Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 72–76
DOI: 10.17076/mat1227

УДК 519.179.2, 519.876.5

ОБ УСЛОВИЯХ СВЯЗНОСТИ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

М. М. Лери

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматриваются два вида моделей случайных конфигурационных графов с разными распределениями степеней вершин: дискретным степенным распределением и распределением Пуассона. Параметры распределений принимают фиксированные значения. Посредством имитационного моделирования для разных видов графов найдены оценки вероятностей того, что граф представляет собой одну компоненту связности, состоящую из всех вершин графа в зависимости от размера графа и параметра распределения степеней вершин.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степенное распределение; распределение Пуассона; связность графа; имитационное моделирование.

M. M. Leri. ON CONDITIONS OF CONFIGURATION GRAPHS' CONNECTIVITY

We consider two types of random configuration graphs: with the power-law and with the Poisson vertex degree distributions. The parameters of these distributions are fixed. By simulations we estimate the probabilities of graph connectivity (when all graph vertices are joined into one connected component) in different graph types and their dependence on the graph size and the vertex degree distribution parameter.

Keywords: configuration graph; power-law distribution; Poisson distribution; graph connectivity; simulations.

Введение

Хорошо известно (см., например, [3–5]), что случайные графы нашли широкое применение в качестве моделей для описания различных видов сетей коммуникаций, от локальных сетей местного значения до глобальных, имеющих международный охват. Сетевые модели, соответственно, также имеют некоторое разнообразие, как в определении степеней вершин случайного графа, так и в установлении связей между этими вершинами. В частности, наблюдения за реальными сетями телекоммуникаций показали (см., например, [4, 9]), что для их описания лучше всего подходят модели случайных графов, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общим законом распределения.

С увеличением размеров сетей и с ростом их разнообразия стало понятно, что для адекватного отражения топологии и функционирования таких сетей при построении их математических моделей недостаточно учитывать только распределение степеней вершин в соответствующей модели случайного графа, но необходимо также принимать в рассмотрение и другие не менее важные характеристики сети. Одной из таких характеристик качества сети является связность. Связность сети и, соответственно, связность случайного графа означают, что все вершины объекта напрямую или опосредованно связаны между собой, то есть для любой пары вершин всегда существует хотя бы одна цепь, соединяющая их между собой.

Связность конфигурационных графов

В работе рассматриваются конфигурационные графы, впервые предложенные Б. Боллобашем в [2], с N вершинами, степени которых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общим распределением. Рассматриваются два варианта распределений степеней вершин графа. Во-первых, это степенное распределение, заданное следующим равенством [9]:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k + c_1\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \ldots$, и, во-вторых, распределение Пуассона:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k + c_2\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, \ldots \quad (2)$$

Целочисленные константы $c_1 \geqslant 0$ и $c_2 \geqslant 1$ определяют сдвиги соответствующих распределений. Параметры $\tau > 1$ и $\lambda > 0$ распределений (1) и (2) степеней вершин графа принимают фиксированные значения. При построении конфигурационного графа вначале определяются степени каждой из N вершин в соответствии с выбранным распределением (степенным или Пуассона) с заданными параметрами τ или λ соответственно. Степени вершин графа определяют различимые полуребра [9], занумерованные в произвольном порядке. Соединение всех полуребер графа между собой попарно и равновероятно образует ребра. Сумма степеней вершин при таком построении должна быть четной, поэтому, если она оказывается нечетной, к равновероятно выбранной вершине добавляется одно недостающее полуребро: степень соответствующей вершины увеличивается на 1, и она соединяется ребром с той вершиной, чье ребро ранее осталось без пары. В результате такого построения конфигурационные графы могут иметь петли, циклы и кратные ребра.

Относительно конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) известно (см., например, [3, 5, 9]), что если значение параметра распределения степеней вершин τ лежит в интервале (1, 2), то в таком графе существует так называемая гигантская компонента связности, и она единственна. Число вершин, принадлежащих этой компоненте, пропорционально числу вершин графа N при $N \to \infty$, в то время как число вершин любой из меньших компонент этого графа бесконечно мало по сравнению с числом вершин в гигантской компоненте.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что рассматриваемый случайный граф представляет собой одну компоненту связности, содержащую в себе все N вершин графа. В [6] показано, что если распределение степеней вершин случайного графа задано так, что $p_1 = p_2 = 0$, то вероятность $\mathbf{P}(A) \to 1$ при $N \to \infty$. В [1] рассматривались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин при слабых ограничениях на предельное поведение хвоста распределения и были найдены условия, при которых граф будет асимптотически достоверно связен.

Результаты

Цель данной работы состояла в том, чтобы оценить вероятность события A и найти зависимость $\mathbf{P}(A)$ от числа вершин графа N и параметра распределения степеней вершин. Исследование проводилось посредством методов имитационного моделирования с последующей статистической обработкой данных.

Для получения статистических данных рассматривались три типа конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) и тремя значениями сдвига c_1:

- $c_1 = 0$: $p_k > 0$, $k = 1, 2, ...$;
- $c_1 = 1$: $p_1 = 0$;
- $c_1 = 2$: $p_1 = p_2 = 0$

и три типа конфигурационных графов с распределением степеней вершин (2) и тремя значениями сдвига c_2:

- $c_2 = 1$: $p_k > 0$, $k = 1, 2, ...$;
- $c_2 = 2$: $p_1 = 0$;
- $c_2 = 3$: $p_1 = p_2 = 0$.

Для всех видов конфигурационных графов рассматривались графы размерностей $100 \leqslant N \leqslant 10000$ с шагом 500. В случае распределения (1) значения параметра τ изменялись от 1.01 до 3.0 с шагом 0.01, а при распределении степеней вершин (2) значения параметра λ изменялись от 0.01 до 8.0 с шагом 0.01.

На основе полученных данных были построены регрессионные зависимости вероятностей $\mathbf{P}(A)$ того, что граф состоит из одной компоненты связности, включающей в себя все N вершин, от объема графа N и параметра распределения степеней вершин (τ или λ). Введем следующие обозначения вероятностей связности графов. Для графов с распределением степеней вершин (1):

$\mathbf{P}^0_{pl}(A)$ при $c_1 = 0$;

$\mathbf{P}^1_{pl}(A)$ при $c_1 = 1$;

$\mathbf{P}_{pl}^2(A)$ при $c_1 = 2$

и для графов с распределением степеней вершин (2):

$\mathbf{P}_{ps}^1(A)$ при $c_2 = 1$;

$\mathbf{P}_{ps}^2(A)$ при $c_2 = 2$;

$\mathbf{P}_{ps}^3(A)$ при $c_2 = 3$.

В случае степенного распределения степеней вершин со сдвигом $c_1 \geqslant 0$ получены следующие регрессионные уравнения (рис. 1 и 2):

$$\mathbf{P}_{pl}^0(A) = e^{1-2.79\tau^{97.35-\frac{9500.45}{N}}}, \quad R^2 = 0.89,$$

$$\mathbf{P}_{pl}^1(A) = 2.4 - \frac{1.55\tau^{0.28}}{N^{0.01}}, \quad R^2 = 0.98,$$

при $c_1 = 2$ для любых $1.01 \leqslant \tau \leqslant 3$: $0.99 \leqslant \mathbf{P}_{pl}^2(A) \leqslant 1$ при $100 \leqslant N \leqslant 1000$, и $\mathbf{P}_{pl}^2(A) = 1$ при $1000 < N \leqslant 10000$.

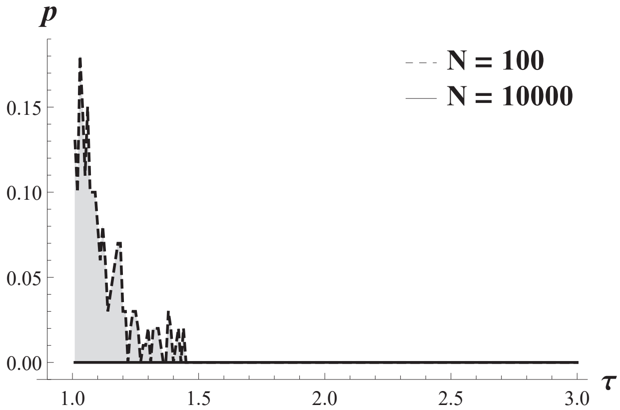

Рис. 1. Зависимость $\mathbf{P}_{pl}^0(A)$ от N и τ
Fig. 1. Dependence of $\mathbf{P}_{pl}^0(A)$ on N and τ

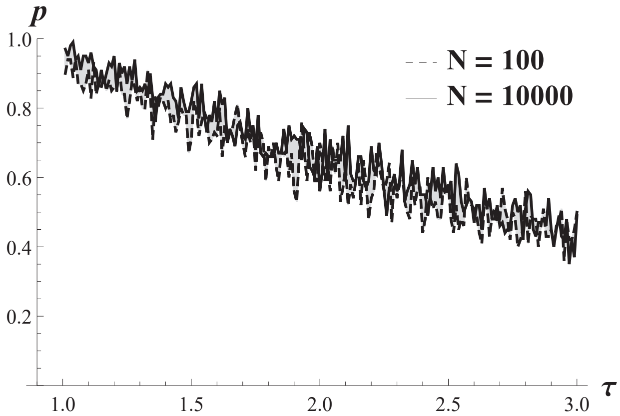

Рис. 2. Зависимость $\mathbf{P}_{pl}^1(A)$ от N и τ
Fig. 2. Dependence of $\mathbf{P}_{pl}^1(A)$ on N and τ

В случае, когда степени вершин имели распределение Пуассона со сдвигом $c_2 \geqslant 1$, регрессионные уравнения были следующими (рис. 3 и 4):

$$\mathbf{P}_{ps}^1(A) = \sqrt{0.12 - 2.75N^{0.04} + 2.7\lambda^{0.34}},$$

$$\mathbf{P}_{ps}^2(A) = e^{-0.114\lambda^{-1.335+\frac{24.216}{N}}}$$

с коэффициентами детерминации равными 0.97 и 0.98 соответственно. В случае, когда $c_2 = 3$: $\mathbf{P}_{ps}^3(A) = 1$ для любых значений параметра $0.01 \leqslant \lambda \leqslant 8$ и любых объемов графа $100 \leqslant N \leqslant 10000$.

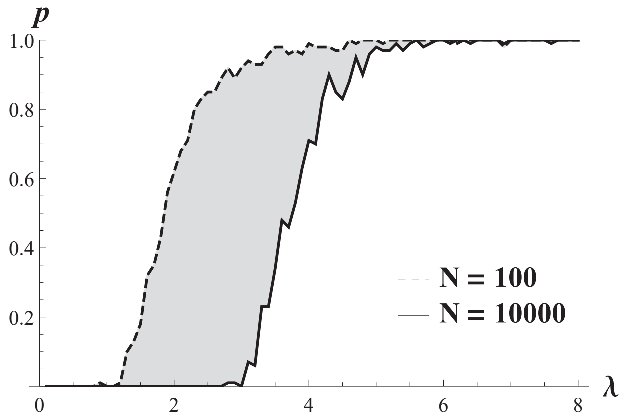

Рис. 3. Зависимость $\mathbf{P}_{ps}^1(A)$ от N и λ
Fig. 3. Dependence of $\mathbf{P}_{ps}^1(A)$ on N and λ

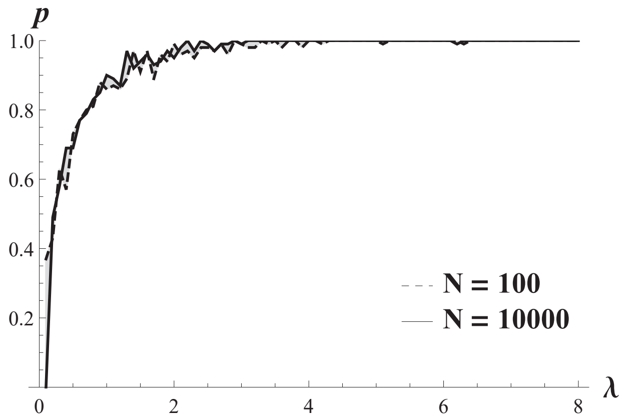

Рис. 4. Зависимость $\mathbf{P}_{ps}^2(A)$ от N и λ
Fig. 4. Dependence of $\mathbf{P}_{ps}^2(A)$ on N and λ

Таким образом, результаты имитационного моделирования, во-первых, показывают, что действительно, если распределение степеней вершин случайного графа задано так, что $p_1 =$

$p_2 = 0$, то вероятность того, что все вершины графа образуют одну компоненту связности, приближается к 1 с ростом объема графа. Во-вторых, полученные в данной работе уравнения зависимостей этой вероятности в случаях, когда только $p_1 = 0$ или когда $p_k > 0$ для всех $k \geqslant 1$, могут служить основанием для понимания сетевых топологий, определяющих различие в свойствах и функционировании сетей, а также могут быть использованы как при моделировании реальных сетей, так и при изучении устойчивости конфигурационных графов к различного вида разрушениям [7, 8].

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

Литература

1. *Павлов Ю. Л.* О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, № 2. С. 114–122. doi: 10.4213/dm1573

2. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

3. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

4. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

5. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

6. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCII.pdf (дата обращения: 11.02.2020)

7. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model // Austrian J. Stat. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34

8. *Leri M., Pavlov Y.* Forest fire models on configuration random graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362

9. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 11.04.2020

References

1. *Pavlov Yu. L.* O svyaznosti konfiguratsionnykh grafov [On connectivity of configuration graphs]. *Discretnaya Matematika.* [Discrete Math. Appl.]. 2019. Vol. 31, iss. 2. P. 114–122. doi: 10.4213/dm1573

2. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combinatorics.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

3. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

4. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

5. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

6. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCII.pdf (accessed: 11.02.2020).

7. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model. *Austrian J. Stat.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34

8. *Leri M., Pavlov Y.* Forest fire models on configuration random graphs. *Fundamenta Informaticae.* 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362

9. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 11, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Лери Марина Муксумовна
научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: leri@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Leri, Marina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: leri@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218