Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 77–83
DOI: 10.17076/mat1202

УДК 519.179.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ СТЕПЕННОЙ СТРУКТУРЫ УСЛОВНЫХ ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по неизвестному закону, зависящему от произвольной медленно меняющейся функции. Степень каждой вершины равна числу инцидентных ей занумерованных полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели используются для адекватного описания различных сетей коммуникаций и сети Интернет. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n. В статье получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при $N, n \to \infty$ так, что $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; Интернет-граф; условный граф; степень вершины; степенная структура; асимптотика.

Yu. L. Pavlov. ON THE ASYMPTOTICS OF THE DEGREE STRUCTURE OF CONDITIONAL INTERNET GRAPHS

We consider configuration graphs with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to an unknown distribution law that depends on an arbitrary slowly varying function. The degree of each vertex is equal to the number of incident numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all of the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. We study the subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to n. The paper finds the limit distributions of the maximum vertex degree and the number vertices with a given degree as $N, n \to \infty$ in such a way that $0 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$.

Keywords: configuration random graph; Internet graph; conditional graph; vertex degree; degree structure; asymptotics.

Введение

При моделировании сложных сетей коммуникаций широко используется теория случайных графов [7]. Важнейшими примерами таких сетей являются Интернет и социальные сети. Наблюдения за реальными сетями показали [6], что степени узлов можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Установлено, что число узлов, степени которых равны k, при $k \to \infty$ пропорционально k^{-g}, где g – положительный параметр. Поэтому в [9] предложено в моделях сетей использовать следующее распределение случайной величины ξ, равной степени любой вершины графа:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = h(k)k^{-g}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (1)$$

где $g > 1$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся функция. Одним из видов графов, наиболее часто используемых для моделирования сетей, являются так называемые конфигурационные графы, введенные в работе [5]. В таких графах степень каждой вершины равна числу различных инцидентных ей различимых полуребер, для которых смежные вершины еще не определены. Если сумма степеней вершин оказывается нечетной, то в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени. Формирование графа завершается путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом и образования таким образом ребер. Понятно, что при этом могут появляться петли и кратные ребра. В [9] отмечается, что вспомогательная вершина и инцидентное ей ребро не влияют на предельное поведение основных характеристик графа при стремлении к бесконечности числа вершин. Поэтому ниже мы будем рассматривать только степени основных вершин. Поскольку такие конфигурационные графы используются для моделирования сети Интернет, в некоторых работах (см., например, [8]) их называют Интернет-графами.

В статье [3] впервые рассматривались условные Интернет-графы при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n, а распределение (1) задавалось следующим образом:

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (2)$$

Очевидно, что (2) является частным случаем распределения (1), если $g = \tau + 1$ и $h(k) = \tau + o(1)$. В этих условиях в [3] найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при различном характере стремления числа вершин и числа ребер к бесконечности и различных значениях параметра τ. Доказательства этих результатов в значительной степени опирались на использование обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным [1].

В статье [2] впервые изучались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин, обладающим свойствами: $p_k > 0, k = 1, 2, \ldots$ и при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad (3)$$

где $d > 0$, $g \geqslant 1$, $h \geqslant 0$, $g + h > 1$. В этой же статье приводятся различные примеры распределений степеней, обладающих названными свойствами. В частности, такие распределения возникают, если распределение (2) является случайным из-за случайного параметра τ с известным законом распределения. Нетрудно видеть, что распределение, обладающее свойством (3), является частным случаем распределения (1).

Пусть N – число вершин графа. Обозначим $\xi_1, \ldots, \xi_N$ степени вершин $1, \ldots, N$ соответственно, эти случайные величины независимы и распределены так же, как и ξ. Пусть $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$. Если выполнено условие $\zeta_N = n$, то в таком условном графе степени вершин уже не являются независимыми. Обозначим $\eta_{(N)}$ и μ_r случайные величины, равные максимальной степени вершины и числу вершин заданной степени r соответственно. В [2] найдены предельные распределения этих случайных величин при различном характере стремления N и n к бесконечности. Естественно возникает задача получения аналогичных результатов в наиболее общем случае, когда степени вершин имеют распределение (1). Такая задача в настоящей статье рассматривается впервые. Основная трудность в соответствующих доказательствах заключается в том, что в (1) неизвестен явный вид медленно меняющейся функции $h(k)$. Проще всего такая задача решается при условии $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$, что и будет сделано в настоящей статье. Для этого мы будем использовать те же схемы доказательств, терминологию и обозначения, что и в статье [2]. Остальные случаи предельного поведения N и n будут рассмотрены в других публикациях.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теоремы 1 для $\eta_{(N)}$ и теоремы 2 для μ_r. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–11), с помощью которых в последнем разделе статьи доказываются теоремы 1 и 2.

Основные результаты

Введем независимые случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \lambda^k p_k / B(\lambda), \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, N, \quad 0 < \lambda < 1,$

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$m = m(\lambda) = \mathbf{E}\eta_1 = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k, \qquad (6)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\eta_1 = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k^2\lambda^k p_k - m^2. \qquad (7)$$

Обозначим также

$$M = \mathbf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k. \qquad (8)$$

Замечание. Из (1) и (8) следует, что если $g > 2$, то M конечно, а если $g < 2$, то $M = \infty$. Далее в качестве параметра λ будем использовать единственное решение уравнения

$$m(\lambda) = n/N. \qquad (9)$$

В статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$, а $r = r(N, n)$ выбираются так, что*

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r)}{B(\lambda)r^g} \to \gamma, \qquad (10)$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r+k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}\}(1+o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$. Тогда для любого натурального r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2}(1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)\right). \qquad (11)$$

Вспомогательные утверждения

Из (1) и (4) нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N\}$$
$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \ldots + \eta_N = n\}.$$

Введем вспомогательные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leqslant r\}, \qquad (12)$$

где $i = 1, \ldots, N$, и пусть $\nu_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N$, $\nu_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \ldots + \eta_N^{(r)}$. Из леммы 1 следует, что выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1], в рамках которой имеет место такое утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = n\}},$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\eta_1 > r\}. \qquad (13)$$

Пусть $\tilde{\eta}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\eta}_N^{(r)}$ – случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \qquad (14)$$

где $i = 1, \ldots, N$. Обозначим также $\tilde{\nu}_N^{(r)} = \tilde{\eta}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\eta}_N^{(r)}$. Из леммы 1, (4) и (14) следует, как известно [1], такой результат.

Лемма 3. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\}$$
$$= \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = n\}}.$$

Леммы 2 и 3 будут использованы при доказательстве теорем 1 и 2 соответственно. Для этого ниже будут рассмотрены асимптотики бинома $(1 - P_r)^N$ из леммы 2, биномиальных вероятностей из леммы 3 и сумм $\nu_N, \nu_N^{(r)}, \tilde{\nu}_N^{(r)}$. Сначала выясним простейшие свойства параметра λ.

Лемма 4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$. Тогда $0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda \to 0$. Тогда из (4), (6), (9) следует, что

$$\frac{n}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k}{B(\lambda)} \to 1,$$

что противоречит условию $n/N \geqslant C_1 > 1$. Пусть $\lambda = 1 - x, x \to 0$. Тогда из (5) видим, что для любого натурального A

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{A} p_k + o(1) + \sum_{k=A+1}^{\infty} \lambda^k p_k. \qquad (15)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=A+1}^{\infty} \lambda^k p_k < \mathbf{P}\{\xi > A\},$$

а последняя вероятность, как видно из (1), может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A. Отсюда и из (15) находим, что $B(\lambda) \to 1$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k = (1+o(1)) \sum_{k=1}^{A} kp_k + \sum_{k=A+1}^{\infty} k\lambda^k p_k,$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k \geqslant M(1+o(1).$$

Отсюда и из (6), (9) очевидным образом приходим к противоречию с условием $n/N \leqslant C_2 < M$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим асимптотику NP_r.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого фиксированного* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$NP_{r+k} = \gamma \lambda^k (1-\lambda)^{-1}(1+o(1)).$$

Доказательство. Из (12) и (13) следует, что

$$NP_{r+k} = Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{r+j+k+1}(\lambda)}{p_{r+1}(\lambda)}. \qquad (16)$$

Отсюда и из (1), (4) вытекает:

$$NP_{r+k} = Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{k+j} \qquad (17)$$

$$\times \left(1 - \frac{j+k}{r+j+k+1}\right)^g \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)}.$$

Из (10) и леммы 4 находим, что $r \to \infty$. Пусть A – некоторое натуральное число. Из теоремы 1.1 [4] следует, что

$$\sum_{j=0}^{A} \lambda^{k+j} \left(1 - \frac{j+k}{r+j+k+1}\right)^g \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)} \qquad (18)$$

$$= (1+o(1)) \sum_{j=0}^{A} \lambda^{j+k} = \frac{1-\lambda^{A+k}}{1-\lambda} + o(1),$$

и это выражение можно сделать сколь угодно близким к $(1-\lambda)^{-1}$ выбором достаточно большого A. С помощью теоремы 1.2 [4] приходим к оценке:

$$\sum_{j=A+1}^{\infty} \lambda^j \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)} < \frac{2\lambda_1^A}{1-\lambda_1}, \qquad (19)$$

где $\lambda < \lambda_1 < 1$, а эта величина тем ближе к нулю, чем больше A. Теперь из (4), (10), (17)–(19) получаем:

$$NP_{r+k} \sim \frac{N\lambda^{r+k+1}h(r)}{B(\lambda)(1-\lambda)r^g},$$

и утверждение леммы 5 следует из условия (10).

В следующих леммах рассматривается асимптотическое поведение сумм $\nu_N, \nu_N^{(r)}, \tilde{\nu}_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 6. *Пусть* $N, n \to \infty$ *так, что* $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$. *Тогда*

$$\varphi_N(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. В данных условиях можно ограничиться почти дословным повторением доказательства соответствующей части леммы 8 [2], отличие состоит только в необходимости учета поведения медленно меняющейся функции $h(k)$ в (1). Обозначим

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda). \qquad (20)$$

В окрестности нуля справедливо разложение:

$$\ln \varphi(t) = imt - \sigma^2 t^2/2 + t^3 Q(t)/6, \qquad (21)$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2 \max_v |(\ln \varphi(v))_v'''|. \qquad (22)$$

В силу леммы 4 $0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1$, поэтому из (1), (5)–(7) следует, что

$$0 < C_5 \leqslant \sigma^2 \leqslant C_6 < \infty. \qquad (23)$$

В ходе доказательства леммы 8 [2] показано, что

$$(\ln \varphi(t))_t''' = -\left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3\frac{f_3(t)f_2(t)}{f_1^2(t)} + 2\left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\right)^3\right),$$

где

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{j-1}(\lambda e^{it})^k p_k, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда и из (1), (22) и леммы 4 находим, что

$$0 < C_7 \leqslant |Q(t)| \leqslant C_8 < \infty. \qquad (24)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{iNmt}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

утверждение леммы 6 нетрудно получить из (21)–(24).

Применяя лемму 6, соотношения (21)–(24) и повторяя дословно доказательство леммы 9 [2], получаем такой результат.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\nu_N = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}.$$

Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_N^{(r)} - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\varphi_N^{(r)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Из (4), (9), (12), (13) и (20) следует, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \frac{1}{(1-P_r)^N}e^{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}}$$

$$\times\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}(\lambda)e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}}\right)^N.$$

Отсюда и из леммы 6 получаем:

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \frac{1+o(1)}{(1-P_r)^N}e^{-t^2/2}$$

$$\times\left(1-(1+o(1))\sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}}\right)^N. \qquad (25)$$

Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}}$$

$$= P_r + O\left(\frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda)\right),$$

и, как видно из (25), для доказательства леммы 8 достаточно убедиться, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda) = o(1/N). \qquad (26)$$

По аналогии с (15), (16) с помощью леммы 4 находим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda) = O(rp_{r+1}(\lambda)). \qquad (27)$$

Из свойств медленно меняющейся функции очевидным образом следует, что соотношение (10) имеет место, только если $r = o(\sqrt{N})$. Отсюда, из леммы 4 и (16), (23), (27) следует (26). Лемма 8 доказана.

Как и в случае леммы 7, повторяя доказательство соответствующей части леммы 11 [2], с помощью леммы 8 приходим к такому утверждению.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}.$$

Обозначим m_r и σ_r^2 математическое ожидание и дисперсию распределения (14) соответственно. Разумеется,

$$m_r = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1-p_r(\lambda)},$$

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1-p_r(\lambda))^2}\left(1-p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)\right). \qquad (28)$$

Пусть $\tilde{\varphi}_S(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\tilde{\nu}_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma\sqrt{S})$. Из (4), (7) и (14) вытекает, что характеристическая функция $\tilde{\varphi}_r(t)$ случайной величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}$ имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_(\lambda)e^{itr}}{1-p_r(\lambda)}.$$

Используя это равенство и дублируя доказательство соответствующего утверждения леммы 12 [2], убеждаемся в справедливости следующего результата.

Лемма 10. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$, а r – фиксированное натуральное число. Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1+o(1))$ для любого фиксированного t*

$$\tilde{\varphi}_S(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Лемма 10 говорит о слабой сходимости распределения суммы $\tilde{\nu}_S^{(r)}$ к нормальному закону. На самом деле имеет место и локальная сходимость, что нетрудно проверить, повторяя доказательство леммы 13 [2].

Лемма 11. *Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда при* $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ *для целых неотрицательных* k *равномерно относительно* $z_r = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ *в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi S}} e^{-z_r^2/2}.$$

Доказательства теорем

Из лемм 7 и 9 следует, что при выполнении условий теоремы 1

$$\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\nu_N = n\} \to 1. \qquad (29)$$

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 1 следует из лемм 2, 5 и соотношения (29).

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$k = Np_r(\lambda) + u_r\sigma_{rr}\sqrt{N}. \qquad (30)$$

Согласно нормальному приближению биномиальных вероятностей

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \times \exp\left\{-\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}\right\}. \qquad (31)$$

Из леммы 7 получаем:

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} \sim (\sigma\sqrt{2\pi N})^{-1}. \qquad (32)$$

Применяя лемму 3 и собирая вместе (6), (7), (11), (28), (30)–(32), прямыми вычислениями завершаем доказательство теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

2. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

3. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

4. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.

5. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02 // IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

9. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 24.02.2020

References

1. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

2. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB MATH.* 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832

3. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

4. *Seneta E.* Regularly varying functions. *Lecture Notes in Math.* 508. Berlin: Springer, 1976. 112 p.

5. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02. *IEEE*. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

9. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received February 24, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218