Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 67–71
DOI: 10.17076/mat1230

УДК 519.977

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВХОДНОМ ПОТОКЕ ЗАГРЯЗНЕНИЙ: ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И СТАБИЛИЗАЦИЯ

А. Н. Кириллов, И. В. Данилова

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Предлагается математическая модель процесса биологической очистки сточных вод в аэротенке на основе естественных балансовых соотношений. Модель, задаваемая системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, носит достаточно общий характер: функции, описывающие процесс окисления и входные потоки, не конкретизируются. Найдено инвариантное множество и доказана его асимптотическая глобальная устойчивость. На основании предложенной модели разработан метод стабилизации процесса биоочистки при нестационарном, кусочно-постоянном, входном потоке загрязнений.

Ключевые слова: стабилизация; биологическая очистка; инвариантное множество.

A. N. Kirillov, I. V. Danilova. DYNAMICS OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS UNDER VARIABLE POLLUTION INPUT FLOW: INVARIANT SETS AND STABILIZATION

A mathematical model of the biological wastewater treatment process, based on simple balance equations, is proposed. The model of the process, a nonlinear system of ordinary differential equations, has a general nature: the functions describing oxidation and the input flow are not specified. The invariant set is found and its asymptotic global stability is proved. On the basis of the proposed model, a technique has been developed to stabilize the wastewater treatment process when the pollutant inflow is non-stationary, piecewise-constant.

Keywords: stabilization; biological treatment; invariant set.

Введение

Математическому моделированию динамики процесса биологической очистки сточных вод на основе применения активного ила посвящено большое количество исследований [1–3, 6–10]. Моделирование технологических процессов, к которым относится и процесс биоочистки, отличается от моделирования, например, процессов движения летательных объектов обилием факторов, влияющих на процесс, невозможностью их точного описания, а также невозможностью проведения экспериментов с исследуемым процессом. Попытки учесть как можно большее число параметров и связей между ними приводят к невозможности исследования модели и, в результате, к невозможности ее применения для предсказания развития процесса и управления им. В связи с этим в предлагаемой работе рассматривается простая, основанная на балансовых соотношениях, модель системы биологической очистки осадков сточных вод, состоящей из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции.

Инвариантные множества динамической системы биоочистки

Рассмотрим следующую динамическую систему, представляющую модель процесса биоочистки воды в аэротенке:

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(a_1, u) + f(x,s) - (b+u)x, \\ \dot{s} = R(a_2, b) - \dfrac{1}{Y} f(x,s) - (b+u)s, \end{cases} \tag{1}$$

где $s = s(t)$ – концентрация загрязнений (субстрата); $x = x(t)$ – концентрация микроорганизмов, t – время; Y – коэффициент утилизации субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов; k – константа полунасыщения; b, a_2 – соответственно скорость и концентрация субстрата на входе; u, a_1 – соответственно скорость и концентрация биомассы в возвратном потоке, $u \in [0, \bar{u}]$, $0 < u$ – постоянная, характеризующая технические возможности аэротенка; μ – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов. Будем считать, что Y, b, a_2, a_1 – положительные постоянные, u – управляющее воздействие. Пусть функции Q, R, f обеспечивают единственность решения задачи Коши.

Поясним смысл балансовых уравнений (1): $Q = Q(a_1, u), R = R(a_2, b)$ – скорости расхода микроорганизмов и субстратов соответственно на входе в аэротенк, $Q \in [0, \bar{Q}], R \in [0, \bar{R}]$, $\bar{Q}, \bar{R}$ – положительные постоянные; $f(x,s) \geqslant 0$ – скорость прироста биомассы микроорганизмов за счет окисления ими субстратов, $-f(x,s)/Y$ – скорость убыли субстратов за счет их окисления микроорганизмами; $-(b+u)x, -(b+u)s$ – скорости расхода биомассы и субстратов соответственно на выходе из аэротенка. Естественно предположить, что $f(x,0) = f(0,s) = 0$ и $f(x,s) \leqslant cx$, где $0 \leqslant c$ – постоянная. Последнее ограничение отражает насыщаемость, присущую процессу окисления субстрата микроорганизмами.

Следует отметить, что представленная динамическая система (1) обобщает модель биоочистки, предложенную в [2].

Нетрудно показать, что положительная четверть $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,s) : x \geqslant 0, s \geqslant 0)\}$ является инвариантным множеством системы (1).

Также из вида правых частей системы (1) и ограничений на Q, R, f, которые введены выше, следует, что при достаточно больших постоянных $\bar{x} \geqslant 0, \bar{s} \geqslant 0$ инвариантным множеством системы (1) является прямоугольник P вида:

$$P = \{(x,s) : x \in [0, \bar{x}], s \in [0, \bar{s}\}. \tag{2}$$

Соотношение (2) значит, что решения системы (1) положительно устойчивы по Лагранжу, что мотивирует использование этой модели процесса биоочистки. Устойчивость по Лагранжу, как важная характеристика математических моделей экологических систем, отмечена в известной работе [5].

Теорема 1. *Пусть Q, R – положительные постоянные, $D(u) = (Q + Y \cdot R)/(b+u)$. Тогда прямая*

$$l(u) = \big\{(x,s) : x + sY = D(u)\big\}$$

является интегральным притягивающим множеством системы (1) при постоянном u.

Доказательство. Умножив второе уравнение системы (1) на Y и сложив его с первым уравнением, получим

$$\dot{z} = Q + Y \cdot R - (b+u)z, \tag{3}$$

где $z = x + Ys$. Приравняв правую часть уравнения (3) к нулю, получим его стационарное решение

$$z = D(u).$$

Таким образом, прямая $x + Ys = D(u)$ – инвариантное множество системы (1). Поскольку в (3) коэффициент перед z отрицателен, то положение равновесия асимптотически (глобально) устойчиво, откуда следует утверждение леммы. □

Конкретизируем вид функций Q и R, следуя работе [6]. Пусть $Q(a_1, u) = ua_1, R(a_2, b) = ba_2$. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = ua_1 + f(x,s) - (b+u)x, \\ \dot{s} = ba_2 - \dfrac{1}{Y} f(x,s) - (b+u)s. \end{cases} \tag{4}$$

Стабилизация системы (4) при кусочно-постоянном R. В работах [3, 4] разработан метод стабилизации системы, предложенной в [6]. При этом величина входного потока загрязнений Q была постоянной. Но в реальных условиях нагрузка на входе в аэротенк не является стационарной. Поэтому важно так организовать технологический процесс биоочистки, чтобы изменения входного потока не ухудшали качество очищенной воды.

Ниже будем предполагать, что R – кусочно-постоянная функция времени.

Предварительно получим следующий технический результат, а именно исследуем кинематику прямой $l(u)$. Имеем

$$D(u) = \frac{ua_1 + Yba_2}{b+u},$$

$$D'(u) = \frac{a_1(b+u) - (ua_1 + Yba_2)}{(b+u)^2} = \frac{b(a_1 - Ya_2)}{(b+u)^2}.$$

Отсюда следует, что если $a_1 - Ya_2 > 0$, то $D'(u) > 0$, т. е. прямая $l(u)$ движется вверх с возрастанием u. Если $a_1 - Ya_2 < 0$, то $l(u)$ с ростом u движется вниз. Если $a_1 - Ya_2 = 0$, то при изменении u прямая l_0 остается неподвижной.

Очевидно, величины b, a_2, характеризующие интенсивность потока загрязнений на входе в аэротенк, не являются постоянными. Естественно предположить, что b и a_2 – кусочно-постоянные функции времени. Таким образом, как отмечено выше, $R = ba_2$ – кусочно-постоянная функция времени. Ограничимся случаем кусочно-постоянной концентрации загрязнения a_2, считая величину b постоянной. Случай кусочно-постоянной скорости b при постоянной концентрации a_2 рассматривается, как будет видно из дальнейшего, проще. Если же кусочно-постоянны обе величины, b и a_2, то рассуждение следует первому случаю. Ниже используем обозначение $l(u) = l(u, a_2)$, $D(u) = D(u, a_2)$.

Рассмотрим следующую задачу стабилизации. Пусть в аэротенке при $a_2 = a_2^*$ поддерживается скорость возвратного потока активного ила на желательном уровне $u = u^*$, которому соответствует инвариантное множество $l(u^*, a_2^*)$ системы (4). Поставим задачу стабилизации множества $l(u^*)$ за счет изменения скорости u.

Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_1$ произошло увеличение концентрации загрязнителя до значения $a_2 = a_+ > a_2^*$. Следует отметить, что мгновенность изменения концентрации рассматривать проще, а суть метода стабилизации не изменится, если ввести временной промежуток, на котором изменяется концентрация a_2.

Пусть $a_2^* < a_1/Y$, т. е. $a_1 - Ya_2^* > 0$. Если $a_+ < a_1/Y$, то учитывая, что при увеличении a_2 увеличивается $D(u, a_2)$, получаем, что прямая $l(u^*, a_+)$ будет расположена выше, чем $l(u^*, a_2^*)$. Поскольку $D'(u, a_2) > 0$, то для возврата прямой $l(u^*, a_+)$ в начальное положение $l(u^*, a_2^*)$ следует уменьшить значение u^*, положив $u = \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ – решение уравнения

$$D(u^*, a_2^*) = D(\tilde{u}, a_+), \tag{5}$$

откуда получаем

$$\tilde{u} = \frac{Ya_+(b + u^*) - (a_1u^* + Yba_2^*)}{(Ya_2^* - a_1)}.$$

Но при этом должно выполняться условие $\tilde{u} > 0$, что равносильно $D(u^*, a_2^*) > Ya_+$, или

$$a_+ < \frac{u^*a_1 + Yda_2^*}{Y(b + u^*)}. \tag{6}$$

Условие (6) дает ограничения на концентрацию входного потока загрязнений, с которой может справиться система биоочистки, использующая предлагаемый метод стабилизации, если выполнены ограничения, заданные выше.

Пусть по-прежнему $a_2^* < a_1/Y$, но $a_+ \geqslant a_1/Y$. Тогда, как нетрудно показать, не существует положительного решения $\tilde{u}$ уравнения (6).

Пусть $a_2^* \geqslant a_1/Y$. Тогда, очевидно, $a_+ > a_1/Y$. Поскольку теперь $D'(u, a_2) < 0$, то при любом $a_+ > a_2^*$ существует решение $\tilde{u}$ уравнения (5).

Случай, когда в некоторый момент времени $t = t_2$ происходит уменьшение величины a_2^* до значения $a_- < a_2^*$, рассматривается аналогично вышеизложенному. А именно, если $a_2^* < a_1/Y$, то при любом $a_- < a_2^*$ существует решение $\hat{u}$ уравнения $D(u^*, a_2^*) = D(\hat{u}, a_-)$. Если $a_2^* > a_1/Y$ и $a_- > a_1/Y$, то решение $\hat{u}$ существует при условии $a_- > D(u^*, a_2^*)$. Если $a_2^* > a_1/Y$ и $a_- \leqslant a_1/Y$, то $\hat{u}$ не существует.

Следует отметить, что предложенный выше метод стабилизации применим и к более общей системе (1), если на функции Q, R, f наложить соответствующие естественные ограничения. Для того чтобы изложение не имело чрезмерно абстрактный характер, метод стабилизации изложен на примере системы (4). Несложно видеть, что метод стабилизации, опирающийся на теорему 1, применим и в случае, когда параметры системы не известны точно, что означает его грубость, которая является крайне важной характеристикой в практических задачах.

Заключение

Предложена общая модель биологической очистки сточных вод в аэротенке, полученная из естественных балансовых соотношений. Найдено инвариантное множество соответствующей динамической системы и доказана его асимптотическая глобальная устойчивость. На основании предложенной модели разработан метод стабилизации процесса биоочистки при нестационарном входном потоке загрязнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18–01–00249a.

Литература

1. *Вавилин В. А.* Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.

2. *Кириллов А. Н.* Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2008. № 5. С. 66.

3. *Кириллов А. Н.* Задачи стабилизации экологических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Вып. 6. С. 883–892.

4. *Кириллов А. Н.* Инвариантные множества системы управления процессом биологической очистки // Труды КарНЦ РАН. 2011. № 5. С. 33–37.

5. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

6. *Brune D.* Optimal control of the completemix activated sludge process // Environ. Tech. Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

7. *Dupont R., Sinkjaer O.* Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models // Water Sci. Tech. 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

8. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G. v. R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // Water Research. 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

9. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models // Water Research. 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

10. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification–thickening process // Water Research. 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Поступила в редакцию 15.04.2020

References

1. *Vavilin V. A.* Vremya oborota biomassy i destruktsiya organicheskogo veshchestva v sistemakh biologicheskoi ochistki [Turnover time of biomass and organic substance destruction in the biological treatment systems]. Moscow: Nauka, 1986. 144 p.

2. *Kirillov A. N.* Dinamicheskoe modelirovanie i stabilizatsiya protsessa biologicheskoi ochistki stochnykh vod [Dynamical modelling and process stabilization of the biological wastewater treatment]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2008. No. 5. P. 66.

3. *Kirillov A. N.* Zadachi stabilizatsii ekologicheskikh sistem [Problems of ecological systems stabilization]. *Obozrenie priklad. i promyshl. matem.* [Appl. Industrial Math. Reviews]. 1994. No. 6. P. 883–892.

4. *Kirillov A. N.* Invariantnye mnozhestva sistemy upravleniya protsessom biologicheskoi ochistki [Invariant sets of a biological treatment process control system]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2011. No. 5. P. 33–37.

5. *Svirezhev Yu. M., Logofet D. O.* Ustoichivost′ biologicheskikh soobshchestv [Stability of biological communities]. Moscow: Nauka, 1978. 178 p.

6. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process. *Environ. Tech. Letters.* 1985. Vol. 6. P. 467–476.

7. *Dupont R., Sinkjaer O.* Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186; doi: 10.1080/09593338509384365

8. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G. v. R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. *Water Research.* 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

9. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. *Water Research.* 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

10. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process. *Water Research.* 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Received April 15, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: krllv1812@yandex.ru
тел.: (8142) 763370

Данилова Инна Владимировна
аспирант
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: DanilovaInna1987@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: krllv1812@yandex.ru
tel.: (8142) 766312

Danilova, Inna
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: DanilovaInna1987@mail.ru