Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 62–66
DOI: 10.17076/mat1201

УДК 515.12

О СООТНОШЕНИИ КЛАССОВ КОМПАКТОВ ФЕДОРЧУКА И РОЗЕНТАЛЯ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Вопрос о соотношении классов компактов Федорчука и Розенталя впервые затронут в работе С. Ватсона 1992 года. Примером компакта Розенталя, который не является компактом Федорчука счетной спектральной высоты, является известный компакт Хелли. В работе показано, что существуют многочисленные примеры компактов Федорчука спектральной высоты 3 (среди которых есть и совершенно нормальные компакты), не являющихся компактами Розенталя.

Ключевые слова: вполне замкнутое отображение; компакт Федорчука; компакт Розенталя; LUR-норма.

A. V. Ivanov. ON THE RELATION BETWEEN THE CLASSES OF FEDORCHUK AND ROSENTHAL COMPACTA

The question of the relationship between the classes of Fedorchuk and Rosenthal compact spaces was first raised in 1992 by Watson. An example of a Rosenthal compact, which is not a Fedorchuk compact of countable spectral height, is the well-known Helly compact. It is shown here that there exist numerous examples of Fedorchuk compacta of spectral height 3 (among which there are perfectly normal compacta) that are not Rosenthal.

Keywords: fully closed mapping; Fedorchuk compactum; Rosenthal compactum; LUR-norm.

Вопрос о соотношении классов компактов Федорчука и Розенталя впервые был затронут в работе С. Ватсона 1992 года, где была сформулирована следующая проблема (см. [10, problem 3.2.14]): верно ли, что компакт Хелли можно представить как предел счетной обратной последовательности резольвент? Компакт Хелли — наиболее известный пример из класса компактов Розенталя, а понятие резольвенты лежит в основе определения компактов Федорчука. Проблема Ватсона в 2018 году была решена отрицательно [4].

Тематика данной заметки связана с результатами, касающимися перенормировки банахова пространства $C(X)$ непрерывных функций, заданных на компакте X. В работе [7] доказано существование LUR-нормы на $C(X)$ для компактов X, лежащих в некотором подклассе класса компактов Розенталя. В [6] аналогичное утверждение установлено для компактов Федорчука спектральной высоты 3. Указанные результаты естественно приводят к вопросу о соотношении этих двух классов (такой вопрос был поставлен, в частности, Т. Банахом на конференции «2018 International Conference on Topology and its Applications» в Нафпактосе (Греция) в июле 2018). Известно, что классический компакт «две стрелки»: $S(I) = [0,1] \times_l \{0,1\}$ (лексикографическое произведение отрезка I на двоеточие с порядковой топологией) является компактом Розенталя и одновременно компактом Федорчука спектральной высоты 3. В то же время компакт Хелли, для которого существует LUR-норма на $C(X)$ (см., [8]), не является компактом Федорчука счетной спектральной высоты согласно [4]. В настоящей заметке показано, что существуют разнообразные примеры компактов Федорчука спектральной высоты 3 (в числе которых и совершенно нормальные компакты), которые не являются компактами Розенталя.

Напомним, что компактами Розенталя называются компактные подмножества пространства функций первого класса Бэра (с топологией поточечной сходимости), заданных на полном сепарабельном метрическом пространстве.

Определение компактов Федорчука, или F-компактов, неразрывно связано с понятием вполне замкнутого отображения, которое обобщает упомянутую выше конструкцию резольвенты. Непрерывное сюръективное отображение $f : X \to Y$ компактов[1] называется вполне замкнутым, если для любых двух дизъюнктных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ пересечение $f(A) \cap f(B)$ конечно (см. [5]). Вполне замкнутое отображение f будем называть *допустимым*, если прообразы $f^{-1}(y)$ всех точек $y \in Y$ имеют счетный вес. Компакт X называется F-компактом, если его можно представить в виде предела непрерывного вполне упорядоченного обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$, в котором X_0 есть точка, а все соседние проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ $(\alpha+1 < \gamma)$ – допустимые вполне замкнутые отображения. Наименьшая возможная длина γ такого спектра S, дающего в пределе X, называется спектральной высотой $sh(X)$ F-компакта X (см. [3]).

Ниже пойдет речь исключительно об F-компактах спектральной высоты 3, которые могут быть охарактеризованы как неметризуемые компакты, обладающие допустимым вполне замкнутым отображением на метризуемый неодноточечный компакт. Таким образом, со всяким F-компактом X спектральной высоты $sh(X) = 3$ изначально связано некоторое допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \to K$ на метризуемый компакт K. При этом множество $T(X, f) = \{f^{-1}(t) : t \in K, |f^{-1}(t)| > 1\}$ нетривиальных слоев отображения f несчетно в силу неметризуемости X (см. [5, предложение 3.10]). В работе [2] доказано, что допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \to K$ компакта X на метризуемый компакт K определено почти однозначно. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. [2] *Если $f_i : X \to K_i$, $i = 1, 2$ — допустимые вполне замкнутые отображения компакта X на метризуемые компакты K_1, K_2, то множество несовпадающих нетривиальных слоев f_1 и f_2 не более чем счетно. Другими словами,*

$$|T(X, f_1)\Delta T(X, f_2)| \leqslant \omega_0,$$

где Δ обозначает симметрическую разность множеств.

Для всякого допустимого вполне замкнутого отображения $f : X \to K$ компакта X на метризуемый компакт K введем обозначения:

$$A(X, f, 2) = \{t \in K : |f^{-1}(t)| = 2\},$$

$$A(X, f, > 2) = \{t \in K : |f^{-1}(t)| > 2\}.$$

В силу теоремы 1 свойства счетности[2] или несчетности множеств $A(X, f, 2)$ и $A(X, f, > 2)$ не зависят от выбора конкретного отображения f, т. е. являются топологическими свойствами F-компакта X. Поэтому, когда речь идет о мощности этих множеств, параметр f в их обозначении можно опустить.

В формулировке следующей ниже теоремы 2 фигурирует понятие ps-свойства (perfect set property) топологического пространства, которое означает, что в данном пространстве имеется подмножество, гомеоморфное канторовскому совершенному множеству Π. Доказательство теоремы 2 опирается на следующую лемму, которая фактически доказана в [2].

Лемма 1. *Пусть $f_i : X \to K_i$, $i = 1, 2$ — непрерывные отображения компакта X на метризуемые компакты K_i с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t)$, $t \in K_i$, причем f_2 вполне замкнуто. Тогда множество $\{t \in K_2 : |f_1(f_2^{-1}(t))| > 1\}$ не более чем счетно.*

Другими словами, в условиях леммы почти все слои отображения f_2 содержатся в слоях f_1.

Теорема 2. *Пусть X — совершенно нормальный F-компакт спектральной высоты 3, являющийся компактом Розенталя. Тогда для X выполняются неравенства $|A(X, 2)| > \omega_0$, $|A(X, > 2)| \leqslant \omega_0$ и для любого допустимого вполне замкнутого отображения $f : X \to K$ на метризуемый компакт K множество $A(X, f, 2)$ обладает ps-свойством.*

Доказательство. Всякий совершенно нормальный F-компакт счетной спектральной высоты наследственно сепарабелен (см. [3]).

[1] Компакт – компактное хаусдорфово пространство.

[2] Для упрощения терминологии под счетным множеством мы понимаем множество мощности $\leqslant \omega_0$.

Следовательно, в X нет несчетных дискретных подпространств и, согласно теореме С. Тодорчевича [9, теорема 3], существует непрерывное отображение $f_1 : X \to K_1$ на метризуемый компакт K_1, все слои которого $f_1^{-1}(t)$, $t \in K_1$ содержат не более двух точек. Пусть $f_2 : X \to K_2$ — произвольное допустимое вполне замкнутое отображение X на метризуемый компакт K_2. По лемме 1 почти все слои f_2 содержатся в слоях f_1, т. е. состоят не более чем из двух точек. Откуда сразу следует, что $|A(X, > 2)| \leqslant \omega_0$. А поскольку компакт X неметризуем и множество нетривиальных слоев f_2 несчетно, получаем, что $|A(X, 2)| > \omega_0$.

Пусть теперь $f : X \to K$ — произвольное допустимое вполне замкнутое отображение на метризуемый компакт. Поскольку X — наследственно сепарабельный компакт Розенталя, в X топологически содержится пространство «две стрелки» $S(I)$ (см. [9, теорема 4]). Положим, $g_1 = f|_{S(I)} : S(I) \to f(S(I)) = K_1 \subset K$, и пусть g_2 — стандартное проектирование $S(I)$ на отрезок I. Отображение g_1 вполне замкнуто как ограничение вполне замкнутого отображения на замкнутое подпространство (см. [5, предложение 1.14]); g_2 также является вполне замкнутым. Поэтому согласно теореме 1 почти все слои g_1 состоят из двух точек. Следовательно,

$$|K_1 \setminus A(X, f, 2)| \leqslant \omega_0.$$

Таким образом, множество $K_1 \cap A(X, f, 2)$ является несчетным борелевским подмножеством K и, следовательно, обладает ps-свойством. □

Установленное при доказательстве теоремы 2 ограничение на множество $A(X, f, 2)$ (ps-свойство) для всякого содержащего $S(I)$ совершенно нормального F-компакта спектральной высоты 3 на первый взгляд представляется слишком слабым. Однако следующее предложение показывает, что усилить это требование нельзя.

Предложение 1. *Для любого подмножества $B \subset I = [0, 1]$, обладающего ps-свойством, существуют совершенно нормальный F-компакт X спектральной высоты 3 и допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \to I$ такие, что X содержит $S(I)$, $A(X, f, 2) = B$ и $A(X, f, > 2) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\pi : S(I) \to I$ – проекция «двух стрелок» на отрезок. Рассмотрим на $S(I)$ разбиение R, нетривиальными элементами которого являются множества $\pi^{-1}(t)$ при $t \notin B$. Поскольку отображение π вполне замкнуто, фактор-пространство $X = S(I)/R$ по разбиению R является хаусдорфовым (см. [5]). Кроме того, в [5] доказано, что однозначно определенное отображение $f : X \to I$, удовлетворяющее равенству: $\pi = f \circ g$, где $g : S(I) \to X$ – факторная проекция, является вполне замкнутым. Таким образом, X – совершенно нормальный F-компакт спектральной высоты 3. При этом очевидно, что $A(X, f, 2) = B$ и $A(X, f, > 2) = \varnothing$.

Покажем, что X содержит $S(I)$. По условию в B содержится канторово совершенное множество Π. Пусть $a = \inf \Pi$, $b = \sup \Pi$. Тогда Π можно представить в виде:

$$\Pi = [a, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n),$$

где (a_n, b_n) — попарно дизъюнктные интервалы, лежащие на отрезке $[a, b]$. Склеивая точки каждой пары a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, мы получим факторное отображение $h : \Pi \to I'$ на некоторый отрезок I'.

Множество $f^{-1}\Pi$ состоит из точек вида $(t, 0), (t, 1) \in f^{-1}(t) \subset S(I)$, где $t \in \Pi$. Рассмотрим в $f^{-1}\Pi$ подмножество

$$Z = \bigcup \{f^{-1}(t) : t \in \Pi, t \neq a_n, b_n, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\cup \{(a_n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(b_n, 1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко проверить, что отображение $s : Z \to S(I')$, действующее по формулам: $s(t, 0) = (h(t), 0)$, $s(t, 1) = (h(t), 1)$, где $t \in \Pi$, является гомеоморфизмом Z и $S(I')$. □

Из теоремы 2 сразу следует, что любой совершенно нормальный компакт Федорчука спектральной высоты 3, для которого множество $A(X, > 2)$ несчетно, не является компактом Розенталя. Такие примеры известны (см. [5]), однако все они построены при дополнительных теоретико-множественных предположениях (например, в предположении континуум-гипотезы CH). Тем не менее справедлива следующая «наивная» теорема.

Теорема 3. *Существует сепарабельный компакт Федорчука X спектральной высоты 3, не являющийся компактом Розенталя, для которого $|A(X, 2)| \leqslant \omega_0$ и $|A(X, > 2)| > \omega_0$.*

Доказательство. В предположении CH искомым компактом является любой упомянутый выше совершенно нормальный F-компакт.

Предположим теперь, что выполняется отрицание континуум-гипотезы. Пусть Y — F-компакт спектральной высоты 3 с несовпадающими размерностями, построенный В. В. Федорчуком (см. [1, гл. 5.6.2]). Компакт Y сепарабелен и обладает допустимым вполне замкнутым отображением $f : Y \to K$ на метрический компакт, все слои которого имеют мощность континуум. Пусть B — несчетное подмножество K мощности $< c$. Рассмотрим разбиение R компакта Y, нетривиальными элементами которого являются множества $f^{-1}(t)$ при $t \notin B$. Как и при доказательстве предложения 1, получаем, что фактор-пространство $X = Y/R$ является сепарабельным F-компактом спектральной высоты 3 и существует вполне замкнутое отображение $g : X \to K$, нетривиальные слои которого совпадают с множествами $f^{-1}(t)$, $t \in B$.

Согласно результатам С. Тодорчевича [9, теорема 5], всякий сепарабельный компакт Розенталя либо содержит дискретное подмножество мощности континуум, либо допускает непрерывное отображение на метризуемый компакт кратности не больше 2.

Компакт X не содержит дискретных подмножеств мощности c. В самом деле, если D – дискретное подмножество X, то множество точек D, в которых отображение g взаимно однозначно, не более чем счетно в силу метризуемости K. Пересечение D с каждым слоем $g^{-1}(t)$, $t \in B$ также не более чем счетно в силу метризуемости такого слоя. Следовательно, $|D| \leqslant |B| < c$. В силу леммы 1 компакт X нельзя непрерывно отобразить на метрический компакт с кратностью $\leqslant 2$, поскольку вполне замкнутое отображение g имеет несчетное множество слоев бесконечной мощности. Итак, X не является компактом Розенталя. □

Пример совершенно нормального F-компакта спектральной высоты 3, не являющегося компактом Розенталя, можно построить также на основе установленного в теореме 2 ps-свойства множества $A(X, f, 2)$.

Теорема 4. *Существует совершенно нормальный F-компакт X спектральной высоты 3, не являющийся компактом Розенталя, для которого $|A(X, > 2)| \leqslant \omega_0$.*

Доказательство. Пусть B — множество Бернштейна, лежащее на отрезке I (такое множество пересекается с каждым замкнутым нигде не плотным подмножеством I по счетному числу точек). Множество B несчетно и не обладает ps-свойством. Как и при доказательстве предложения 1, рассмотрим вполне замкнутую проекцию $\pi : S(I) \to I$ и для подмножества $B \subset I$ построим фактор-пространство X и вполне замкнутое отображение $f : X \to I$. Мы получим совершенно нормальный F-компакт X спектральной высоты 3, для которого $A(X, f, 2) = B$ и $A(X, f, > 2) = \varnothing$. Поскольку B не обладает ps-свойством, X не является компактом Розенталя. □

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.

2. *Гулько С. П., Иванов А. В.* О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1

3. *Иванов А. В.* О наследственной нормальности F-бикомпактов // Матем. заметки. 1986. Т. 39, вып. 4. С. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007

4. *Иванов А. В.* О произведениях F-компактных пространств // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 2. С. 345–352. doi: 10.17377/smzh.2018.59.209

5. *Федорчук В. В.* Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, вып. 4. С. 105–235. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

6. *Gul′ko S. P., Ivanov A. V., Shulikina M. S., Troyanski S.* Locally uniformly rotund renormings of the spaces of continuous functions on Fedorchuk compacts. 2018. URL: www.um.es/beca/xvieafmv/talks/Troyanski.pdf (дата обращения: 15.01.2020).

7. *Haydon R., Moltó A., Orihuela J.* Spaces of functions with countably many discontinuities // Israel J. Math. 2007. Vol. 158. P. 19–39. doi: 10.1007/s11856-007-0002-1

8. *Moltó A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M.* Non-linear transfer technique // Lect. Notes Math. 1951. Berlin: Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85031-1

9. *Todorčević S.* Compact subsets of the first Baire class // J. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 1179–1212. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00312-4

10. *Watson S.* The construction of topological spaces: plank and resolutions. Recent Progress in general Topology / M. Hušek and J. van Mill (eds). North-Holland, Amsterdam, 1992. P. 673–757.

Поступила в редакцию 20.02.2020

References

1. *Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A.* Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to the dimension theory]. Moscow: Nauka, 1973. 577 p.

2. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V.* O vpolne zamknutykh otobrazheniyakh kompaktov Fedorchuka [On fully closed mappings of Fedorchuk compacta]. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matem. i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. and Mechanics]. 2017. No. 50. P. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1

3. *Ivanov A. V.* Hereditary normality of F-bicompacta. *Math. Notes.* 1986. Vol. 39, iss. 4. P. 332–334. doi: 10.1007/BF01158007

4. *Ivanov A. V.* On products of F-compact spaces. *Sib. Math. J.* 2018. Vol. 59, iss. 2. P. 270–275. doi: 10.17377/smzh.2018.59.209

5. *Fedorchuk V. V.* Fully closed mappings and their applications. *J. Math. Sci.* 2006. Vol. 136, no. 5. P. 4201–4292. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

6. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V., Shulikina M. S., Troyanski S.* Locally uniformly rotund renormings of the spaces of continuous functions on Fedorchuk compacts. 2018. URL: www.um.es/beca/xvieafmv/talks/Troyanski.pdf (accessed: 15.01.2020).

7. *Haydon R., Moltó A., Orihuela J.* Spaces of functions with countably many discontinuities. *Israel J. Math.* 2007. Vol. 158. P. 19–39. doi: 10.1007/s11856-007-0002-1

8. *Moltó A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M.* Non-linear transfer technique. *Lect. Notes Math.* 1951. Berlin: Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85031-1

9. *Todorčević S.* Compact subsets of the first Baire class. *JAMS.* 1999. Vol. 12, no. 4. P. 1179–1212. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00312-4

10. *Watson S.* The construction of topological spaces: plank and resolutions. *Recent Progress in general Topology.* Eds M. Hušek and J. van Mill. 1992. P. 673–757.

Received February 20, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441