детализации составляющих.

Если домножить выражение для потока на массу молекулы  $CO_2$ , то, в силу линейности по  $n_1$ , приходим к массовому потоку (ориентируемся на размерность  $mg/(cm^2s)$ ). Выделив «базовую» температурную зависимость и нормальные условия  $p_0 = 760 \text{ Torr}$ ,  $T_0 = 273 \text{ K}$ , запишем следующее выражение (пока без учета порозности аэрации):

$$J^\circ = -D_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[ \frac{T}{T_0} \right]^{3/2} \frac{\partial C}{\partial z} + v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[ \frac{T}{T_0} \right]^{1/2} C,$$

$\bar{p} = p_{\text{air}}$ ,  $C = C_g$ ,  $[C] = mg/cm^3$ ,  $[T] = K$ . В течение расчетного периода атмосферное давление считаем постоянным ( $p_{\text{air}} = \text{const}$ ). Это давление считаем общим для смеси газов в рассматриваемой толще почвы, имея в виду основные макроканалы переноса  $CO_2$ .

Корневая по температуре зависимость выделена с учетом средней скорости теплового движения молекул. В рамках кинетической теории идеальных газов степень можно уточнить в сторону возрастания ( $1.5 \rightarrow 1.75$ ). Для реальных газов рекомендуется [7, с. 261] округление, так что примем

$$\begin{aligned} J^\circ &= -D(\bar{p}, T) \frac{\partial C}{\partial z} + v(\bar{p}, T) C, \quad (4) \\ D(\bar{p}, T) &\equiv D_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[ \frac{T}{T_0} \right]^2, \quad v(\bar{p}, T) \equiv v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \frac{T}{T_0}. \end{aligned}$$

Колебания атмосферного давления и температуры в почве (с учетом демпфирования лесной подстилкой) относительно малы и степенными зависимостями невысокой степени обычно пренебрегают на фоне экспоненциальных,

характерных для химических реакций. Вместе с тем такое уточнение разумно с точки зрения целостности модели «концентрация–температура–влажность». Величины  $D_0$ ,  $v_0$  будем уже считать не зависящими от  $\bar{p}$ ,  $T$ .

Как указано в [7, с. 267], «в большинстве случаев, за исключением смесей, содержащих водород, термодиффузией можно пренебречь». Тогда, если необходимо отразить реакцию потока на градиент температуры, в (4) следует добавить соответствующее слагаемое ( $D(\bar{p}, T) = D$ ,  $v(\bar{p}, T) = v$ ):

$$\begin{aligned} J^\circ &= -D \frac{\partial C}{\partial z} - D \frac{C}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + v C & (5) \\ &= -D \partial_z C + VC, \\ V &= V(\bar{p}, T, \partial_z T) \equiv v - DT^{-1} \partial_z T. \end{aligned}$$

Здесь следует иметь в виду, что, пренебрегая в добавочном слагаемом собственно механизмом термодиффузии, мы «не теряем» градиент температуры. Солидаризируемся со следующим обоснованным мнением [7, с. 266]. «Мы считаем, что при неизотермической диффузии ... разделения молекулярного потока вещества на поток концентрационной диффузии и термодиффузионный поток делать не следует, а необходимо пользоваться обычным выражением для диффузии, только в качестве движущей силы диффузии считать не концентрацию, а парциальное давление. В этом случае под явлением термодиффузии понимается относительный молекулярный перенос в неоднородных газах (или газовых смесях), вызванный наличием температурного градиента». Появление второго слагаемого в (5) определяется уравнением идеального газа:

$$\begin{aligned} D_g \partial_z p_1 &= D_g \partial_z (n_1 k T) = D_g k T \partial_z n_1 \\ &+ D_g k n_1 \partial_z T \Rightarrow D = D_g k T. \end{aligned}$$

В модели температура  $T = T_d(t, z)$  представлена композицией элементарных функций (1), так что градиент  $\partial_z T(t, z)$  задается явной формулой. Нас будет интересовать каждое слагаемое в формуле (5) как характеристика определенного механизма переноса: молекулярного (диффузионного) и конвективного (в обобщенном смысле). Формально можно величину  $V$  считать «обобщенной скоростью» движения (молярного переноса). По направлению переноса тепла диффундирует и водяной пар, который может «увлекать» с собой значительное количество углекислого газа. Так что смена знака градиента  $\partial_z T(t, z)$  по времени и глубине существенно влияет на общий процесс переноса. Это особенно важно при анали-

зе суточных колебаний температуры и влажности. Кроме того, более тяжелые молекулы  $CO_2$  (из учитываемых газов) диффундируют по направлению потока тепла. Таким образом, учет зависимости  $V$  от градиента  $\partial_z T$  представляется необходимым элементом модели.

### Пористость аэрации

В [20, с. 42] приводится два варианта выбора коэффициента диффузии: “effective”  $D_B$  (при градиенте общей концентрации  $C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta$ ) и “apparent”  $D_s$  (при градиенте концентрации углекислого газа  $C = C_g$  в газовой фазе). Адсорбированный твердой фазой почвы  $CO_2$  считаем «инертным фоном» и не учитываем в динамике в качестве канала переноса. При контакте с влагой он переходит в раствор и косвенно учитывается посредством концентрации  $C_w$ . Иначе следует рассматривать более сложный вариант  $C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta + C_s \zeta$ .

Зависимость  $D_s(\varepsilon)$  имеет некоторые особенности [20, с. 39]: сначала наблюдается медленный рост (плато), а затем резкий взлет. В [13, 17] отмечается, что обычно используют степенную зависимость. Постараемся избежать формальных аппроксимаций полиномами. Воспользуемся физической аналогией.

В среднем плоское сечение единичной площади, перпендикулярное вертикальной оси  $z$ , имеет ту же долю «газового окна»  $\varepsilon$ . В противном случае, используя разбиение на тонкие объемные слои (и составляя интегральную сумму), получили бы отличную от  $\varepsilon$  объемную долю. Поэтому в конструируемой «интегральной» модели не будем делать различия между поверхностной пористостью и объемной, обозначая эти величины одинаково:  $\varepsilon$ ,  $\theta$ .

На самом деле не только сама порозность важна, но и так называемая извилистость порового пространства [20, с. 52]. Рост извилистости (обозначим ее через  $\delta$ ), естественно, уменьшает поток газа. С учетом этого модельную плотность потока запишем в форме  $J = J^\circ \varepsilon / \delta$ . Параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  не являются независимыми. По мере роста среднего размера пор начиная с некоторого момента они лавинообразно соединяются, относительно быстро уменьшается извилистость. По аналогии с активационным характером химических реакций вместо степенной рассмотрим экспоненциальную зависимость (похожую на аррениусовскую):  $\exp\{-a/\varepsilon\}$ ,  $a > 0$ . Добавим нормирующий множитель  $\exp\{a\}$ , чтобы фактор учета порозности аэрации (включая в обобщенном смысле и извилистость поровых каналов)  $\varepsilon/\delta(\varepsilon) \equiv f_\varepsilon = \exp\{a\} \exp\{-a/\varepsilon\} = \exp\{-a/\sigma\}$  принимал единичное значение при формальной подстановке  $\varepsilon = 1$ . Параметр модели  $\sigma \equiv$

$\varepsilon/(1 - \varepsilon) = \varepsilon/(\theta + \zeta)$  играет роль аналога температуры при активации химических реакций. Разумеется, асимптотика  $\varepsilon \rightarrow 1$  соответствует вырождению понятия почвы, так что принятую аппроксимацию следует рассматривать лишь в реальном диапазоне  $\varepsilon$ .

Параметр  $a$  приобретает «активационный» смысл (и можно сравнивать почвы по этому параметру). Обеспечен начальный «период накопления» и взлет с ожидаемым из физических соображений замедлением монотонной  $S$ -образной кривой насыщения (при  $a < 1$  имеется точка перегиба). Характерный вид  $f_\varepsilon$  в зависимости от  $a > 0$  представлен на рис. 2.

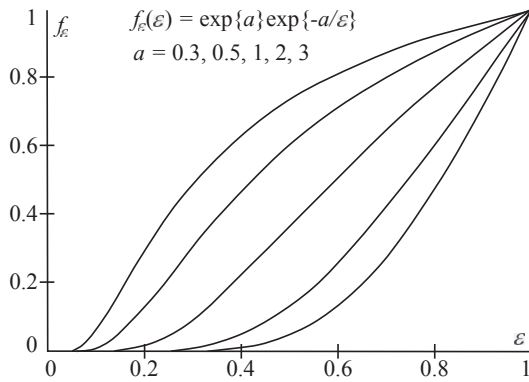


Рис. 2. Фактор порозности аэрации  
Fig. 2. Aeration porosity factor

Если использовать такой множитель при корректировке «идеального» потока (5), то параметры  $D_0$  и  $v_0$  приобретают смысл предельных — в приповерхностном воздушном пространстве при нормальных условиях ( $\{p_0, T_0\}$ ). Это дает возможность ориентироваться по порядку величины на коэффициент диффузии  $CO_2$  в атмосфере. Итак, окончательно примем следующее выражение для плотности потока:

$$J(t, z) = f_\varepsilon(\varepsilon) [-D \partial_z C + VC(t, z)], \quad (6)$$

$$D = D(\bar{p}, T), \quad V = V(\bar{p}, T, \partial_z T),$$

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{a}{\sigma}\right\}, \quad \sigma(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\theta + \zeta}.$$

Здесь уже считаем  $D_0$  и «усредненную конвективную скорость среды»  $v_0$  варьируемыми в разумных пределах параметрами. В первом приближении полагаем  $v_0 = \bar{v} = \text{const}$  для светового дня и ночи, причем знак  $\bar{v}$  не уточняем и выбираем его отдельно ( $\bar{v} = \bar{v}_{d,n}$ ).

**Замечание.** Предполагаем, что в течение рассматриваемых летних суток не происходит дождей и резкой смены установившейся

погоды, распределение влаги по глубине стабильно. Имеет место лишь относительно медленное изменение профиля  $\theta(t, z)$  (уточнение см. далее). Днем происходит некоторое иссушение верхних слоев почвы, в том числе и за счет корневой системы растений. Ночью профиль влаги частично восстанавливается из-за восходящего потока и конденсации паров воды. Незначительный перенос углекислого газа парами воды формально учитывается интегральным конвективным слагаемым в (6) с учетом преобразования  $C_w = \gamma(T)C_g$ . Заметные «гидродинамические» потоки почвенной влаги вглубь отсутствуют, так что таким механизмом переноса растворенного  $CO_2$  в (6) в явной форме пренебрегаем.

### Продуктивность $CO_2$

В уравнении материального баланса выделим две составляющие — транспортное слагаемое и продуктивность верхнего корнеобитаемого слоя почвы:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = \mathcal{F}_{tr} + \mathcal{F}_{pr}, \quad \mathcal{F}_{tr} = -\frac{\partial J}{\partial z}, \quad (7)$$

$$C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta, \quad C \equiv C_g.$$

Характерный вид второго слагаемого (продуктивности)  $Pr = \mathcal{F}_{pr}$  представлен на рис. 3 (где  $[Pr] = \text{mg}/\text{m}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{h}$  как на Fig. 3.9 [20]).

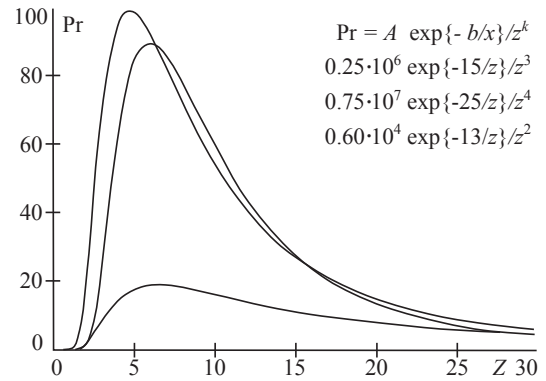


Рис. 3. Продуктивность  $CO_2$   
Fig. 3.  $CO_2$  productivity

Разложение органики, дыхание корней, жизнедеятельность микроорганизмов — сложнейшая задача моделирования (см., например, описание многопараметрической модели ROMUL [15, 19]). Вместе с тем характерный вид продуктивности  $CO_2$ , представленный на рис. 3, прозрачен и его можно постулировать по разрезу почвы. Ясно, на какой глубине максимум, а в лабораторных условиях можно для конкретного типа почвы определить оптимальные температуру и влажность.



В качестве базовой примем в (7) зависимость  $\mathcal{F}_{\text{pr}} = A \exp\{-b/z\}/z^k$ ,  $k > 0$ . Аррениусовский всплеск в подповерхностном слое (температуру и влажность считаем максимально благоприятными) сменяется относительно медленным спадом со степенной скоростью (плотность корней, бактерий, органических веществ быстро падает). Параметры  $A, b, k$  подлежат уточнению в лабораторных условиях.

Остается учесть влияние отклонений температуры и влажности от оптимальных значений. Воспользуемся методологией штрафных функций (или факторов). Вне некоторого промежутка значений объемной влажности продуцирование  $\text{CO}_2$  практически прекращается, следовательно, остается рассмотреть  $\theta \in [\theta_{\min}^0, \theta_{\max}^0]$ . Выберем, следуя [13], фактор влажности в форме:  $\alpha > 1, \beta > 0$ ,

$$f_{\theta}(\theta) = \left[ \frac{\theta - \theta_{\min}^0}{\hat{\theta} - \theta_{\min}^0} \right]^{\alpha} \cdot \left[ \frac{\theta_{\max}^0 - \theta}{\theta_{\max}^0 - \hat{\theta}} \right]^{\beta} \quad (8)$$

Значение  $\hat{\theta} = [\alpha\theta_{\max}^0 + \beta\theta_{\min}^0]/[\alpha + \beta]$  оптимальной влажности (при благоприятной температуре), для которой  $f_{\max} = f_{\theta}(\hat{\theta}) = 1$ , задается из опытных данных. Варьируемым параметром является  $\alpha > 1$ , а значение  $\beta > 0$  вычисляется по заданным  $\hat{\theta}, \alpha$ . Условие  $\alpha > 1$  обеспечивает более «плавную» восходящую ветвь в силу  $f_{\theta}(\theta_{\min}^0) = f'_{\theta}(\theta_{\min}^0) = 0$ . Характерный вид функции  $f_{\theta}$  представлен на рис. 4. Для примера  $\theta_{\min}^0 = 0.1, \theta_{\max}^0 = 0.8, \hat{\theta} = 0.5, 0.6$ .

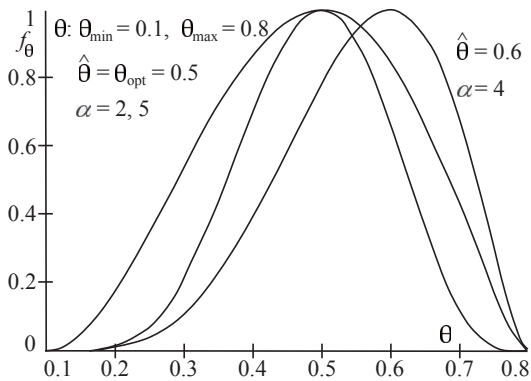


Рис. 4. Зависимость фактора  $f_{\theta}$  от  $a = \alpha$   
Fig. 4. Dependence of the factor  $f_{\theta}$  on the  $a = \alpha$

Аналогичным образом определяется фактор  $f_T(T)$ , и тогда продуктивность принимает форму зависимости

$$\mathcal{F}_{\text{pr}} = f_{\theta}(\theta) f_T(T) A \exp\{-bz^{-1}\} z^{-k}, \quad (9)$$

$$\theta = \theta(t, z), \quad T = T(t, z).$$

В (9) не будем формально использовать фактор порозности аэрации  $f_{\varepsilon}$ , поскольку это лишь одна из многих дополнительных характеристик, влияющих на продуктивность «жизнеобитаемого» слоя («паспорт» слоя будет определяться значениями  $A, b, k$ ).

Если участок леса открытый и травянистая растительность достаточно развита, то необходимо дополнительно учесть световой фактор:

$$f_L(t) = L_0 + (1 - L_0) \left[ \frac{t}{t_L} \right]^p \cdot \left[ \frac{t_* - t}{t_* - t_L} \right]^q, \quad (10)$$

где принято  $p > 1, q > 0$ , « $L = \text{Light}$ »,  $t_L: f_{\max} = f_L(t_L) = 1, t_*$  — суточный период времени (до начала следующего светового дня). В июле в условиях белых ночей можно в (10) принять  $t_L = t_*/2$  (6 часов вечера). При этом  $q = q(p, t_L)$  аналогично (8). Значение «минимального уровня»  $L_0 > 0$  соответствует заметному продуцированию  $\text{CO}_2$  в течение суток, даже ночью (иначе  $L_0 = 0$ ).

#### Динамика $\varepsilon(t, z)$ и $\theta(t, z)$

Один из характерных вариантов зависимости порозности аэрации и объемной влажности от глубины представлен в [20, с. 40]: порозность монотонно убывает, а влажность растет (с выходом на асимптоты). Величины  $\varepsilon, \theta$  связаны соотношением  $\varepsilon + \theta + \zeta = 1$ , где  $\zeta$  — объемная доля сухого вещества почвы. Целесообразно экспериментально определять  $\theta$  и  $\zeta$ , а уже затем вычислять  $\varepsilon$ . Если воспринимать влагу как питательный ресурс, то по аналогии можно воспользоваться часто используемыми в микробиологии и биохимии функциями Моно (Михаэлиса–Ментен) [10, с. 18] вида  $\theta = \theta_{\max} z/[z + h]$ . Это кривая насыщения, параметр  $h$  имеет смысл глубины, на которой функция достигает половины «асимптотического» максимума. Впрочем, такая же функция используется и при описании зависимости средней длины свободного пробега от температуры в газовой динамике:  $\lambda = \lambda_{\infty} T/[T + \text{const}]$  (формула Сезерленда [11, с. 377]). Можно добавить в знаменателе «ингибирующее» слагаемое вида  $rz^2$  [10, с. 30], которое даст возможность моделировать максимум на определенной глубине (следствие прошедшего накануне дождя) или использовать более «плавную» квадратичную зависимость (см. рис. 5, 6).

Целесообразно отразить зависимость объемной влажности от времени  $h = h(t)$ , поскольку происходят интенсивные процессы испарения, жизнедеятельности микроорганизмов и корневой системы (гравитационное стекание влаги уже практически прекратилось). В частности, днем  $\theta(t, z) = \theta_{\max} z/[z + h(t)]$

с монотонно растущей функцией  $h(t)$ , например,  $h(t) = h_0 + v_h t$ ,  $v_h = v_{h,d} > 0$ . Тогда достижение половины максимума будет во времени сдвигаться вглубь почвы, что соответствует процессу «оседания» уровня влаги. В ночной период  $v_h = v_{h,n} < 0$  и происходит частичное восстановление влажности.

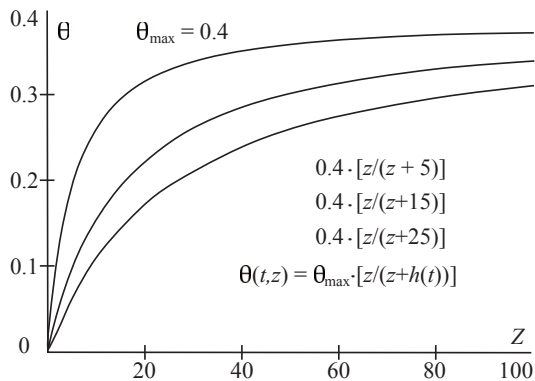


Рис. 5. Зависимость  $\theta$  от параметра  $b = h$   
Fig. 5. Dependence of  $\theta$  on the parameter  $b = h$

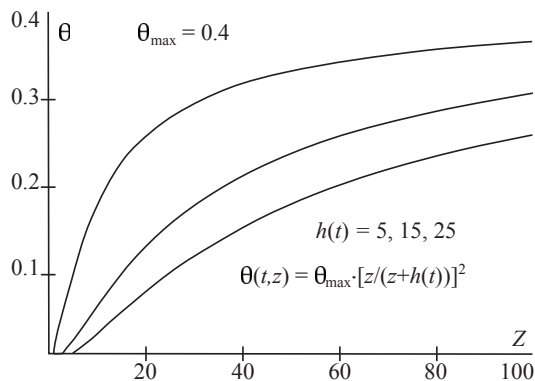


Рис. 6. Динамика квадратичной зависимости  $\theta$   
Fig. 6. The dynamic of  $\theta$  quadratic dependence

Это простейший вариант моделирования динамики  $\theta(t, z)$ . Использование теории движения почвенной влаги [8] существенно усложнило бы модель. Параметр скорости оседания влаги  $v_h$  зависит от интенсивности процессов испарения и поглощения корневой системой. Детализация этих процессов является сложной самостоятельной проблемой. Измерения влажности и температуры (по глубине и в динамике) для рассматриваемого класса песчаных почв значительно более доступны по сравнению с «трудноуловимой» газовой фазой. Это позволяет не усложнять модель.

### Начальные и граничные условия

Начало отсчета времени соответствует началу светового дня (началу нагрева почвы,

условно 6 часов утра). Начальные условия генерируются с помощью тех же функций насыщения (аналогично зависимостям, представленным на рис. 5, 6) по экспериментальным данным. За ночь происходит «разгрузка» профиля концентрации, график концентрации становится монотонным по глубине.

Граничные условия для краевой задачи принимаем первого рода: задаются концентрации  $CO_2$  на глубине 1–2 метра (стабильное значение, которое можно установить экспериментально) и у поверхности (атмосферный уровень углекислого газа).

Измеряются показатели температуры, объемной влажности и поток  $CO_2$  с поверхности почвы в атмосферу. По этим данным требуется настроить (идентифицировать) параметры модели. Поставленная цель моделирования: сопоставить диффузионную и конвективную составляющие потока и оценить, какая часть продуцирования углекислого газа относится к стоку в атмосферу, а какая достигает грунтовых вод и способна к депонированию.

По порозности аэрации на «контрольной глубине» (плоское горизонтальное сечение поделится на части в соответствии с объемными показателями  $\varepsilon$ ,  $\theta$  и  $\zeta$ ) можно оценить газовую составляющую потока  $CO_2$  вглубь, а показания лизиметров дадут представление о потоке растворенного углекислого газа в почвенной влаге после интенсивных осадков. Эту информацию следует учесть при решении обратной задачи параметрической идентификации модели, при подсчете концентраций и материального баланса потоков.

*Финансирование исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Даркен Л. С., Гурри Р. В. Физическая химия металлов. М., 1960. 585 с.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 457 с.
3. Кириченко П. А. Термодинамика, статистическая и молекулярная физика. М.: Физматкнига, 2005. 176 с.
4. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969. 402 с.

5. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика // Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теор. физика. Т. X. М.: Наука, 1979. 528 с.
6. Лыков А. В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.
7. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: ГИТТЛ, 1954. 298 с.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
9. Полуэктов Р. А., Смоляр Э. И., Тарлеев В. В., Топаж А. Г. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: СПбГУ, 2006. 396 с.
10. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: ИКИ-РХД, 2003. 184 с.
11. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. I. М.: Наука, 1970. 511 с.
12. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
13. Смагин А. В. Газовая фаза почв. М.: МГУ, 2005. 301 с.
14. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Матем. моделирование. М.: Физматлит, 2005. 232 с.
15. Чертов О. Г., Комаров А. С., Надпорожская М. А., Михайлов А. В., Быховец С. С.,

Зудин С. Л., Зубкова Е. В. Динамическое моделирование процессов трансформации органического вещества почв. Имитационная модель ROMUL. СПб.: СПбГУ, 2007. 96 с.

16. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
17. Шейн Е. В. Курс физики почв. М.: МГУ, 2005. 432 с.
18. Шейн Е. В., Рыжова И. М. Математическое моделирование в почвоведении. М., 2016. 377 с.
19. Komarov A., Chertov O., Bykhovets S., Shaw C., Nadporozhskaya M., Frolov P., Shashkov M., Shanin V., Grabarnik P., Pripulina I., Zubkova E. Romul Hum model of soil organic matter formation coupled with soil biota activity. I. Problem formulation, model description, and testing // Ecological Modelling. 2017. Vol. 345. P. 113–124. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2016.08.007
20. Richter J. The Soil as a Reactor: Modelling Processes in the Soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.
21. Zaika Yu. V., Bakhmet O. N. Boundary value problem of CO<sub>2</sub> production and transport in forest sandy soil // In: A Closer Look at Boundary Value Problems, New York: Nova Science Publishers, 2020.

Поступила в редакцию 10.05.2020

## REFERENCES

1. Darken L. S., Gurri R. V. Fizicheskaya khimiya metallov [Physical chemistry of metals]. Moscow, 1960. 585 p.
2. Zommerfel'd A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki [Differential equations in partial derivatives in physics]. Moscow: IL, 1950. 457 p.
3. Kirichenko P. A. Termodinamika, statisticheskaya i molekulyarnaya fizika [Thermodynamics, statistical and molecular physics]. Moscow: Fizmatkniga, 2005. 176 p.
4. Landau L. D., Akhiezer A. I., Lifshits E. M. Kurs obshchei fiziki. Mekhanika i molekulyarnaya fizika [A course of general physics. Mechanics and molecular physics]. Moscow: Nauka, 1969. 402 p.
5. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. Fizicheskaya kinetika [Physical kinetics]. Landau L. D., Lifshits E. M. Teor. fizika [Theoretical physics]. Vol. X. Moscow: Nauka, 1979. 528 p.
6. Lykov A. V. Teplomassoobmen [Heat and mass exchange]. Moscow: Energiya, 1978. 480 p.
7. Lykov A. V. Yavleniya perenosa v kapillyarno-poristykh telakh [Transport phenomena in capillary-porous bodies]. Moscow: GITTL, 1954. 298 p.

8. Polubarinova-Kochina P. Ya. Teoriya dvizheniya gruntovykh vod [Groundwater theory]. Moscow: Nauka, 1977. 664 p.

9. Poluektov R. A., Smolyar E. I., Tarleev V. V., Topazh A. G. Modeli produktsionnogo protsesssa sel'skokhozyaistvennykh kul'tur [Models of the productional process in crops]. St. Petersburg: SPbGU, 2006. 396 p.
10. Riznichenko G. Yu. Matematicheskie modeli v biofizike i ekologii [Mathematical models in biophysics and ecology]. Moscow; Izhevsk: IKI-RKhD, 2003. 184 p.
11. Savel'yev I. V. Kurs obshchei fiziki [A course of general physics]. Vol. I. Moscow: Nauka, 1970. 511 p.
12. Sivukhin D. V. Obshchii kurs fiziki. T. II. Termodinamika i molekulyarnaya fizika [A general physics course. Thermodynamics and molecular physics]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 544 p.
13. Smagin A. V. Gazovaya faza pochv [Gaseous phase of soils]. Moscow: MGU, 2005. 301 p.
14. Tarko A. M. Antropogennye izmeneniya global'nykh biosfernykh protsessov. Matem. modelirovanie [Man-induced changes in global biospheric processes. Mathematical modelling]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 232 p.

15. Chertov O. G., Komarov A. S., Nadporozhskaya M. A., Mikhailov A. V., Bykhovets S. S., Zudin S. L., Zubkova E. V. Dinamicheskoe modelirovanie protsessov transformatsii organicheskogo veshchestva pochv. Imitatsionnaya model' ROMUL [Dynamic modelling of transformation processes of organic matter in soils. ROMUL simulation model]. St. Petersburg: SPbGU, 2007. 96 p.
16. Chudnovskii A. F. Teplofizika pochv [Thermal physics]. Moscow: Nauka, 1976. 352 p.
17. Shein E. V. Kurs fiziki pochv [A course of soil physics]. Moscow: MGU, 2005. 432 p.
18. Shein E. V., Ryzhova I. M. Matematicheskoe modelirovanie v pochvovedenii [Mathematical modelling in soil science]. Moscow, 2016. 377 c.
19. Komarov A., Chertov O., Bykhovets S., Shaw C., Nadporozhskaya M., Frolov P., Shashkov M., Shanin V., Grabarnik P., Pripulina I., Zubkova E. Romul Hum model of soil organic matter formation coupled with soil biota activity. I. Problem formulation, model description, and testing. *Ecological Modelling*. 2017. Vol. 345. P. 113–124. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2016.08.007
20. Richter J. The Soil as a Reactor: Modelling Processes in the Soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.
21. Zaika Yu. V., Bakhmet O. N. Boundary value problem of  $CO_2$  production and transport in forest sandy soil. *A Closer Look at Boundary Value Probl.* New York: Nova Science Publishers, 2020.

Received May 10, 2020

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

### **Заика Юрий Васильевич**

руководитель лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 780059

### **Бахмет Ольга Николаевна**

председатель КарНЦ РАН, член-корр. РАН, д. б. н.  
Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: bahmet@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 766040

## CONTRIBUTORS:

### **Zaika, Yury**

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: zaika@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 780059

### **Bakhmet, Olga**

Department of Multidisciplinary Scientific Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: bahmet@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 766040