Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 57–61
DOI: 10.17076/mat1207

УДК 519.21, 515.12

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕРАХ С МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КВАНТОВАНИЯ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Известно, что размерность квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, не превосходит емкостной размерности ее носителя. В связи с этим естественно возникает следующий вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования. Пусть (X, ρ) – метрический компакт емкостной размерности $\dim_B X = d$. Верно ли, что для любого $a \in [0, d]$ существует вероятностная мера μ с носителем $supp(\mu) = X$, для которой размерность квантования $D(\mu)$ равна a? В работе рассматривается частный случай этого вопроса, касающийся существования мер, размерность квантования которых принимает наибольшее возможное значение равное $\dim_B X$. Получена оценка нижней размерности квантования вероятностной меры μ, удовлетворяющей условию $\mu(B(x, \varepsilon)) \geqslant c\varepsilon^\gamma$ для любой точки $x \in X$, где c и γ – положительные константы (теорема 1). Из этой оценки следует существование искомых мер на слабо однородных компактах. Из теоремы 1 вытекает также равенство $D(\mu) = \dim_B X$ для равномерно распределенных мер (в смысле терминологии, принятой в геометрической теории меры) и вероятностных мер компактных метрических пространств Альфорса.

К л ю ч е в ы е с л о в а: размерность квантования; емкостная размерность; слабо однородный компакт; пространство Альфорса.

A. V. Ivanov. ON PROBABILITY MEASURES WITH A MAXIMUM OF QUANTIZATION DIMENSION

It is known that the quantization dimension of a probability measure on a metric compact space does not exceed the box-dimension of its support. In this connection, the following question naturally arises about intermediate values of quantization dimensions. Let (X, ρ) be a metric compact with box-dimension $\dim_B X = d$. Is it true that for any $a \in [0, d]$ there exists a probability measure μ with support $supp(\mu) = X$ for which the quantization dimension $D(\mu)$ is a? In this paper we consider a special case of this question concerning the existence of measures whose quantization dimension takes the largest possible value, which is equal to $\dim_B X$. An estimate is obtained for the lower quantization dimension of a probability measure μ satisfying the condition $\mu(B(x, \varepsilon)) \geqslant c\varepsilon^\gamma$ for any point $x \in X$, where c and γ are positive constants (Theorem 1). This estimate implies the existence of the desired measures on weakly homogeneous compact spaces. Theorem 1 also implies the equality $D(\mu) = \dim_B X$ for uniformly distributed measures (in the sense of the terminology adopted in geometric measure theory) and probability measures of compact metric Ahlfors spaces.

K e y w o r d s: quantization dimension; box-dimension; weakly homogeneous compact space; Ahlfors space.

Известно, что размерность квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, не превосходит емкостной размерности ее носителя. В связи с этим в работе [1] поставлен следующий вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования. Пусть (X, ρ) — метрический компакт емкостной размерности $\dim_B X = d$. Верно ли, что для любого $a \in [0, d]$ существует вероятностная мера μ с носителем $supp(\mu) = X$, для которой размерность квантования $D(\mu)$ равна a? В данной статье рассматривается частный случай этого вопроса, касающийся существования мер, размерность квантования которых принимает наибольшее возможное значение равное $\dim_B X$. В [1] показано, что условие $supp(\mu) = X$ при этом не является существенным, поскольку для любой вероятностной меры μ существует мера μ' той же размерности квантования с носителем $supp(\mu') = X$.

В настоящей работе получена оценка нижней размерности квантования вероятностной меры μ, удовлетворяющей условию $\mu(B(x, \varepsilon)) \geqslant c\varepsilon^\gamma$ для некоторых положительных констант c и γ для любой точки $x \in X$ при малых ε[1] (теорема 1). Из этой оценки следует существование искомых мер на слабо однородных компактах. Из теоремы 1 вытекает также равенство $D(\mu) = \dim_B X$ для равномерно распределенных мер (в смысле терминологии, принятой в геометрической теории меры) и вероятностных мер компактных метрических пространств Альфорса.

Емкостная размерность замкнутого подмножества метрического компакта (X, ρ) и размерность квантования вероятностной меры, заданной на X, могут быть определены по общей функториальной схеме (см. [1]). Для компакта (X, ρ) через $\exp X$ обозначается пространство непустых замкнутых подмножеств X с метрикой Хаусдорфа ρ_H. Известно, что метрическое пространство $(\exp X, \rho_H)$ компактно (см. [3]). Для любого натурального n $\exp_n X = \{F \in \exp X : |F| \leqslant n\}$ — замкнутое подпространство $\exp X$. Пусть $F \in \exp X$. Положим

$$N(F, \varepsilon) = \min\{n : \rho_H(F, \exp_n X) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$. Нетрудно показать, что $N(X, \varepsilon)$ равно наименьшему числу элементов ε-сети в X. ε-Сеть $A \subset X$ будем называть *оптимальной*, если $|A| = N(X, \varepsilon)$. Подмножество $C \subset X$ называется *ε-разделенным*, если для любых двух различных точек $x, y \in C$ $\rho(x, y) > \varepsilon$. Любое максимальное (по включению) ε-разделенное множество является ε-сетью. Следовательно, в компакте X всегда существует ε-разделенное множество мощности $N(X, \varepsilon)$.

Емкостная размерность $\dim_B F$ множества $F \in \exp X$ определяется по следующей формуле (см. [2]):

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(F, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}. \qquad (1)$$

Если указанный предел не существует, то рассматривают верхний или нижний пределы и получают соответственно верхнюю $\overline{\dim}_B F$ или нижнюю $\underline{\dim}_B F$ емкостные размерности множества F. При этом всегда $\underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F$. (Равенство $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ означает, что определена размерность $\dim_B F$.)

Для компакта X через $P(X)$ будем обозначать пространство вероятностных мер на X (см. [2]), наделенное метрикой Канторовича – Рубинштейна ρ_P. По определению, для любых мер $\mu, \nu \in P(X)$

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_1(X)\},$$

где $Lip_1(X)$ – множество нерастягивающих функций, то есть таких отображений $f : X \to \mathbb{R}$, для которых $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$ (при этом $\mu(f) = \int_X f \, d\mu$). Носителем $supp(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ называется наименьшее замкнутое подмножество X, мера которого равна 1. Для любого натурального n множество $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp(\mu)| \leqslant n\}$ является замкнутым подпространством $P(X)$. Для $\mu \in P(X)$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$N(\mu, \varepsilon) = \min\{n : \rho_P(\mu, P_n(X)) \leqslant \varepsilon\}.$$

В [1] показано, что размерности квантования меры $\mu \in P(X)$ (верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$) можно определить по формулам, аналогичным (1):

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

$$\underline{D}(\mu) = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}.$$

Если $\overline{D}(\mu) = \underline{D}(\mu)$, то существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} = D(\mu).$$

Известно (см. [1, 4]), что всегда

$$\overline{D}(\mu) \leqslant \overline{\dim}_B(supp(\mu)),$$

$$\underline{D}(\mu) \leqslant \underline{\dim}_B(supp(\mu)).$$

В основе полученных в работе результатов лежит следующая

[1] Через $B(x, \varepsilon)$ обозначается замкнутый ε-шар точки $x \in X$: $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$.

Теорема 1. *Пусть μ — вероятностная мера на X, для которой существуют положительные числа c, γ и ε_0 такие, что для любой точки $x \in X$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство*

$$\mu(B(x,\varepsilon)) \geqslant c\varepsilon^{\gamma}. \qquad (1)$$

Тогда $\overline{\dim}_B X \leqslant \gamma$ *и*

$$\underline{D}(\mu) \geqslant \frac{\beta}{\gamma - \beta + 1}, \qquad (2)$$

где $\beta = \underline{\dim}_B X$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — ε-разделенное множество мощности $k = N(X,\varepsilon)$. Тогда $\mu(\bigcup_i B(a_i, \varepsilon/2)) \leqslant 1$, и множества $B(a_i, \varepsilon/2)$ попарно не пересекаются. Следовательно, $N(X,\varepsilon)c(\varepsilon/2)^{\gamma} \leqslant 1$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

$$N(X,\varepsilon) \leqslant \frac{p}{\varepsilon^{\gamma}},$$

где $p > 0$. Откуда следует, что

$$\overline{\dim}_B X \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \frac{p}{\varepsilon^{\gamma}}}{-\ln \varepsilon} = \gamma.$$

Для точки $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ определим функцию $f_{(a,\varepsilon)} : X \to R$ следующим образом: $f_{(a,\varepsilon)}(x) = \varepsilon - \rho(a,x)$ при $x \in B(a,\varepsilon)$, и $f_{(a,\varepsilon)}(x) = 0$ при $x \notin B(a,\varepsilon)$.

В силу неравенств (1) и $f_{(a,\varepsilon)}(x) \geqslant 0$ получаем:

$$\int_{B(a,\varepsilon)} f_{(a,\varepsilon)} d\mu \geqslant \int_{B(a,\varepsilon/2)} f_{(a,\varepsilon)} d\mu$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\mu(B(a,\varepsilon/2)) \geqslant q\varepsilon^{\gamma+1}, \qquad (3)$$

где $q = \frac{c}{2^{\gamma+1}} > 0$.

Пусть $\beta = \underline{\dim}_B X \leqslant \overline{\dim}_B X \leqslant \gamma$. Если $\beta = 0$, то неравенство (2) очевидно. Поэтому будем считать, что $\beta > 0$, и пусть $\delta > 0$ таково, что $\beta - \delta > 0$. Поскольку $\beta = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(X,\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}$, при малых ε выполняется неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-\delta}} < N(X,\varepsilon). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь произвольную меру $\nu \in P(X)$, носитель которой содержит $m \in \mathbb{N}$ точек, и пусть положительное число ε удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-\delta}} > 2m. \qquad (5)$$

Тогда в силу (4)

$$N(X,\varepsilon) > 2m \qquad (6)$$

при достаточно малых ε.

Пусть $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ — ε-разделенная ε-сеть в X. Тогда $k \geqslant N(X,\varepsilon)$ и множества $B_i = B(c_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i = 1, \dots, k$ попарно не пересекаются. Положим $E = \{i : B_i \cap supp(\nu) = \varnothing\}$. В силу (4) и (5)

$$|E| > \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}. \qquad (7)$$

Рассмотрим функцию $f : X \to R$, которая определяется следующим образом: $f(x) = f_{(c_i,\varepsilon/2)}$ при $x \in B_i, i \in E$ и $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{i\in E} B_i$. Легко проверить, что $f \in Lip_1(X)$ и $\nu(f) = 0$. Применяя неравенства (3) и (7), получаем

$$\rho_P(\nu,\mu) \geqslant |\mu(f) - \nu(f)| = \sum_{i\in E}\int_{B_i} f d\mu$$

$$= \sum_{i\in E}\int_{B_i} f_{(c_i,\frac{\varepsilon}{2})} d\mu \geqslant |E| q(\varepsilon/2)^{\gamma+1} > s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1},$$

где $s = \frac{q}{2^{\gamma+2}} > 0$.

Тем самым доказано, что если ε достаточно мало и $m = |supp(\nu)| < \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}$, то $\rho_P(\nu,\mu) > s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1}$. Следовательно, $N(\mu, s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1}) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}$. Таким образом,

$$\underline{D}(\mu) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\mu, s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1})}{-\ln(s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1})}$$

$$\geqslant \frac{\beta-\delta}{\gamma-\beta+\delta+1}$$

для любого $\delta > 0$, откуда сразу следует неравенство (2). □

Следствие 1. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт и $\mu \in P(X)$. Если $\dim_B X = \alpha$ и для меры μ существуют константы $c, \varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и любой точки $x \in X$*

$$\mu(B(x,\varepsilon)) \geqslant \frac{c}{N(X,\varepsilon)},$$

то $D(\mu) = \dim_B X = \alpha$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ утверждение тривиально, поскольку $\overline{D}(\mu) \leqslant \dim_B X$. Пусть $\alpha > 0$. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $\alpha - \delta > 0$. Поскольку $\dim_B X = \alpha$, при достаточно малых ε выполняется неравенство: $N(X,\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+\delta}}$. Таким образом, $\mu(B(X,\varepsilon)) \geqslant c\varepsilon^{\alpha+\delta}$ при малых ε. Откуда в силу теоремы 1 получаем

$$\underline{D}(\mu) \geqslant \frac{\alpha}{\delta+1}$$

для любого $\delta > 0$. Следовательно, $\alpha \leqslant \underline{D}(\mu) \leqslant \overline{D}(\mu) \leqslant \overline{\dim}_B X = \alpha$. □

В геометрической теории меры мера $\mu \in P(X)$ называется равномерно распределенной, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух точек $x, y \in X$

$$\mu(B(x,\varepsilon)) = \mu(B(y,\varepsilon)) > 0.$$

Следствие 2. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт размерности $\dim_B X = \alpha$, на котором существует равномерно распределенная вероятностная мера μ. Тогда $D(\mu) = \alpha$.*

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим оптимальную ε-сеть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, где $k = N(X,\varepsilon)$. Имеем:

$$1 = \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B(a_i,\varepsilon)) \leqslant k\mu(B(x,\varepsilon)),$$

где x — произвольная точка X. Откуда следует, что

$$\mu(B(x,\varepsilon)) \geqslant \frac{1}{N(X,\varepsilon)}.$$

Таким образом, $D(\mu) = \alpha$ в силу следствия 1. $\square$

Метрический компакт (X,ρ) называется слабо однородным (см. [5]), если существует константа $c > 0$ такая, что для любых двух положительных чисел $\varepsilon, r : \varepsilon \leqslant r$ выполняется неравенство

$$N(X,r) \inf_{x \in X} N(B(x,r),\varepsilon) \geqslant cN(X,\varepsilon).$$

Напомним, что компакт X называется однородным, если для любых точек $x, y \in X$ существует изометрия $f : X \to X$, переводящая x в y. В однородном компакте величина $N(B(x,r),\varepsilon)$ не зависит от выбора x. При этом выполняется очевидное неравенство $N(X,r)N(B(x,r),\varepsilon) \geqslant N(X,\varepsilon)$. Таким образом, всякий однородный компакт слабо однороден.

Следствие 3. *Если X — слабо однородный компакт размерности $\dim_B X = \alpha$, то на X существует вероятностная мера μ, для которой $D(\mu) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $as(X) = \{N(X,\varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \{1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ — аппроксимационный спектр компакта X (см. [1]). Положим $\varepsilon_n = \min\{\varepsilon : N(X,\varepsilon) = k_n\}$. Пусть A — конечное подмножество X. Через μ_A^u обозначим равномерно распределенную вероятностную меру на A: $\mu_A^u = \frac{1}{|A|}\sum_{x \in A} \delta_x$, где δ_x — мера Дирака. Всякую последовательность $(\mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$, где A_n — ε_n-оптимальное подмножество X, назовем допустимой. Аналогичная конструкция была рассмотрена в [5], где фактически доказано (теорема 4), что для всякой меры μ, которая является предельной точкой допустимой последовательности в слабо однородном компакте, существует константа $c > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in X$

$$\mu(B(x,\varepsilon)) \geqslant \frac{c}{N(X,\varepsilon)}.$$

Поэтому в силу следствия 1 $D(\mu) = \alpha$ для всякой предельной точки μ любой допустимой последовательности в слабо однородном компакте. $\square$

Метрический компакт (X,ρ) с заданной на нем вероятностной мерой μ называется пространством Альфорса размерности $d > 0$, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что для любой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$c_1\varepsilon^d \leqslant \mu(B(x,\varepsilon)) \leqslant c_2\varepsilon^d.$$

Следующее утверждение, доказанное в [4] для компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой, индуцированной нормой, также вытекает из теоремы 1.

Следствие 4. *Если (X,ρ,μ) — компакт Альфорса размерности d, то $D(\mu) = \dim_B X = d$.*

Доказательство. Пусть A — оптимальная ε-сеть в X, т. е. $|A| = N(X,\varepsilon)$. Тогда

$$\sum_{x \in A} \mu(B(x,\varepsilon)) \geqslant \mu(\bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)) = 1.$$

Следовательно, $N(X,\varepsilon)c_2\varepsilon^d \geqslant 1$ и, значит, $N(X,\varepsilon) \geqslant \frac{1}{c_2\varepsilon^d}$. Таким образом,

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(X,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \geqslant d.$$

В то же время по теореме 1 $\overline{\dim}_B X \leqslant d$. Значит, $\underline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B X = d$, и в силу (2) $D(\mu) = d$. $\square$

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Иванов А. В.* О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: ИКИ, 2013. 404 с.

3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

4. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag. 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

5. *Ostrovsky E., Sirota L.* Uniform measures on the arbitrary compact metric spaces, with applications. 2014. arXiv:1403.5725 [math.FA]

Поступила в редакцию 04.03.2020

References

1. *Ivanov A. V.* O funktore veroyatnostnykh mer i razmernostyakh kvantovaniya [On the functor of probability measures and quantization dimensions]. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matem. i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. and Mechanics]. 2020. No. 63. P. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

2. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. The University of Chicago Press, 1997. 397 p. doi: 10.7208/chicago/9780226662237.001.0001

3. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii [General topology. Basic structures]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

4. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag. 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

5. *Ostrovsky E., Sirota L.* Uniform measures on the arbitrary compact metric spaces, with applications. 2014. arXiv:1403.5725 [math.FA]

Received March 04, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441