Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 89–97
DOI: 10.17076/mat1236

УДК 519.179.4

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЕРЕВА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Е. В. Хворостянская

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматривается критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с N частиц, число прямых потомков которого имеет распределение $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Для соответствующего леса Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами получено предельное распределение максимального объема дерева при $N, n \to \infty$ так, что $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона; случайный лес; максимальный объем дерева; предельное распределение.

E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON-WATSON FOREST

We consider the critical Galton – Watson branching process starting with N particles where the number of direct descendants has a distribution $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ For the corresponding Galton – Watson forest with N trees and n non-root vertices the limit distribution of the maximum tree size is obtained as $N, n \to \infty$ such that $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

K e y w o r d s: Galton – Watson branching process; random forest; maximum tree size; limit distribution.

Пусть G_N – критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся в момент времени $t = 0$ с N частиц, в котором число прямых потомков одной частицы задается случайной величиной ξ с распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \ p_0 > 0. \quad (1)$$

Совокупность траекторий процесса Гальтона – Ватсона G_N с соответствующим распределением вероятностей называется лесом Гальтона – Ватсона с N деревьями и является частным случаем случайного леса. Обозначим такой лес через $\mathfrak{F}_N$. Будем считать, что начальные частицы процесса G_N и, следовательно, деревья в лесе $\mathfrak{F}_N$ занумерованы числами $1, \ldots, N$.

Исходный процесс G_N индуцирует на подмножестве $F_{N,n}$ траекторий процесса G_N, имеющих $N + n$ вершин, условное распределение вероятностей при условии, что число вершин равно $N + n$. Построенный таким образом лес Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами обозначим через $\mathfrak{F}_{N,n}$. Подробно такие леса изучались в [4].

В частности, при условии существования конечного третьего момента распределения (1) и $N, n \to \infty$ получено полное описание предельного поведения максимального объема дерева, числа деревьев заданного объема, высоты дерева. Некоторые другие характеристики таких лесов рассматривались также в [6, 8, 10]. В [2] доказано, что условие $\mathbf{E}\xi^3 < \infty$ можно заменить более слабым: $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. В настоящей работе приводится пример случайного леса Гальтона – Ватсона $\mathfrak{F}_{N,n}$, в котором распределение (1) имеет только конечный первый момент. Главным результатом статьи является предельная теорема о максимальном объеме дерева в таком случайном лесе. При решении использован подход, предложенный в книге [4], а также результаты работы [1].

Пусть число прямых потомков одной частицы ветвящегося процесса G_N имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{(k+1)^\tau} - \frac{1}{(k+2)^\tau}, \qquad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ Идея рассмотреть такой ветвящийся процесс появилась в связи с тем, что ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона находят применение при исследовании Интернет-графов [9], а одной из наиболее известных и изученных моделей графа Интернет-типа [7, 11] является модель, в которой степени вершин имеют распределение

$$q_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Сдвиг на 1 в распределении (2) обусловлен необходимостью существования траекторий ветвящегося процесса с ограниченным числом частиц, поскольку в рассматриваемой модели число некорневых вершин в лесе Гальтона – Ватсона равно n.

Учитывая (2), несложно показать, что

$$m = \mathbf{E}\xi = \zeta(\tau) - 1,$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Поскольку ветвящийся процесс G_N является критическим, выполнено равенство $m = 1$, из которого следует, что значение параметра τ определяется соотношением $\zeta(\tau) = 2$ и находится в пределах $1 < \tau < 2$.

Обозначим через $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \ldots, \nu_N(\mathfrak{F})$ случайные величины, равные объемам деревьев леса $\mathfrak{F}_{N,n}$.

Согласно [4], классу лесов $\mathfrak{F}_{N,n}$ соответствует ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона G, распадающийся на N независимых процессов $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(N)}$, начинающихся с одной частицы, в котором случайные величины $\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots$, равные числу прямых потомков одной частицы, имеют распределение

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \lambda \leqslant 1, \qquad (4)$$

где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \qquad (5)$$

Обозначим через $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(N)}$ независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числу частиц, существовавших в процессах $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(N)}$ до их вырождения, и пусть ν – случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе G до его вырождения:

$$\nu = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \ldots + \nu^{(N)}.$$

В [4] показано, что справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \ldots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N\} \qquad (6)$$

$$= \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k_1, \ldots, \nu^{(N)} = k_N | \nu = N + n\right\}.$$

Равенство (6) означает, что случайные величины $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \ldots, \nu_N(\mathfrak{F})$ и $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(N)}$ образуют обобщенную схему размещения [3], и позволяет свести задачу к изучению сумм независимых случайных величин, при этом параметр распределения независимых случайных величин может быть выбран любым наиболее удобным способом. Далее, если не указано дополнительно, будем считать, что параметр λ распределения (4) равен решению уравнения

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \qquad (7)$$

Пусть $\eta(\mathfrak{F})$ – случайная величина, равная максимальному объему дерева в лесе из $\mathfrak{F}_{N,n}$:

$$\eta(\mathfrak{F}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \nu_k(\mathfrak{F}).$$

Через $C, C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать произвольные положительные постоянные.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $N, n, r \to \infty$ так, что $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$,*

$$\frac{N\lambda a^r \Gamma(1/\tau)\cos(\pi(2-\tau)/2\tau)}{r^{1+1/\tau}\pi\tau\left(\Gamma(1-\tau)\cos(\pi\tau/2)\right)^{1/\tau}} \to \gamma, \qquad (8)$$

где $a = \lambda/F(\lambda)$, γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leqslant r + k + 1\} \to e^{-\gamma a^{k+1}/(1-a)}.$$

Докажем сначала вспомогательные утверждения (леммы 1–7), а затем с их помощью получим теорему 1.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_r^{(1)},\ldots,\nu_r^{(N)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\left\{\nu_r^{(i)}=k\right\}=\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)}=k|\nu^{(1)}\leqslant r+1\right\}, \quad (9)$$

где $i=1,\ldots,N,\ k=1,2,\ldots$

Обозначим $\nu_r=\nu_r^{(1)}+\ldots+\nu_r^{(N)}$, $P_r=\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)}>r+1\right\}$. Из (6) следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F})\leqslant r+1\}=(1-P_r)^N\frac{\mathbf{P}\{\nu_r=N+n\}}{\mathbf{P}\{\nu=N+n\}}. \quad (10)$$

Таким образом, для получения предельного распределения случайной величины $\eta(\mathfrak{F})$ достаточно найти асимптотику бинома $(1-P_r)^N$ и вероятностей $\mathbf{P}\{\nu_r=N+n\}$, $\mathbf{P}\{\nu=N+n\}$.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_N$ имеют распределение (2), $\eta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$, $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_1.

Лемма 1. *При $N\to\infty$, $1<\tau<2$*

$$\sup_k\left|N^{1/\tau}\mathbf{P}\{\eta_N=k\}-g\left(\frac{k-Nm}{N^{1/\tau}}\right)\right|\to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t)=\exp\left\{-\Gamma(1-\tau)|t|^\tau\left(1-\frac{it}{|t|}\tan\frac{\pi\tau}{2}\right)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right\}.$$

Доказательство. При $|x|\to\infty$ для функции распределения $F_1(x)$ случайной величины ξ_1 выполнены соотношения

$$F_1(x)=0,\ x<0,$$

$$F_1(x)=1-\frac{1+o(1)}{x^\tau},\ x>0,$$

и по теореме 2.6.1 [1] при $0<\tau<2$ распределение случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем τ. В [5] показано, что при $t\to 0$ для характеристической функции $\widetilde{\varphi}(t)$ случайной величины $\widetilde{\xi}$, имеющей распределение (3), выполнено соотношение

$$\widetilde{\varphi}(t)=1+it\zeta(\tau)-(-it)^\tau\Gamma(1-\tau)+O\left(t^2\right).$$

Отсюда и из равенства $\varphi(t)=e^{-it}\widetilde{\varphi}(t)$ получаем, что для любого фиксированного t

$$\ln\left(\varphi^N\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)\right)$$
$$=\frac{itNm}{N^{1/\tau}}-(-it)^\tau\Gamma(1-\tau)+O\left(N^{1-2/\tau}\right).$$

С помощью этого соотношения находим, что для характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\eta_N-Nm)/N^{1/\tau}$ при любом фиксированном t справедливо равенство

$$\ln\psi(t)=-(-it)^\tau\Gamma(1-\tau)+o(1)$$
$$=-\Gamma(1-\tau)\cos\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)|t|^\tau\left(1-\frac{it}{|t|}\tan\frac{\pi\tau}{2}\right)+o(1).$$

Отсюда с помощью теорем 2.2.2, 4.2.1 [1] получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Для произвольного распределения $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ такого, что $p_0>0$, $F'(1)=1$, при $N,\ n\to\infty$ существует единственное решение λ^* уравнения (7) и*

1. *$\lambda^*\to 0$, если $n/N\to 0$;*
2. *$0<C_3\leqslant\lambda^*\leqslant C_4<1$, если $0<C_5\leqslant n/N\leqslant C_6<\infty$;*
3. *$\lambda^*\to 1$, если $n/N\to\infty$.*

Доказательство. Пусть $m(\lambda)=\lambda F'(\lambda)/F(\lambda)$. Нетрудно видеть, что

$$m'(\lambda)=\frac{R(\lambda)}{F^2(\lambda)},$$

где

$$R(\lambda)=\left(F'(\lambda)+\lambda F''(\lambda)\right)F(\lambda)-\lambda\left(F'(\lambda)\right)^2.$$

Используя (5), находим, что

$$R(\lambda)=\sum_{k=0}^\infty(k+1)^2p_{k+1}\lambda^k\sum_{k=0}^\infty p_k\lambda^k$$
$$-\sum_{k=1}^\infty kp_k\lambda^k\sum_{k=0}^\infty(k+1)p_{k+1}\lambda^k=\sum_{k=0}^\infty r_k\lambda^k,$$

где

$$r_0=p_0p_1,\ r_1=2^2p_0p_2,$$
$$r_2=3^2p_0p_3+p_1p_2,\ r_3=4^2p_0p_4+2^2p_1p_3,$$

$$r_{2s}=(2s+1)^2p_0p_{2s+1}+(2s-1)^2p_1p_{2s}$$
$$+(2s-3)^2p_2p_{2s-1}+\ldots+p_sp_{s+1},\ s=2,3,\ldots,$$

$$r_{2s-1} = (2s)^2 p_0 p_{2s} + (2s-2)^2 p_1 p_{2s-1}$$
$$+ (2s-4)^2 p_2 p_{2s-2} + \ldots + 2^2 p_{s-1} p_{s+1}, \; s = 3, 4, \ldots$$

Легко видеть, что для любого $\lambda > 0$ выполнено неравенство $R(\lambda) > 0$. Значит, $m(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda > 0$ и, поскольку функция $m(\lambda)$ непрерывна, уравнение $m(\lambda) = n/(N+n)$ имеет единственное решение. Отсюда нетрудно получить утверждение леммы, учитывая, что $m(0) = 0$, $m(1) = 1$.

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы 1 для любого целого фиксированного k*

$$NP_{r+k} \to \gamma a^{k+1}(1-a)^{-1}.$$

Доказательство. С помощью леммы 1.3.4 [4] находим, что

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r+1}{r+k+1+l}$$
$$\times \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1(\lambda) + \ldots + \xi_{r+k+1+l}(\lambda) = r+k+l\right\}}{\mathbf{P}\left\{\xi_1(\lambda) + \ldots + \xi_{r+1}(\lambda) = r\right\}}.$$

Используя (4), получаем равенство

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l (r+1)\mathbf{P}\left\{\eta_{r+k+1+l} = r+k+l\right\}}{(r+k+1+l)\mathbf{P}\left\{\eta_{r+1} = r\right\}},$$

где $a = \lambda/F(\lambda)$. С помощью леммы 1 при $r \to \infty$ и $m = 1$ отсюда находим, что

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l r^{1+1/\tau} g\left(-(r+k+1+l)^{-1/\tau}\right)(1+o(1))}{(r+k+l)^{1+1/\tau} g\left(-(r+1)^{-1/\tau}\right)}$$
$$= N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l r^{1+1/\tau}(1+o(1))}{(r+k+l)^{1+1/\tau}}.$$

Учитывая лемму 2, несложно показать, что $a < 1$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty} a^l \left(\frac{r}{r+k+l}\right)^{1+1/\tau} = \frac{a}{1-a} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

и выполнено соотношение

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} \frac{a^{k+1}}{1-a}(1+o(1)). \quad (11)$$

С помощью леммы 1.3.4 [4] и леммы 1 получаем, что при $r \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} = \frac{\lambda a^r}{r+1}\mathbf{P}\left\{\eta_{r+1} = r\right\} \quad (12)$$
$$= \frac{\lambda a^r g\left(-r^{-1/\tau}\right)}{r^{1+1/\tau}}(1+o(1)).$$

Используя равенство (2.3.1) и теорему 2.4.5 [1], можно показать, что при $x < 0$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\left(\Gamma(1-\tau)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right)^{-1/\tau} \quad (13)$$
$$\times \left(\frac{\Gamma(1/\tau)}{\tau}\cos\frac{\pi(2-\tau)}{2\tau} + R(x)\right),$$

где

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\tau}\right)}{\tau k!}(-x)^k \left(\Gamma(1-\tau)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right)^{-k/\tau}$$
$$\times \cos\left(\frac{\pi k}{2}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{2-\tau}{\tau}\right)\right).$$

Нетрудно проверить, что

$$|R(x)| \leqslant C_7 \sum_{k=1}^{\infty} (C_8 |x|)^k$$

и, следовательно, $R(x) = O(x)$ при $x \to 0$. Отсюда и из (12), (13) получаем, что при выполнении условий леммы

$$\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} = \frac{\lambda a^r}{r^{1+1/\tau}} \quad (14)$$
$$\times \frac{\Gamma(1/\tau)\cos\frac{\pi(2-\tau)}{2\tau}(1+o(1))}{\pi\tau\left(\Gamma(1-\tau)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right)^{1/\tau}} = \frac{\gamma}{N}(1+o(1)).$$

Из (11), (14) следует утверждение леммы.

Обозначим

$$m(\lambda) = \mathbf{E}\xi_1(\lambda), \; \sigma^2(\lambda) = \mathbf{D}\xi_1(\lambda),$$

$$\eta_s(\lambda) = \xi_1(\lambda) + \ldots + \xi_s(\lambda),$$

и пусть $\varphi_\lambda(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\xi_1(\lambda)$, $\varphi_s(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\left(\eta_s(\lambda) - sm(\lambda)\right)/\sigma(\lambda)\sqrt{s}$. Нетрудно видеть, учитывая (4), что

$$m(\lambda) = \lambda F'(\lambda)/F(\lambda). \quad (15)$$

Лемма 4. *При $s \to \infty$ и $0 < C_9 \leqslant \lambda \leqslant C_{10} < 1$ равномерно по t в любом конечном интервале*

$$\varphi_s(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Учитывая (4), легко получить равенство

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda) = \frac{F\left(\lambda e^{it}\right)}{F(\lambda)}.$$

Используя это соотношение и (2), можно показать, что

$$(\ln \varphi_\lambda(t))' = \frac{iS_1\left(\lambda e^{it}\right)}{F\left(\lambda e^{it}\right)},$$

$$(\ln \varphi_\lambda(t))'' = -\frac{S_2\left(\lambda e^{it}\right)}{F\left(\lambda e^{it}\right)} + \left(\frac{S_1\left(\lambda e^{it}\right)}{F\left(\lambda e^{it}\right)}\right)^2, \quad (16)$$

$$(\ln \varphi_\lambda(t))''' = -\frac{iS_3\left(\lambda e^{it}\right)}{F\left(\lambda e^{it}\right)} \quad (17)$$

$$+\frac{3iS_1\left(\lambda e^{it}\right) S_2\left(\lambda e^{it}\right)}{F^2\left(\lambda e^{it}\right)} - 2i\left(\frac{S_1\left(\lambda e^{it}\right)}{F\left(\lambda e^{it}\right)}\right)^3,$$

где

$$S_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k p_k = -(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} \quad (18)$$

$$+(2-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}},$$

$$S_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k p_k = -(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} \quad (19)$$

$$+(4-2z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} - (4-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}},$$

$$S_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k p_k = -(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-3}}$$

$$+(6-3z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} \quad (20)$$

$$-(12-3z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} + (8-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)^{\tau}}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < z < 1$ выполнены неравенства

$$0 < C_{11} \leqslant S_i(z) \leqslant C_{12} < \infty, \ i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Учитывая равенства $(\ln \varphi_\lambda(t))'_{t=0} = im(\lambda)$ и $(\ln \varphi_\lambda(t))''_{t=0} = -\sigma^2(\lambda)$, по формуле Тейлора находим, что в окрестности $t_0 = 0$

$$\ln \varphi_\lambda(t) = im(\lambda)t - \frac{\sigma^2(\lambda)}{2}t^2 + \frac{(\ln \varphi_\lambda(t))'''_{t=t_1}}{6}t^3, \quad (22)$$

где $|t_1| < \varepsilon$, ε – сколь угодно малое положительное число.

Из равенств $\sigma^2(\lambda) = -(\ln \varphi_\lambda(t))''_{t=0}$, (16), (21) получаем соотношение

$$0 < C_{13} \leqslant \sigma^2(\lambda) \leqslant C_{14} < \infty. \quad (23)$$

Тогда при $s \to \infty$ для любого фиксированного t с помощью (22) находим, что

$$\ln \varphi_s(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3\left(\ln \varphi_\lambda\left(t/\sigma(\lambda)\sqrt{s}\right)\right)'''}{6\sigma^3(\lambda)\sqrt{s}}. \quad (24)$$

Поскольку $0 < C_9 \leqslant \lambda \leqslant C_{10} < 1$, из (17), (21) следует, что при $s \to \infty$ для любого фиксированного t справедлива оценка

$$\left|\left(\ln \varphi_\lambda\left(t/\sigma(\lambda)\sqrt{s}\right)\right)'''\right| \leqslant C_{15} < \infty. \quad (25)$$

Из (24), (25) получаем утверждение леммы.

Лемма 5. *При $s \to \infty$ и $0 < C_9 \leqslant \lambda \leqslant C_{10} < 1$ для целых неотрицательных l равномерно относительно $u_s = (l - m(\lambda)s)/\sigma(\lambda)\sqrt{s}$ в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\left\{\eta_s(\lambda) = l\right\} = \frac{e^{-u_s^2/2}}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi s}}(1 + o(1)).$$

Доказательство. По формуле обращения справедливы равенства

$$2\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}\mathbf{P}\left\{\eta_s(\lambda) = l\right\} = \int_{-\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}}^{\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s}\varphi_s(t)dt,$$

$$\sqrt{2\pi}e^{-u_s^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_s}e^{-t^2/2}dt.$$

Разность

$$R_s = 2\pi\left(\sigma(\lambda)\sqrt{s}\mathbf{P}\left\{\eta_s(\lambda) = l\right\} - \frac{e^{-u_s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

представим в виде суммы $R_s = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itu_s}\left(\varphi_s(t) - e^{-t^2/2}\right)dt,$$

$$I_2 = -\int\limits_{|t|>A} e^{-itu_s} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s} \varphi_s(t) dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon\sigma(\lambda)\sqrt{s}<|t|\leqslant\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s} \varphi_s(t) dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

С помощью леммы 4 получаем, что $I_1 \to 0$ при выполнении условий леммы для любого фиксированного A.

Для интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant 2 \int\limits_A^\infty e^{-t^2/2} dt, \qquad (26)$$

и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Нетрудно видеть, что при достаточно малых ε для $|t|/\sigma(\lambda)\sqrt{s} < \varepsilon$ выполнены соотношения (24), (25), из которых при $s \to \infty$ следует, что $\ln \varphi_s(t) = -t^2(1+R)/2$, где $|R| \leqslant C_{16}\varepsilon$. Тогда $|\varphi_s(t)| \leqslant e^{-C_{17}t^2}$ и интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

Пусть $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$. Поскольку максимальный шаг распределения (4) равен 1 и характеристическая функция $\varphi_\lambda(t)$ непрерывно зависит от λ, $0 < C_9 \leqslant \lambda \leqslant C_{10} < 1$, имеет место оценка $|\varphi_\lambda(t)| \leqslant e^{-C_{18}}$. Тогда

$$|I_4| \leqslant 2\sigma(\lambda)\sqrt{s} \int\limits_\varepsilon^\pi e^{-sC_{18}} dt \leqslant 2\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s} e^{-sC_{18}}$$

и, учитывая (23), нетрудно видеть, что $I_4 \to 0$ при $s \to \infty$.

Из полученных оценок интегралов I_1–I_4 находим, что разность R_s можно сделать сколь угодно малой при $s \to \infty$, откуда и следует утверждение леммы.

Обозначим через $\psi_r(u)$ характеристическую функцию случайной величины $\left(\nu_r - N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ и, следуя доказательству лемм 2.4.1, 2.4.2 [4], получим предельное распределение этой случайной величины.

Лемма 6. *При выполнении условий теоремы 1 равномерно относительно и в любом конечном интервале*

$$\psi_r(u) \to e^{-u^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi^{(1)}(u)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu^{(1)}$ и найдем разложение $\ln\varphi^{(1)}(u)$ по формуле Тейлора в окрестности $u_0 = 0$. Согласно лемме 1.3.2 [4] для производящей функции $f_1(z)$ случайной величины $\nu^{(1)}$ справедливо равенство

$$f_1(z) = zF_\lambda\left(f_1(z)\right),$$

где

$$F_\lambda(u) = \sum_{k=0}^\infty p_k(\lambda)u^k = \frac{F(\lambda u)}{F(\lambda)}. \qquad (27)$$

С помощью этих равенств и соотношения $\varphi^{(1)}(u) = f_1\left(e^{iu}\right)$ находим, что

$$\varphi^{(1)}(u) = \frac{e^{iu}F(\lambda\varphi^{(1)}(u))}{F(\lambda)}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\varphi^{(1)}(u)\right)' = \frac{i\varphi^{(1)}(u)}{1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)},$$

$$\left(\ln\varphi^{(1)}(u)\right)' = \frac{i}{1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}, \qquad (28)$$

$$\left(\ln\varphi^{(1)}(u)\right)'' = -\frac{e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^2} - \frac{e^{iu}\varphi^{(1)}(u)F''_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^3}, \qquad (29)$$

$$\begin{aligned}\left(\ln\varphi^{(1)}(u)\right)''' = {} & \frac{ie^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^2} - \frac{2ie^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^3} \\ & - \frac{3ie^{iu}\varphi^{(1)}(u)F''_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^4} - \frac{ie^{iu}\left(\varphi^{(1)}(u)\right)^2F'''_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^4} \\ & - \frac{3ie^{2iu}\varphi^{(1)}(u)F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)F''_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^4} \\ & - \frac{3ie^{2iu}\left(\varphi^{(1)}(u)\right)^2\left(F''_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^2}{\left(1 - e^{iu}F'_\lambda\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right)^5}.\end{aligned}$$

Учитывая (27), нетрудно видеть, что

$$F_\lambda^{'}(z) = \frac{S_1(\lambda z)}{zF(\lambda)},$$
$$F_\lambda^{''}(z) = \frac{S_2(\lambda z) - S_1(\lambda z)}{z^2 F(\lambda)},$$
$$F_\lambda^{'''}(z) = \frac{S_3(\lambda z) - 3S_2(\lambda z) + 2S_1(\lambda z)}{z^3 F(\lambda)},$$

где $S_1(z), S_2(z), S_3(z)$ определены в (18)–(20). С помощью леммы 2 и (21) находим, что при $0 < z < 1$

$$0 < C_{19} \leqslant F_\lambda^{'}(z), F_\lambda^{''}(z), F_\lambda^{'''}(z) \leqslant C_{20} < \infty.$$

Поскольку, как несложно проверить, функция $F_\lambda^{'}(z)$ возрастает по z и при выполнении условий леммы справедливо соотношение $F_\lambda^{'}(1) = n/(N+n) \leqslant C_{21} < 1$, для достаточно малых значений u имеет место неравенство $\left|1 - e^{iu} F_\lambda^{'}\left(\varphi^{(1)}(u)\right)\right| \geqslant C_{22} > 0$, и, следовательно, выполнено

$$\left|\left(\ln \varphi^{(1)}(u)\right)^{'''}\right| \leqslant C_{23} < \infty.$$

Учитывая это неравенство, получаем, что в окрестности $u_0 = 0$

$$\ln \varphi^{(1)}(u) = iu\mathbf{E}\nu^{(1)} - u^2 \mathbf{D}\nu^{(1)}/2 + O\left(u^3\right), \quad (30)$$

при этом с помощью (7), (27)–(29) можно показать, что

$$\mathbf{E}\nu^{(1)} = \frac{n+N}{N},$$
$$\mathbf{D}\nu^{(1)} = \left(\frac{n+N}{N}\right)^3 \sigma^2(\lambda). \quad (31)$$

Используя (9), находим, что

$$\psi_r(u) = (1-P_r)^{-N} \exp\left\{-\frac{iuN\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\}$$
$$\times\left(\varphi^{(1)}\left(\frac{u}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right)^N \left(1 - \left(\varphi^{(1)}\left(\frac{u}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right)^{-1}\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^\infty \exp\left\{\frac{iu(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\}\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}\right)^N.$$

Учитывая (30) и лемму 3, отсюда получаем, что при выполнении условий леммы для любого фиксированного u

$$\psi_r(u) = e^{-u^2/2}\left(1 - Q(u) + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N (1+o(1)), \quad (32)$$

где

$$Q(u) = \sum_{k=1}^\infty \left(\exp\left\{\frac{iu(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\} - 1\right)$$
$$\times \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}(1+o(1)).$$

С помощью леммы 1.3.4 [4], леммы 1 и соотношений $\left|e^{ix} - 1\right| < |x|$, (4), (14), (23), (31) находим, что при $r \to \infty$

$$|Q(u)| \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{|u|(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}$$
$$\leqslant C_{24}\frac{|u|(r+1)\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\}}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^\infty \frac{a^k r^{1/\tau}}{(r+k)^{1/\tau}}$$
$$\leqslant C_{25}\frac{a|u|r\gamma}{(1-a)N^{3/2}} = C_{26}\frac{|u|r}{N^{3/2}}.$$

Из (8) следует, что $\ln N/r \to -\ln a$. Тогда при любом фиксированном u выполнено соотношение $Q(u) = o(1/N)$. Отсюда и из (32) получаем утверждение леммы.

Лемма 7. *При выполнении условий теоремы 1 для всех целых неотрицательных l равномерно относительно $u_N = \left(l - N\mathbf{E}\nu^{(1)}\right)/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\left\{\nu_r = l\right\} = \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(1+o(1)).$$

Доказательство. С помощью равенств

$$2\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\mathbf{P}\{\nu_r = l\} = \int\limits_{-\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}^{\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N}\psi_r(t)dt,$$

$$\sqrt{2\pi}e^{-u_N^2/2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_N}e^{-t^2/2}dt$$

разность

$$R_N = 2\pi\left(\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\mathbf{P}\left\{\nu_r = l\right\} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

можно представить в виде суммы $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itu_N}\left(\psi_r(t) - e^{-t^2/2}\right)dt,$$

$$I_2 = -\int\limits_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}<|t|\leqslant\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

В силу леммы 6 при выполнении условий леммы $I_1 \to 0$ для любого фиксированного A.

Для интеграла I_2 справедлива оценка (26), и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Оценим I_3. Пусть $A < |t| \leqslant \varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. С помощью (23), (30), (31) находим, что

$$\left|\varphi^{(1)}\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right)\right| \leqslant e^{-C_{27}t^2/N}.$$

Учитывая лемму 3, нетрудно видеть, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} e^{it(k+r+1)} \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k+r+1\right\}\right| \leqslant \frac{C_{28}}{N}. \quad (33)$$

Используя эти соотношения и лемму 3, получаем неравенство

$$|\psi_r(t)| \leqslant C_{29} e^{-C_{27}t^2} \left(1 + \frac{C_{28} e^{C_{27}t^2/N}}{N}\right)^N.$$

Отсюда и из соотношений (23), (31), $t^2/N \leqslant \varepsilon^2 \mathbf{D}\nu^{(1)}$ следует, что $|\psi_r(t)| \leqslant C_{30} e^{-C_{27}t^2}$. Тогда

$$|I_3| \leqslant C_{31} \int\limits_A^{\infty} e^{-C_{27}t^2} dt,$$

и интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

В области интегрирования I_4 справедливо неравенство $\left|\varphi^{(1)}\left(t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\right)\right| \leqslant e^{-C_{32}}$. С помощью этого соотношения, (33) и леммы 3 несложно показать, что $|\psi_r(t)| \leqslant C_{33} e^{-C_{32}N}$ и $I_4 \to 0$ при $N \to \infty$.

Из полученных оценок интегралов I_1–I_4 получаем, что разность R_N можно сделать сколь угодно малой. Отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1

Из леммы 3 следует, что

$$(1 - P_{r+k})^N = \exp\left\{-\frac{\gamma a^{k+1}}{1-a}\right\}(1 + o(1)). \quad (34)$$

Используя леммы 1.3.4 [4], 2, 5 и равенства (7), (15), находим, что

$$\mathbf{P}\{\nu = N + n\} = \frac{N(1 + o(1))}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi}(N+n)^{3/2}}. \quad (35)$$

Учитывая (31), из леммы 7 получаем соотношение

$$\mathbf{P}\{\nu_r = N + n\} = \frac{N(1 + o(1))}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi}(N+n)^{3/2}}.$$

Отсюда и из (10), (34), (35) следует утверждение теоремы.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

2. *Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л.* Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. doi: 10.4213/dm320

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

4. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 259 с.

5. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 97–112. doi: 10.4213/dm366

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

8. *Чеплюкова И. А.* Возникновение гигантского дерева в случайном лесе // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 111–126. doi: 10.4213/dm408

9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest // Advances in Applied Probability. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 30.04.2020

References

1. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordho Publ., 1971. 438 p.

2. *Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L.* A remark on Galton-Watson forests. *Discrete Math. Appl.* 2000. Vol. 10, iss. 1. P. 49–62. doi: 10.4213/dm320

3. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

4. *Pavlov Yu. L.* Random forests. Utrecht: VSP, 2000. 122 p.

5. *Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V.* On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of vertices in strata of a simply generated forest. *Discrete Math. Appl.* 1999. Vol. 9, iss. 2. P. 137–154. doi: 10.4213/dm366

7. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. *Cheplyukova I. A.* The emergence of a giant tree in a random forest. *Discrete Math. Appl.* 1998. Vol. 8, iss. 1. P. 17–33. doi: 10.4213/dm408

9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest. *Advances in Applied Probability.* 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 30, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218