Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 98–109
DOI: 10.17076/mat1200

УДК 519.179.4

О МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматриваются условные конфигурационные графы со случайными одинаково распределенными степенями вершин при условии, что сумма степеней вершин не превосходит n. Распределение ξ степени любой вершины графа неизвестно и имеет только следующее ограничение при $k \to \infty$:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

где $d > 0$, $g > 1$, $h \geqslant 0$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершины при стремлении к бесконечности числа вершин графа и n.

Ключевые слова: конфигурационный граф; предельное распределение; степень вершины.

I. A. Cheplyukova. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs under the condition that the sum of vertex degrees is bounded from above by n. The vertex degrees are independent identically distributed random variables. The distribution of the vertex degree ξ is unknown and has the only limiting condition that

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

where $k \to \infty$, $d > 0$, $g > 1$, $h \geqslant 0$. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree as the number of graph vertices and n tends to infinity.

Keywords: configuration graph; the limit distribution; vertex degree.

Введение

Исследованию структуры конфигурационных графов посвящено множество работ (см., например, [15, 16]). Конфигурационная модель является одной из наиболее известных моделей, предназначенных для описания структуры и прогнозирования динамики развития сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, транспортные, социальные сети и пр. Наблюдения за реальными сетями показали (см., например, [14, 15]), что все они обладают общими свойствами, которые должны быть отражены в моделях. Одно из важнейших свойств такого рода состоит в том, что степени вершин можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, причем число вершин степени, не меньшей чем k, при $k \to \infty$ пропорционально $k^{-\tau}$, где τ – некоторый положительный параметр.

Процесс построения конфигурационного графа можно представить следующим образом. Сначала определяется степень каждой вершины в соответствии с заданным распределением вероятностей. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер [17], число которых равно степени данной вершины. Все вершины и полуребра различны. На следующем этапе построения происходит образование ребер: на каждом шаге выбираются по два ребра равновероятно и, соединившись, они образуют ребро. Если сумма степеней нечетна, то вводится вспомогательная вершина, степень которой равна 1. Очевидно, что при таком построении возможны появления петель и кратных ребер. В [17] было замечено, что эта вспомогательная вершина не оказывает влияния на асимптотическое поведение основных числовых характеристик графа. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин даже при появлении дополнительной вершины. В [17] предложено в качестве моделей сложных сетей использовать конфигурационные графы, в которых случайная величина ξ, равная степени любой вершины, имеет следующее распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \tag{1}$$

где $k = 1, 2, ..., \tau > 0$.

В [3, 6, 7] рассматривались условные конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и разными условиями на число ребер. Такие условные конфигурационные графы могут быть полезны при описании сетей, для которых можно оценить число связей. Главное внимание в этих работах уделяется изучению предельного поведения двух числовых характеристик: максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени. В последнее время появляются работы (см., например, [13]), в которых было замечено, что с развитием сетей распределение степеней вершин может меняться и даже носить случайный характер. В [4, 8] рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней вершин графа известна и равна n, а параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$.

В данной работе изучаются конфигурационные графы, содержащие N вершин, степени $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением, имеющим только следующее ограничение при $k \to \infty$:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots$, $d > 0$, $g > 1$, $h \geqslant 0$. Далее мы будем предполагать, что $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ В [5] впервые рассматривалось подмножество таких конфигурационных графов при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n. Для них получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при $n, N \to \infty$.

Пусть $\zeta_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$. Рассмотрим условные конфигурационные графы при условии, что $\zeta_N \leqslant n$. Для таких условных графов в [9] были получены предельные распределения числа вершин заданной степени при $n, N \to \infty$. Настоящая работа посвящена исследованию предельного поведения максимальной степени вершины графа при $n, N \to \infty$.

Обозначим через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ случайные величины, равные, соответственно, степеням вершин с номерами $1, 2, \ldots, N$ в таком условном графе. Очевидно, что эти случайные величины зависимы и для целых $k_1, k_2, \ldots, k_N \geqslant 1$ таких, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_N \leqslant n$, выполняется равенство:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} \\ = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N \leqslant n\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Это равенство означает, что для независимых случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и зависимых $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ выполнены условия аналога обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [11]. Сама обобщенная схема была введена и подробно изучена В. Ф. Колчиным (см., например, [1]).

Обозначим через $\eta_{(N)}$ случайную величину, равную максимальной степени вершины в рассматриваемом графе. Для этой характеристики степенной структуры графа ниже будут доказаны предельные теоремы при N и n, стремящихся к бесконечности. Основные результаты (теоремы 1 и 2) сформулированы во втором разделе, в третьем разделе получены вспомогательные утверждения (леммы 2–9), с помощью которых в последнем разделе доказываются теоремы 1 и 2.

Основные результаты

Введем необходимые обозначения:

$$B_N = \begin{cases} \left(\frac{(g-1)^h N}{\ln^h N}\right)^{1/(g-1)}, & 1 < g < 3; \\ \sqrt{N \ln^{1-h} N}, & h = 3, 0 \leqslant h < 1; \\ \sqrt{N \ln\ln N}, & g = 3, h = 1; \\ \sigma\sqrt{N}, & g > 3 \quad \text{или} \\ & g = 3, h > 1, \end{cases}$$

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1, \tag{4}$$

$$\alpha = \begin{cases} \Gamma(2-g)d(g-1)^{h-1}\cos(\pi(g-1)/2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 < g < 2; \\ \\ -\Gamma(3-g)(g-2)^{-1}d(g-1)^{h-1} \\ \quad \times\cos(\pi(g-1)/2), \qquad 2 < g < 3, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$– значение гамма-функции в точке x.

Обозначим через $C, C_1, C_2, \ldots$ некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $n, N \to \infty$,*

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N}\right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty$, *ε – некоторая положительная постоянная и выполнено одно из условий:*

1. $1 < g < 2, n/B_N \to \infty$;
2. $g = 2, h \leqslant 1,$
   $(n - d\ln^{1-h} N(1+\varepsilon)N)/B_N \to \infty$;
3. $g = 2, h > 1, (n - (m+\varepsilon)N)/B_N \to \infty$;
4. $g > 2, (n - mN)/B_N \geqslant -C > -\infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = e^{-\gamma}(1 + o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $n, N \to \infty, 1 < g < 2$,*

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N}\right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty, z = n/B_N \leqslant C_1 < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{J_k(z)}{J_0(z)},$$

где

$$J_k(z) = \int_{-\infty}^{z} I_k(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$I_0(x)$– *плотность устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией*

$$\exp\left\{-\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\},$$

$$I_k(x) = (2\pi)^{k/2} d^k \times$$
$$\int_{B_k(x)} (x_1 \ldots x_k)^{-g} I_0(x - x_1 - \ldots - x_k)dx_1 \ldots dx_k,$$

$$B_k(x) = \left\{x_i \geqslant \left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}, i = 1, \ldots, k,\right.$$
$$\left. x_1 + \ldots + x_k \leqslant x\right\}.$$

Вспомогательные утверждения

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_1 \leqslant r\},$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, N$. Положим также

$$\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \qquad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

В [12] показано, что для случайной величины $\eta_{(N)}$ следствием из равенства (3) является следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_N^{(r)} \leqslant n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leqslant n\}}.$$

Из леммы 1 следует, что для оценки $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\}$ необходимо знать асимптотическое поведение сумм $\zeta_N, \tilde{\zeta}_N^{(r)}$ и P_r. Для суммы ζ_N будем использовать результаты статьи [9] (леммы 2–4), а исследование $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$ и P_r будет приведено ниже в леммах 5–12.

$$\lambda = \begin{cases} 0, & 1 < g < 2; \\ m, & g > 2, \end{cases} \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть $N \to \infty$ и выполнено одно из условий:*

1. $1 < g < 3, g \neq 2$;
2. $g = 3, 0 \leqslant h \leqslant 1$.

Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N - \lambda N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$\Psi_{g,h}(t) \tag{6}$$

$$= \begin{cases} \exp\left\{-\alpha|t|^{g-1}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan(\pi(g-1)/2)\right) /(g-1)^h\right\}, & 1 < g < 3, g \neq 2; \\ \exp\left\{-dt^2/2\right\}, & g = 3, h = 1; \\ \exp\left\{-dt^2/((1-h)2^{2-h})\right\}, & g = 3, \ 0 \leqslant h < 1. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть $N \to \infty$, $g = 2$, $h > 1$. Тогда существует последовательность $q_1 = q_1(N) \sim d\ln^{1-h} N$ такая, что распределение случайной величины $(\zeta_N - (m+q_1)N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем 1 и характеристической функцией*

$$\Psi(t) = \exp\left\{-d\frac{\pi}{2}|t|\left(1 + i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\}. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть $N \to \infty$, $g = 2$, $h \leqslant 1$. Тогда существует последовательность $q_2 = q_2(N)$ такая, что $q_2 \to 0$ и распределение случайной величины $(\zeta_N - d(\ln N)^{1-h}(1+q_2)N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем 1 и характеристической функцией (7).*

Лемма 5. *Пусть $N \to \infty$,*

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma\ln^h N}\right)^{1/(g-1)}(1 + o(1)),$$

где $0 < \gamma < \infty$. Тогда справедливо

$$NP_r \to \gamma.$$

Доказательство. Из (2) несложно получить, что

$$P_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}}\sum_{y\geqslant 1}\frac{1}{(r+1)y^g\ln^h((r+1)y)}.$$

Приводя последнюю сумму к интегральной, находим, что

$$P_r = \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}}\int_1^\infty \frac{dy}{y^g\ln^h((r+1)y)}$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}}\left(\int_1^{(r+1)^\varepsilon}\frac{dy}{y^g\ln^h((r+1)y)} + \int_{(r+1)^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^g\ln^h((r+1)y)}\right),$$

где выбор положительной ε будет ясен из дальнейшего. Ясно, что если $1 \leqslant y \leqslant (r+1)^\varepsilon$, то

$$(\ln((r+1)y))^{-1} = \left(\left(1 + \frac{\ln y}{\ln(r+1)}\right)\ln(r+1)\right)^{-1},$$

и последняя величина может быть сделана сколь угодно близкой к $1/\ln(r+1)$ выбором достаточно малого ε. Кроме того,

$$\int_{(r+1)^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^g\ln^h((r+1)y)} < \frac{1}{\ln^h(r+1)}\int_{(r+1)^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^g}.$$

Тогда

$$P_r = \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}\ln^h(r+1)}\int_1^\infty \frac{dy}{y^g}$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{(g-1)(r+1)^{g-1}\ln^h(r+1)}.$$

Отсюда и из условий этой леммы вытекает утверждение леммы 5. □

Рассмотрим случайную величину $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$. Обозначим

$$E(t,\gamma) = d\int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^\infty \exp\{ity\}y^{-g}dy. \tag{8}$$

Лемма 6. *Пусть $N \to \infty, 1 < g < 2$,*

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma\ln^h N}\right)^{1/(g-1)}(1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины $\tilde{\zeta}_N^{(r)}/B_N$ слабо сходится к распределению с плотностью

$$\tilde{g}_1(x) = e^{E(0,\gamma)}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}I_k(x),$$

где $I_k(x), k = 0, 1, \ldots,$ определены в формулировке теоремы 2.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}_r(t)$ характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\tilde{\xi}_1^{(r)}$ соответственно. Тогда нетрудно получить, что при любом t

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - \sum\limits_{k>r} e^{itk} p_k}{1 - P_r}. \qquad (9)$$

Пусть $\Psi_r(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\zeta}_N^{(r)}/B_N$. Из леммы 2 и равенства (9) находим, что при любом фиксированном t

$$\Psi_r(t) = (1-P_r)^{-N}\left(\varphi\left(t/B_N\right) - \sum_{k>r} p_k \exp\left\{itk/B_N\right\}\right)^N$$

$$= (1-P_r)^{-N}\Psi_{g,h}(t) \qquad (10)$$

$$\times\left(1-(1+o(1))\sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{t}{B_N}k\right\}\right)^N,$$

где $\Psi_{g,h}(t)$ определена в лемме 2 и, согласно (5) и (6), имеет вид

$$\Psi_{g,h}(t)$$

$$=\exp\left\{\frac{-\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\},$$

$$\alpha = \Gamma(2-g)d(g-1)^{h-1}\cos(\pi(g-1)/2).$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k>r} p_k \exp\left\{itk/B_N\right\}$. Пусть $y = k/B_N$. Тогда из (2) и (4) получаем, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{t}{B_N}k\right\} = d\left(\frac{\ln^h N}{(g-1)^h N}\right)^{g/(g-1)}$$

$$\times \sum_{y>\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}} \exp\{ity\}\frac{1+o(1)}{y^g}$$

$$\times \ln^{-h}\left(y\left(\frac{(g-1)^h N}{\ln^h N}\right)^{1/(g-1)}\right).$$

Отсюда, переходя от суммирования к интегрированию, находим, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\left\{itk/B_N\right\}$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{N} \int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1 + \frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{N} \int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1 + \frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

$$+ \frac{d(1+o(1))}{N} \int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1 + \frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy, \qquad (11)$$

где ε – некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Нетрудно показать, что с выбором некоторого ε справедливо

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1 + \frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

$$= (1+o(1)) \int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g} dy.$$

Кроме того,

$$\left|\int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1 + \frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy\right|$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g} dy\right|$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \cos\{ty\}\frac{1}{y^g} dy\right| + \left|\int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \cos\{ty\}\frac{1}{y^g} dy\right| \leqslant 4\frac{1}{N^{\varepsilon g}},$$

и, используя [10], нетрудно показать, что

$$\left|\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^{\varepsilon}} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}dy\right|$$

$$\leqslant N^{-\varepsilon(g-1)}\left|\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^{\varepsilon}} \frac{1}{y}\cos(ty)dy\right.$$

$$\left.+\,i\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^{\varepsilon}} \frac{1}{y}\sin(ty)dy\right|$$

$$= N^{-\varepsilon(g-1)}\left|t\left(-ci\left(\frac{dt}{\gamma(g-1)}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ si\left(\frac{dt}{\gamma(g-1)}\right)\right)\right|,$$

где $ci(x)$ и $si(x)$ обозначают интегральные косинус и синус:

$$ci(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt,$$

$$si(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Следовательно, учитывая, что $si(x)$ и $ci(x)$ не равны нулю одновременно, выбором некоторого ε интеграл

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}\left(1\right.$$

$$\left.+\,\frac{(g-1)\ln y - \ln\ln^h N + h\ln(g-1)}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

можно сделать сколь угодно близким к интегралу

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{\infty} \exp\{ity\}\frac{1}{y^g}dy.$$

Отсюда и из соотношений (8), (10) и (11) получаем, что при любом фиксированном t

$$\Psi_r(t) = (1+o(1))(1-P_r)^{-N}\Psi_{g,h}(t)$$

$$\times\left(1-(1+o(1))\frac{1}{N}E(t,\gamma)\right)^N. \qquad (12)$$

Используя (8), нетрудно убедиться, что

$$P_r = \frac{1+o(1)}{N}E(0,\gamma). \qquad (13)$$

Из (8), (12) и (13) получаем, что

$$\Psi_r(t) = \exp\left\{-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1\right.\right. \qquad (14)$$

$$\left.\left.-\ i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right) - E(t,\gamma) + E(0,\gamma)\right\}.$$

Из (8) следует, что $E(t,\gamma)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}y^{-g}d, & y \geqslant \left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}; \\ 0, & y < \left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}. \end{cases} \qquad (15)$$

Раскладывая $\exp\{-E(t,\gamma)\}$ в ряд по степеням $E(t,\gamma)$, из (14) находим, что

$$\Psi_r(t) = e^{E(0,\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{\frac{-\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\}$$

$$\times(-1)^k\frac{E^k(t,\gamma)}{k!}(1+o(1)).$$

Согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$g(x) = \frac{1+o(1)}{2\pi}e^{E(0,\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{itx - \frac{\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\right.$$

$$\left.\times\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\}E^k(t,\gamma)dt.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{itx - \frac{\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\right.$$

$$\left.\times\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\}E^k(t,\gamma)dt$$

является плотностью суммы случайных величин $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность $f_{\nu_1}(x)$ устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией:

$$\exp\left\{-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\},$$

а случайные величины $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(y)$, определенной в (15). Используя формулу свертки для k слагаемых (см., например, [2]), получаем, что $\Psi_r(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$\tilde{g}_1(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x),$$

где $I_k(x), k = 0, 1, \ldots$, определены в формулировке теоремы 2, что и завершает доказательство леммы 6. $\square$

Пусть

$$\tilde{E}(t,\gamma) = d \int\limits_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} y^{-2} dy, \tag{16}$$

$\tilde{I}_0(x)$ означает плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{\pi d|t|}{2}\left(1 + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\},$$

$$\tilde{I}_k(x) = (2\pi)^{k/2} d^k \times \tag{17}$$

$$\int\limits_{\tilde{B}_k(x)} (x_1 \ldots x_k)^{-2} \tilde{I}_0(x - x_1 - \ldots - x_k) dx_1 \ldots dx_k,$$

$$\tilde{B}_k(x) = \left\{x_i \geqslant \frac{d}{\gamma}, i = 1, \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant x\right\}.$$

Лемма 7. *Пусть* $N \to \infty$, $g = 2$, $h \leqslant 1$, $r = dN/(\gamma \ln^h N)(1 + o(1))$, $0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины* $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - d\ln^{1-h} N(1 + q_2(N))N\right)/B_N$, *где стремящаяся к нулю последовательность* $q_2(N)$ *определена в лемме 4, слабо сходится к распределению с плотностью*

$$\tilde{g}_2(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{I}_k(x).$$

Доказательство. Обозначим через $\Psi_r^{(2)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - d\ln^{1-h} N\,(1 + q_2(N))\,N\right)/B_N.$$

Тогда из (4), (9) и леммы 4 находим, что для любого фиксированного t

$$\Psi_r^{(2)}(t) = (1 - P_r)^{-N} \Psi(t) \tag{18}$$

$$\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{t\ln^h N}{N}k\right\}\right)^N,$$

где $\Psi(t)$ определено соотношением (7).

Рассмотрим $\sum\limits_{k>r} p_k \exp\left\{itk(\ln N)^h/N\right\}$. Заменяя $y = k(\ln N)^h/N$ и переходя к интегрированию, получаем, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\left\{itk(\ln N)^h/N\right\} = \frac{d(1 + o(1))}{N}$$

$$\times \int\limits_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^2}\left(1 + \frac{\ln y}{\ln N} - \frac{\ln\ln^h N}{\ln N}\right)^{-h} dy.$$

Несложно показать, что при $N \to \infty$ интеграл

$$\int\limits_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^2}\left(1 + \frac{\ln y}{\ln N} - \frac{\ln\ln^h N}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

сколь угодно близок к интегралу

$$\int\limits_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{t^2} dy.$$

Отсюда и из (7), (13), (16)–(18) следует, что для любого фиксированного t

$$\Psi_r^{(2)}(t) = \exp\left\{-\frac{d\pi|t|}{2}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right.$$

$$\left. - \tilde{E}(t,\gamma) + \tilde{E}(0,\gamma)\right\}(1 + o(1)). \tag{19}$$

Раскладывая в ряд $\exp\{-\tilde{E}(t,\gamma)\}$ по степеням $\tilde{E}(t,\gamma)$, из (19) находим, что

$$\Psi_r^{(2)}(t) = e^{\tilde{E}(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{\frac{-d\pi|t|}{2}\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\}(-1)^k \frac{\tilde{E}^k(t,\gamma)}{k!}(1 + o(1)).$$

Учитывая, что $\tilde{E}(t,\gamma)$ является преобразованием Фурье функции $f(y)$, заданной в (15) при $g = 2$, получаем, что согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$g_1(x) = \frac{1 + o(1)}{2\pi} e^{\tilde{E}(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{itx - \frac{\pi d|t|}{2}\right.$$

$$\left.\times \left(1 + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\} \tilde{E}^k(t,\gamma)dt.$$

Из формулы обращения следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi d|t|}{2}\left(1 + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\} \tilde{E}^k(t,\gamma)dt$$

есть плотность суммы случайных величин $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{\pi d|t|}{2}\left(1 + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\},$$

а случайные величины $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(x)$, определенной в (15) при $g = 2$. Используя формулу свертки для k слагаемых, получаем, что $\Psi_r^{(2)}(t)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$\tilde{g}_2(x) = e^{\tilde{E}(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{I}_k(x),$$

где $\tilde{I}_0(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{\pi d|t|}{2}\left(1 + i\frac{t}{|t|}\ln|t|\right)\right\},$$

а $\tilde{I}_k(x), k = 1, 2, \ldots,$ заданы соотношениями (17), что и завершает доказательство леммы 7. □

Лемма 8. *Пусть* $N \to \infty$, $g = 2$, $h > 1$, $r = dN/(\gamma \ln^h N)(1 + o(1))$, $0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины* $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - (m + q_1(N))N\right)/B_N$, *где сходящаяся к нулю последовательность* $q_1(N)$ *определена в лемме 3, слабо сходится к распределению с плотностью* $\tilde{g}_2(x)$, *заданной в формулировке леммы 7.*

Доказательство леммы 8 проводится аналогично доказательству леммы 7, при этом вместо леммы 4 применяется лемма 3.

Лемма 9. *Пусть* $N \to \infty, 2 < g < 3,$

$$r = \left(\frac{dN(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N}\right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

где $0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины* $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm\right)/B_N$ *слабо сходится к устойчивому закону с показателем* $g-1$ *и характеристической функцией*

$$\exp\left\{-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right)\right)\right\},$$

где α *определено в (4).*

Доказательство. В статье [9] при доказательстве леммы 2 показано, что в окрестности нуля

$$\ln\varphi(t) = imt + \frac{\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h \ln^h|t|}$$

$$\times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi(g-1)}{2}\right)(1 + o(1)). \qquad (20)$$

Из (9), (20) и леммы 5 находим, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \left(1 + \frac{\gamma(1 + o(1))}{N}\right)\left(\varphi(t) - \sum_{k>r} e^{itk} p_k\right).$$

Отсюда, используя равенство

$$e^{itk} = 1 + \delta(k), |\delta(k)| < kt, \qquad (21)$$

соотношения (2) и (20), получаем, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = 1 + imt - \alpha\frac{|t|^{(g-1)}}{(g-1)^h}\ln^{-h}\frac{1}{|t|}$$

$$\times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi(g-1)}{2}\right)(1 + o(1)) + o(1/N).$$

Тогда для любого фиксированного t справедливо

$$\ln\tilde{\varphi}_r^N\left(t(\ln^h N/((g-1)^h N))^{1/(g-1)}\right)$$

$$= itm\left(\frac{\ln^h N}{N^{2-g}(g-1)^h}\right)^{1/(g-1)}$$

$$-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi(g-1)}{2}\right)(1 + o(1)).$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы 9. □

Лемма 10. *Пусть* $N \to \infty, g = 3, h < 1$

$$r = \left(\frac{dN2^{h-1}}{\gamma \ln N}\right)^{1/2}(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty.$$

Тогда распределение случайной величины $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm\right)/B_N$ *слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией*

$$\exp\left\{-\frac{dt^2}{(1-h)2^{2-h}}\right\}.$$

Доказательство. В статье [9] при доказательстве леммы 2 показано, что в окрестности нуля

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{dt^2}{(1-h)2}\ln^{1-h}\frac{1}{|t|} + o\left(t^2\ln^{1-h}\frac{1}{|t|}\right). \qquad (22)$$

Отсюда, из леммы 5 и соотношений (2) и (21) получаем, что

$$\ln\tilde{\varphi}_r(t) = \left(\varphi(t) - P_r + O\left(\sum_{k>r} tkp_k\right)\right) \times (1-P_r)^{-1} = 1 + imt - \frac{dt^2}{(1-h)2}\ln^{1-h}\frac{1}{|t|} + o\left(\frac{t}{N} + t^2\ln^{1-h}\frac{1}{|t|}\right).$$

Тогда при любом фиксированном t находим, что

$$\ln\tilde{\varphi}_r^N\left(t/\sqrt{N\ln^{1-h}N}\right) = \frac{imt\sqrt{N}}{\ln^{(1-h)/2}N} - \frac{dt^2}{(1-h)2^{2-h}} + o(1).$$

Отсюда и из (4) следует утверждение леммы 10. □

Лемма 11. *Пусть* $N\to\infty, g=3, h=1$

$$r = \left(\frac{dN}{\gamma\ln N}\right)^{1/2}(1+o(1)), 0<\gamma<\infty.$$

Тогда распределение случайной величины $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm\right)/B_N$ *слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией*

$$\exp\left\{-\frac{dt^2}{2}\right\}.$$

Доказательство леммы 8 проводится аналогично доказательству леммы 10, при этом вместо равенства (22) мы используем соотношение, полученное в [9] при доказательстве леммы 2 для $g=3, h=1$:

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{dt^2}{2}\ln\ln\frac{1}{|t|} + o\left(t^2\ln\ln\frac{1}{|t|}\right).$$

Лемма 12. *Пусть* $N\to\infty$,

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma\ln^h N}\right)^{1/(g-1)}(1+o(1)),$$

где $0<\gamma<\infty$ *и выполнено одно из условий:*

1. $g>3$;
2. $g=3, h>1$.

Тогда распределение случайной величины $\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm\right)/B_N$ *слабо сходится к стандартному нормальному закону.*

Доказательство. При выполнении условий леммы случайные величины ξ_i и $\tilde{\xi}_i$ имеют конечные математические ожидания и дисперсию. Следовательно, из леммы 2 и равенств (2), (4), (9), (21) нетрудно получить, что при $t\to 0$

$$\ln\tilde{\varphi}_r(t) = 1 + itm - \frac{t^2}{2}(\sigma^2+m^2) + O\left(t^3 + \frac{t}{N}\right).$$

Тогда, используя (4), можно показать, что при любых фиксированных t

$$\ln\tilde{\varphi}_r^N(t/B_N) = \frac{itm\sqrt{N}}{\sigma} - \frac{t^2}{2} + o(1),$$

откуда и следует утверждение леммы 12. □

Доказательства теорем

Докажем теорему 1. Пусть выполнены условия 1 теоремы 1. Из лемм 1, 2 и 6 следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\int_0^y \tilde{g}_1(x)dx}{\int_0^y g(x)dx}(1+o(1)), \qquad (23)$$

где плотность $\tilde{g}_1(x)$ определена в лемме 6, $g(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi(g-1)}{2}\right)\right\},$$

$$y = n((g-1)^h N/\ln^h N)^{-1/(g-1)},$$

α определена в (4). Из (23), леммы 5 и условия $n/B_N\to\infty$ следует утверждение теоремы 1 при выполнении условия 1.

Пусть выполнены условия 2 теоремы 1. Из лемм 1, 4 и 7 находим, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\int_{-\infty}^y \tilde{g}_2(x)dx}{\int_{-\infty}^y g(x)dx}(1+o(1)), \qquad (24)$$

где плотность $\tilde{g}_2(x)$ определена в лемме 7, $g(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp\left\{-d\frac{\pi}{2}|t|\left(1+i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\},$$

$$y=\frac{n-d\ln^{1-h}N(1-q_2(N))N}{N/\ln^h N}.$$

Учитывая, что в этом случае $y\to\infty$, из (24) и леммы 5 получаем утверждение теоремы 1 при условии 2.

Пусть выполнены условия 3 теоремы 1. Из лемм 1, 3 и 8 следует справедливость (24), где

$$y=\frac{n-(m+q_1(N))N}{N/\ln^h N}.$$

Учитывая, что при выполнении условия 3 теоремы 1 $y\to\infty$, из (4) и (24) следует утверждение теоремы 1 для этого случая.

Пусть выполнены условия 4 теоремы 1. Сначала рассмотрим случай, когда $2<g<3$. Тогда из лемм 1, 2 и 9 получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}$$
$$=(1-P_r)^N\frac{\int\limits_{-\infty}^{y}p(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{y}p(x)dx}(1+o(1)),\qquad(25)$$

где $p(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\alpha\frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h}\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi(g-1)}{2}\right)\right\},$$

$$y=\frac{n-mN}{((g-1)^hN/\ln^h N)^{1/(g-1)}},$$

α задана в (4). Отсюда и из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 1 при $2<g<3$. Аналогично этому нетрудно доказать утверждение теоремы 1 для случая $g=3, h\leqslant 1$, при этом вместо леммы 9 используем лемму 10 при $h<1$ и лемму 11 при $h=1$.

Остается рассмотреть последний случай, когда $g>3$ или $g=3, h>1$. Для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N\leqslant n\}$ можно использовать центральную предельную теорему. Тогда из лемм 1 и 12 следует равенство (25), где $p(x)$ – плотность стандартного нормального распределения и

$$y=(n-mN)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Отсюда и из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 1 и в этом случае. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Если выполнены условия теоремы 2, то из лемм 1, 2 и 6 следует равенство (23). Тогда из (23) находим, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}$$
$$=e^{-\gamma}\frac{\int\limits_{-\infty}^{z}e^{E(0,\gamma)}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}I_k(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{z}g(x)dx}(1+o(1))$$

$$=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\int\limits_{-\infty}^{z}I_k(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{z}g(x)dx}(1+o(1)),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.

2. *Манита А. Д.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: МГУ, 2001. 120 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных конфигурационных графах со случайными распределениями степеней вершин // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

6. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

8. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер

// Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

9. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. (В печати)

10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

11. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

12. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

13. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

14. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

15. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

16. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

17. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 19.02.2020

References

1. *Kolchin V. F.* Random Mapping. New York: Springer, 1986.

2. *Manita A. D.* Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow: MGU, 2001. 120 p.

3. *Pavlov Yu. L.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Math. Appl.* 2010. Vol. 20, iss. 5-6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

4. *Pavlov Yu. L.* Ob uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainymi raspredeleniyami stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB. MATH.* 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832

6. *Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V.* On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512

7. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with bounded number of edges. *Discrete Math. Appl.* 2019. Vol. 29, iss. 4. P. 219–232. doi: 10.1515/dma-2019-0020

9. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probability and its Appl.* (In press)

10. *Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I.* Integraly i riady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow: Nauka, 1981. 798 p.

11. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

12. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

13. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

14. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

15. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

16. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

17. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received February 19, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н., доцент
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218