Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 110–119
DOI: 10.17076/mat1171

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПОДСТАНОВОК С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

Изучается схема n-размерных подстановок с k циклами по направлениям перечислительной комбинаторики. Это перечисление исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации, нахождение их числа, установление взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, называемое задачей нумерации в прямой и обратной постановках, и моделирование исходов схемы.

Ключевые слова: подстановки; порционные добавления; циклы.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE PERMUTATIONS WITH A FIXED NUMBER OF CYCLES

The scheme of n-dimensional permutations with k cycles is studied in different areas of enumerative combinatorics. This includes direct enumeration of the outcomes of the scheme with a given discipline of their numbering, finding their numbers, establishing the one-to-one correspondence of the types of outcomes with their numbers, termed the direct and inverse numbering problem, and modelling of the outcomes of the scheme.

Keywords: the permutations; portion; the cycles.

Введение

Подстановка заданного размера задается перестановкой элементов того же размера своей нижней строки, пространство элементарных исходов для которой состоит из всех равновероятных перестановок ее элементов. Все исходы нашей (исследуемой) схемы совпадают с исходами схемы перестановок и составляют ее часть, поэтому вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов схемы подстановок определяется отношением соответствующих численностей их исходов. Пространство элементарных исходов нашей схемы составляют совокупности составов ее непустых циклов в заданном числе. Вероятностное распределение ее исходов будем определять.

Число подстановок размера n с k циклами известно, например, из [2] и выражается через числа Стирлинга 1-го рода $S(n,k)$ как $|S(n,k)|$. Здесь рассматриваются вопросы прямого перечисления подстановок заданного размера с фиксированным числом циклов, определение их числа, перечисление размеров циклов в них, нахождение вероятностного распределения исходов схемы и чисел циклов в случайных подстановках размера n, моделирование возможных исходов схемы с фиксированным числом циклов.

Определения и обозначения в схеме подстановок

Подстановка размера n задает последовательность взаимно-однозначных отображений всех n элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя и записывается в виде двустрочного соответствия элементов отображения $(1\ 2\ \ldots\ n)$ и $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$ в матричной форме.

Здесь в верхней строке элементы упорядочены от 1 до n, а нижняя строка задает последовательные отображения элементов верхней строки в элементы, стоящие под ними в нижней строке, т. е. отображения: 1 в i_1 $(1 \to i_1)$, 2 в i_2 и т. д., где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$. Таким образом, подстановки можно задавать перестановками элементов ее нижней строки.

Цикл подстановки образует группа элементов, возвращающихся при данном отображении к исходному элементу.

Число участвующих в цикле элементов называется его размером, принимающим значения от 1 до n. (Сумма размеров всех циклов подстановки равна ее размеру n.)

Если размер цикла n, т. е. он единственный, то подстановку называют одноцикловой.

Цикловая структура подстановки задается вектором $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_i – число циклов размера i, $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$ – число циклов подстановки, а $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$.

Цикловой группой будем называть номера элементов одного цикла в порядке их отображений, начиная с наименьшего номера элемента в цикле. Иногда бывает удобно представлять подстановку не в традиционной двустрочной форме, а в виде перечисления ее цикловых групп в порядке роста минимальных номеров в них и их размеров, а каждую — в порядке отображений элементов в ней. Например, при $n = 4$, $k = 2$ такая запись подстановки (1,3),(2,4) будет соответствовать перестановке ее нижней строки (3,4,1,2).

В [5] были решены задачи нахождения численностей подстановок по их заданной цикловой структуре, явного перечисления таких подстановок и моделирования их возможных значений.

Этапы перечисления подстановок фиксированного размера с заданным числом циклов

Отображение элементов подстановки задается перестановкой ее нижней строки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ по ПРАВИЛУ: *каждый элемент* i_1 *перестановки в подстановке отображается в свой элемент перестановки с номером* i_1. Отсюда получаем АЛГОРИТМ** вычисления числа циклов подстановки по ее нижней строке-перестановке:

по перестановке выписываем ее элементы начиная с 1 и первого элемента перестановки (слева направо) и далее в порядке отображений до повтора 1 без ее включения – получаем первый цикл, далее начинаем второй цикл с минимального элемента, не вошедшего в первый цикл (слева направо), и далее в порядке отображений до его повтора без включения – получаем второй цикл, и т. д. до последнего оставшегося элемента, а для подсчета числа циклов при каждом повторе элемента в цикле добавляем в счетчик единицу.

Приведем поясняющий пример. Пусть $n = 8$ и перестановка нижней строки есть последовательность: (6,7,5,1,2,8,3,4). Тогда по АЛГОРИТМУ** и по ПРАВИЛУ из нее получаем подстановку с двумя циклами (1,6,8,4)(2,7,3,5).

Комбинаторный анализ схемы построим на процедуре явного перечисления подстановок размера n с фиксированным числом циклов k, представленных своими цикловыми группами, соответствующее перечисление которых и будем здесь производить. Эта процедура будет состоять из двух этапов: деления всех элементов перестановки всеми способами на k непустых частей (циклов) без учета их порядка и перечисления для каждого результата такого деления всех допустимых исходов перестановок элементов внутри каждой части деления, приводящих к одноцикловой подстановке из элементов этой части.

Имея в виду математическую эквивалентность нашего деления совокупности элементов на части с размещением n различимых частиц по k неразличимым ячейкам без пустых ячеек, при рассмотрении решения задачи первого этапа будем ссылаться на соответствующие результаты в терминах размещения частиц по ячейкам. Поэтому решение задачи первого этапа может использовать результаты [3], описывающие перечисление всех исходов схемы (без ограничения на отсутствие пустых ячеек), с отбраковкой исходов, не отвечающих данному ограничению. Это привело бы к анализу большого числа лишних исходов и к сложности дальнейших исследований схемы. В связи с этим предлагается провести прямое перечисление исходов с данным ограничением.

В [8] приведена процедура перечисления всех исходов схемы перестановок в определенном порядке с решением задачи нумерации для них, и известно утверждение, что число одноцикловых подстановок размера L, а значит, и представляющих их перестановок нижних строк, равно $(L-1)!$.

Поэтому для решения задачи второго этапа кроме отбраковки исходов перестановок элементов каждой части деления, приводящих к > 1 циклу в них, с использованием утверждения о числе одноцикловых подстановок фиксированного размера можно предложить прямое перечисление требуемых перестановок ее элементов по [3], начинающихся с минимального.

В завершение с каждым результатом первого этапа по конкретной цикловой структуре соответствующей подстановки, определяемой делением ее элементов на части (цикловые группы), нужно сопоставить все исходы второго этапа в виде требуемых перестановок элементов по каждой части деления, проводимого по результатам [4] и [6].

Построение процедуры перечисления первого этапа требует отдельного рассмотрения.

Определения, обозначения и связи основной и вспомогательных схем

Для краткости под различимыми элементами или частицами будем понимать их номера.

Схема A — основная схема подстановок размера n с ровно k циклами; вспомогательные схемы: схема D — схема деления n различимых элементов на k непустых частей без учета порядка этих частей; схема D_j — схема D с j-й фиксацией k минимальных элементов в частях деления, где в качестве этих минимальных элементов варьируются все их наборы по схеме сочетаний; схема P — схема всех разных допустимых перестановок элементов в частях деления по схеме D, записывающих одноцикловые подстановки из них; схема C — схема сочетаний.

Схемы D и P являются вспомогательными для схемы A, схемы $\{D_j\}$ — для схемы D, а схема C — для схем $\{D_j\}$.

Схема P является схемой одновременных действий схем перестановок и подробно исследована в [6] и [8], а схема C — в [7]. Для анализа схемы A остается изучить схемы D и D_j.

Анализ схем будем производить на основе прямого перечисления ее исходов в терминах указанных выше размещений частиц по ячейкам. Для перечисления всех исходов схемы D будем объединять все исходы всех схем D_j, т. е. переборов всех размещений частиц с изученной в схеме сочетаний [7] с фиксацией их минимальных номеров в ячейках с последующим размещением остальных частиц при каждой такой фиксации. Начнем с рассмотрения вспомогательной схемы D_j.

1. Комбинаторный анализ схемы D_j

1.1. Перечисление и число исходов схемы

Для выполнения условия отсутствия пустых ячеек случайным образом по схеме C сочетаний с C_{n-1}^{k-1} исходами возьмем j-й исход выбора нумерованных частиц ($j = 2, 3, \ldots, C_{n-1}^{k-1}$), добавляя к нему частицу с номером 1, и принудительно разложим по всем k ячейкам по одной частице, считая их номера минимальными при размещении по ячейкам остальных частиц и расположив ячейки в порядке роста минимальных номеров выбранных частиц. Для таких выборов по схеме сочетаний в [4] решены задачи построения процедуры перечисления исходов и задача их нумерации. Далее размещаем по ячейкам всеми способами остальные $(n-k)$ частиц таким образом, чтобы не изменить выбранные минимальные номера частиц в ячейках. Состав каждой ячейки будем заключать в круглые скобки и перечислять номера входящих в них элементов в возрастающем порядке (а весь исход схемы будем заключать в фигурные скобки).

Пусть $T^{(j)} = (n_1, \ldots, n_k)$ – возрастающая последовательность минимальных номеров частиц в k ячейках при их j-й фиксации, где всегда $n_1 = 1$. Это соответствует несущественности порядка частей (циклов) деления элементов подстановки. Будем размещать остальные $(n-k)$ частиц по k ячейкам так, чтобы выбранные минимальные в них не изменились. Для этого будем добавлять частицы порционно по одной в последовательно поединично растущие группы первых ячеек равновероятно по схеме размещения с повторением для каждой частицы по этим ячейкам. Тогда сначала в первую ячейку должны быть добавлены все частицы с номерами $< n_2$ в количестве $w_1^{(j)} = n_2 - n_1 - 1 = n_2 - 2$; потом в первые две ячейки – все частицы из остальных с номерами $< n_3$ в количестве $w_2^{(j)} = n_3 - n_2 - 1$; потом в первые три ячейки – все частицы из остальных с номерами $< n_4$ в количестве $w_3^{(j)} = n_4 - n_3 - 1$ и т. д., потом в первые $(k-1)$ ячейки – все частицы из остальных с номерами $< n_k$ в количестве $w_{k-1}^{(j)} = n_k - n_{k-1} - 1$; тогда, наконец, во все ячейки – все остальные частицы с номерами до n в количестве $w_k^{(j)} = n - n_k$.

Таким образом, т. к. k частиц было размещено предварительно, будем порционно в указанных выше количествах размещать суммарное число $(n-k)$ частиц соответственно по одной, двум и т. д. k ячейкам. Проверяем, что сумма порционных добавлений частиц совпадает с $(n-k)$:

$$n_2 - 1 - 1 + n_3 - n_2 - 1 + n_4 - n_3 - 1 + \ldots + n_k - n_{k-1} - 1 + n - n_k = n - k.$$

Будем представлять все порционные добавления в виде k-компонентных векторов соответствующих добавлений частиц в k ячеек, а итоговые векторы $\bar{w}^{(j)}$ добавлений во все ячейки при j-й фиксации частиц с минимальными номерами в них получаются покомпонентным сложением векторов порционных добавлений в ячейки (циклы).

Теорема 1. *Число N_{D_j} исходов схемы D_j вычисляется по формуле*

$$N_{D_j} = \prod_{i=1}^{k} i^{w_i^{(j)}}. \tag{1}$$

Доказательство формулы (1) следует из принципа умножения для общего числа исходов в k схемах размещения частиц (по поединично растущим от начальной ячейки группам ячеек) в количествах найденных выше размеров, заданных вектором $\bar{w}^{(j)}$, последовательных порционных добавлений в них по схеме размещений с повторением, так что в 1-ю ячейку добавляется $w_1^{(j)}$ частиц числом способов $1^{w_1^{(j)}}$; в первые две – $w_2^{(j)}$ частиц числом способов $2^{w_2^{(j)}}$ и т. д.; во все ячейки – $w_k^{(j)}$ частиц числом способов $k^{w_k^{(j)}}$, откуда и следует формула (1).

Определим вид исхода схемы D_j при фиксированном наборе $T^{(j)}$ минимальных номеров частиц в ячейках как перечень наборов возрастающих номеров частиц в ячейках, перечисленных в порядке роста минимальных номеров в них; составы ячеек будем заключать в круглые скобки, а весь исход — в фигурные скобки.

Для перечисления всех исходов схемы методом графов будем строить процесс последовательного поединичного равновероятного добавления частиц с растущими номерами в ячейки с начальным заполнением по одной частице с минимальными выбранными номерами в них. Исходы заполнения ячеек на каждом шаге будем нумеровать в порядке добавления частицы в ячейки с растущими минимальными номерами.

Поясним процесс перечисления исходов схемы D_j на примере (рис. 1).

Пример 1. Пусть $n = 7,\ k = 3,\ T^{(j)} = (1, 3, 5)$.

Визуально имеем $N_{D_j} = 18$ исходов, что совпадает с результатом по (1): $N_{D_j} = 1 \cdot 2^1 \cdot 3^2 = 18$.

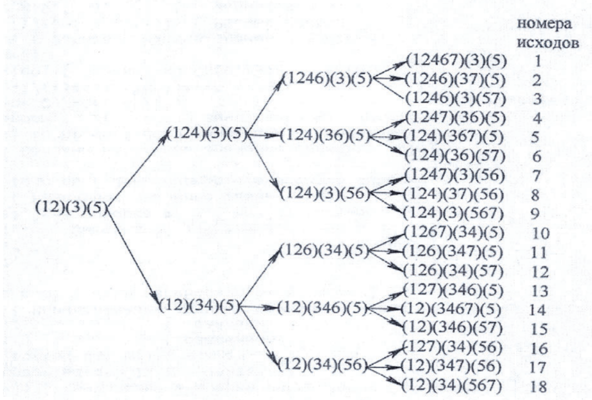

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы D_j примера 1
Fig. 1. The enumeration graph of outcomes of scheme D_j of example 1

1.2. Задача нумерации (ЗН) в схеме D_j

Пространство элементарных исходов схемы D_j состоит из всех k наборов составов из n различимых элементов с заданной j-й фиксацией минимальных элементов этих составов.

Схема D_j представляет собой схему $(n - k)$ последовательных действий, изученную в [6] (с решенной задачей нумерации при известных числах их исходов), состоящих в порционном размещении по одной $(n - k)$ частиц (элементов) с размерами порций $w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \ldots, w_k^{(j)}$, определенными в п. 1.1, по поединично растущим группам первых ячеек, расположенных по возрастанию минимальных номеров частиц в них так, что каждая частица размещается по ячейкам своей группы равновероятно по схеме размещений с повторением. Тогда число способов совершения этих действий есть $1^{w_1^{(j)}} 2^{w_2^{(j)}} \cdots k^{w_k^{(j)}}$, где числа исходов этих действий $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-k})$ есть $(1, 2, \ldots, k)$, повторенные соответственно $1^{w_1^{(j)}}, 2^{w_2^{(j)}}, \ldots, k^{w_k^{(j)}}$ раз, а итоговым исходом схемы D_j является объединение исходов действий, т. е. суммарных порционных составов номеров добавленных в ячейки частиц, и j-х фиксированных минимальных номеров частиц в k ячейках.

Для иллюстрации приведем числовой пример.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 для схемы D_j решается ЗН, т. е. пусть $n = 7,\ k = 3,\ T^{(j)} = (1, 3, 5)$. Тогда $w_1^{(j)} = 1, w_2^{(j)} = 1, w_3^{(j)} = 2$, откуда следует, что при числе действий $(n - k) = 4 \quad V = (1, 2, 3, 3)$. Введем обозначения: N_*, R_* – соответствующие номер и вид итогового исхода схемы D_j; $N^{(i)}, R^{(i)}$ –

соответствующие номер и вид исхода схемы D_j на i-й итерации – добавления i-й частицы $(i = \overline{1, n-k})$.

Прямая ЗН. Пусть дан $N_* = 5$. Требуется найти R_*.

Шаги решения по формулам (2) и (3) из [6] в обозначениях нашей схемы:

1) $N_* = N^{(4)} = 5$; $N^{(3)} = [(5+3-1)/3] = 2$; $N^{(2)} = [(2+3-1)/3] = 1$; $N^{(1)} = [(2+2-1)/2] = 1$ – номера исходов схемы по действиям;

2) $j_4 = N^{(4)}\ mod\ v_4 + 0 \cdot v_4 = 5\ mod\ 3 + 0 \cdot 3 = 2$; аналогично $j_3 = 2\ mod\ 3 + 0 \cdot 3 = 2$; $j_2 = 2\ mod\ 2 + 1 \cdot 2 = 2$; $j_1 = 1\ mod\ 1 + 1 \cdot 1 = 1$ – номера предшествующих исходов в пучках предыдущих итераций, т. е. полученный набор значений $\{j^{(i)}\} = (1,1,2,2)$ задает номера частей деления (циклов) добавления растущих остальных $(n-k) = 4$ элементов, откуда получаем искомый вид исхода $R_* = (124),(367)(5)$, совпадающий с результатом по графу на рис. 1.

Обратная ЗН. Пусть дан $R_* = (124)(367)(5)$. Требуется найти N_*.

Шаги решения по формуле (4) из [8] в обозначениях нашей схемы:

1) по $R_* = R^{(4)} = (124)(367)(5)$ и $T^{(j)} = (1,3,5)$ с учетом добавления остальных элементов в порядке роста имеем $R^{(1)} = (12),(3)(5)$, $R^{(2)} = (124)(3)(5)$, $R^{(3)} = (124)(36)(5)$, $R^{(4)} = (124)(367)(5)$, откуда соответственно получаем номера частей (циклов) добавления элементов в порядке их роста $j_1 = 1$, $j_2 = 1$, $j_3 = 2$, $j_4 = 2$, которые являются номерами предшествующих искомому исходов итераций в пучках графа перечисления исходов схемы;

2) по (4) из [8] $N_* = N^{(4)} = (1-1)1 + (1-1)2 + (2-1)3 + 2 = 5$, что совпадает с результатом по графу на рис. 1.

2. Комбинаторный анализ схемы D

2.1. Перечисление и число исходов схемы

Теорема 2. *Число N_D исходов схемы D есть*

$$N_D = \sum_{\{(C)\}} N_{D_j}, \qquad (2)$$

где сумма берется по перечислению исходов схемы C, т. е. по всем C_{n-1}^{k-1} наборам $T^{(j)} = (1, n_2, \ldots, n_k) \in (1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Схема D — это схема независимых ОД (см. [6]) схем $\{D_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, C_n^k$, а ее исходы — объединение исходов всех схем D_j в порядке роста j, т. е. перечисление всех возможных составов k циклов исходной схемы A, откуда и следует (2).

2.2. Задача нумерации в схеме D

Схема D — это схема C_{n-1}^{k-1} независимых одновременных действий (см. [6]) итоговых порционных добавлений частиц в ячейки по схемам D_j, для которых в [6] задача нумерации решена при числах способов совершения этих действий, равных $\{N_{D_j}\}$, где $j = \overline{1, C_{n-1}^{k-1}}$.

3. Комбинаторный анализ схемы A

Исходы схемы A (в фигурных скобках) представляют все возможные наборы (в круглых скобках) k цикловых групп подстановки размера n, где порядок номеров в них имеет значение. Они отличаются (в терминологии подстановок) от исходов схемы D, где номера элементов цикловых групп (частиц в ячейках) перечислялись только в возрастающем порядке, всеми порядками их номеров, задающими возможные последовательные отображения внутри цикловых групп.

3.1. Перечисление и число исходов схемы

Для перечисления исходов схемы A по утверждению из введения нужно в перечислении исходов схемы D по схеме одновременных действий (см. [6]) произвести в каждой круглой скобке, описывающей состав цикловой группы, все перестановки последовательных отображений, начинающиеся с минимального номера.

Число N_A подстановок размера n с k циклами известно, и есть $N_A = |S(n,k)|$, где $S(n,k)$ — числа Стирлинга 1-го рода. Покажем, как число N_A можно вычислять по перечислению исходов схемы A; предложим для этого два способа.

Первый способ (по прямому перечислению исходов схемы D)

Теорема 3. *Число N_A исходов схемы A вычисляется по формуле*

$$N_A = \sum_{\{(D)\}} \prod_{m=1}^{k} d_m!, \qquad (3)$$

где суммирование проводится по перечислению исходов схемы D по размерам суммарных порционных добавлений элементов $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_k)$ в цикловые группы, где $(\sum_{m=1}^{k} d_m = n-k)$.

Доказательство. Все исходы схемы A делятся на N_D групп одинаковых составов элементов в k ненулевых частях (циклах), каждая из которых представляет собой одноцикловые подстановки из элементов своего состава в известном количестве факториала суммарного размера своего порционного добавления. Таким образом, число N_A вычисляется как сумма N_D слагаемых (по перечислению разных по составу делений совокупности n различимых элементов на k ненулевых частей) произведений вариантов перестановок элементов каждой части этого деления, приводящих к одноцикловым подстановкам, т. е. произведений факториалов размеров суммарных порционных добавлений в них, что и доказывает формулу (3) с введением обозначений $\bar{d} = d_1, \ldots, d_k, \quad (\sum_{m=1}^{k} d_m = n - k)$ для этих размеров. (Они непосредственно вычисляются из видов исходов схемы N_D при их перечислении.)

Второй способ (по перечислению исходов схемы C) алгебраическим методом

Пусть по перечислению исходов схемы C (см. [7]) задан j-й набор $T^{(j)}$. Тогда при этой j-й фиксации на i-м шаге перечисления исходов схемы D_j (при размещении частиц по i ячейкам) перечисляющей производящей функцией всех размеров порционных добавлений $d_1, \ldots, d_i$ в ячейки-части $1, 2, \ldots, i$ есть полином

$$P_{ij} = (a_1 + a_2 + \cdot + a_i)^{r_i}$$

$$= \sum_{d_1+\cdots+d_i=r_i} \frac{r_i!}{d_1! \cdots d_i!} a_1^{d_1} \cdots a_i^{d_i}, \qquad (4)$$

в разложении по степеням переменных $a_1, \ldots, a_i, \ i = 1, 2, \ldots, k$ которого все наборы показателей их степеней соответственно совпадают с векторами размеров порционных добавлений в первые i циклов общего суммарного размера добавлений $r_i = n_{i+1} - n_i - 1, \ i = 1, 2, \ldots, k-1, \ r_k = n - n_k$ номеров элементов, а коэффициенты при $a_1^{d_1} \ldots a_i^{d_i}$ дают кратность получения векторов размеров порционных добавлений. Для получения при данном j всех итоговых векторов из $\bar{d}$ нужно по всем $i = 1, 2, \ldots, k$ покомпонентно сложить все векторы размеров порционных добавлений во все циклы, перебирая их по схеме последовательных действий (см. [6]). Далее по всей совокупности этих итоговых векторов при всех $j = 1, 2, \ldots, C_n^k$ определяется число N_A по формуле (3).

Перечислим порядок действий при вычислении числа N_A.

Первый способ

1. Фиксируем минимальные номера элементов подстановки из n номеров в k циклах T по схеме сочетаний C числом способов C_{n-1}^{k-1}, т. к. всегда $n_1 = 1$, и перечисляем все исходы этих фиксаций по [4].
2. Для каждой j-й фиксации ($j = 1, 2, \ldots, C_{n-1}^{k-1}$) исхода схемы C перечисляем все исходы схемы D_j методом графов (см. рис. 1 для примера 1).
3. Объединяя результаты п. 2, получаем все исходы схемы D, вычисляем $\{N_{D_j}\}$.
4. Для всех исходов п. 3 непосредственно по перечислению вычисляем все итоговые векторы размеров порционных добавлений в k циклах — получаем все $\{\bar{d}\}$ по исходам схемы D.
5. По (3) вычисляем значение N_A.

Второй способ

1. Фиксируем минимальные номера элементов подстановки из n номеров в k циклах T по схеме сочетаний C числом способов C_{n-1}^{k-1}, т. к. всегда $n_1 = 1$, и перечисляем все исходы этих фиксаций по [7].
2. Для каждой j-й фиксации ($j = 1, 2, \ldots, C_{n-1}^{k-1}$) исхода схемы C и всех $i = 1, 2, \ldots, k$ рассматриваемых первых циклов вычисляем значения r_i и выписываем вид (4) для P_{ij}.
3. Из вида P_{ij} находим все векторы размеров порционных добавлений в первые i циклов.
4. Для получения всех итоговых векторов $\bar{d}$ при каждом j складываем покомпонентно (компоненты соответствуют номерам переменных в полиноме P_{ij}) все со всеми при разных i, полученных в п. 3).
5. $\bar{d}$ в схеме D получаем объединением результатов п. 4) по всем j.
6. По $\bar{d}$ из п. 5) по (3) вычисляем N_A.

Приведем числовой пример и будем проводить расчеты по приведенному порядку действий **двух способов**.

Пример 3. Пусть $n = 4, \ k = 2$. Требуется найти число подстановок длины n с ровно k циклами, т. е. N_A.

1. $C_{n-1}^{k-1} = C_3^1 = 3$ — число вариантов фиксаций минимальных номеров в двух циклах: $n_1 = 1, n_2 = 2$ при $j = 1$; $n_1 = 1, n_2 = 3$ при $j = 2$ и $n_1 = 1, n_2 = 4$ при $j = 3$.

Решаем **первым способом**.

2. По (1) $N_{D_1} = 1^{2-1-1}2^{4-2} = 4$; $N_{D_2} = 1^{3-1-1}2^{4-3} = 2$; $N_{D_3} = 1^{4-1-1}2^{4-4} = 1$. Приведем графы перечисления исходов схем $\{D_j\}$ (рис. 2).

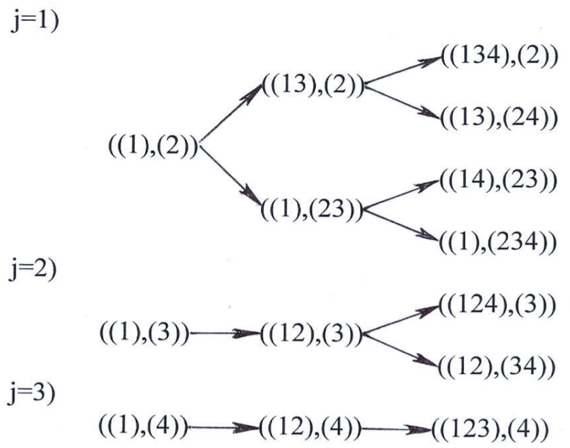

Рис. 2. Граф перечисления исходов схем D_j примера 3

Fig. 2. The enumeration graph of outcomes of schemes D_j of example 3

3. По рис. 2 (по процедуре порционного добавления частиц в ячейки из п. 1.1) имеем итоговые векторы размеров добавления при $j = 1$ — (2,0), (1,1),(1,1),(0,2); при $j = 2$ — (2,0),(1,1); при $j = 3$ — (2,0).

4. По (3) $N_A = 2!0! + 1!1! + 1!1! + 0!2! + 2!0! + 1!1! + 2!0! = 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 11$.

Решаем **вторым способом**.

2 – 3. При $j = 1$ $T^{(1)} = (1, 2)$, $P_{11} = a_1^{r_1} = a^0$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (0);

$P_{12} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^2 = a_1^1 + 2a_1a_2 + a_2^2$, откуда имеем 4 вектора размеров порционного добавления (2;0),(1;1),(1;1),(0;2).

При $j = 2$ $T^{(2)} = (1, 3)$, $P_{21} = a_1^{r_1} = a^1$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (1);

$P_{22} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^1 = a_1 + a_2$, откуда имеем 2 вектора размеров порционного добавления (1;0),(0;1).

При $j = 3$ $T = (1, 4)$, $P_{31} = a_1^{r_1} = a_1^2$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (2);

$P_{32} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^0 = 1$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (0;0).

4. Вычисляем итоговые векторы размеров порционных добавлений:

при $j = 1$ это векторы (2;0),(1;1),(1;1),(0;2);

при $j = 2$ это векторы (2;0),(1;1);

при $j = 3$ это вектор (2;0).

5. По (3) $N_A = 2!0! + 1!1! + 1!1! + 0!2! + 2!0! + 1!1! + 2!0! = 11$.

Проверим результат непосредственным подсчетом чисел циклов в подстановках размера 4 по их явному перечислению по п. 1.1.

Представим полный перечень исходов схемы перестановок размера $n = 4$: (4321), (3421),(3241),(3214),(4231),(2431),(2341),(2314), (4213),(2413),(2143),(2134),(4312),(3412),(3142), (3124),(4132),(1432),(1342),(1324),(4123),(1423), (1243),(1234). Считая их нижними строками подстановок, перечислим соответствующие им непосредственно вычисленные числа циклов: 2,1,2,3,3,2,1,2,2,1,2,3,1,2,1,2,2,3,2,3,1,2,3,4. Отсюда видим, что число подстановок размера 4 с двумя циклами равно 11, что совпадает с результатом теоретического расчета.

Замечание 1. Вероятностное распределение числа Z циклов в подстановке размера n определяется по формуле $P(Z = k) = |S(n, k)|/n!$, где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Выпишем по примеру 2 для $n = 4$ вероятностное распределение числа Z циклов, определяя вероятности каждого возможного размера циклов (от 1 до 4) делением их числа на $4! = 24$. $P(Z = 1) = 6/24$, $P(Z = 2) = 11/24$, $P(Z = 3) = 6/24$, $P(Z = 1) = 1/24$.

3.2. Задача нумерации в схеме A

Схема A — это обобщенная схема двух последовательных действий (см. [6]) с числом исходов первого действия, равным N_D, и числами исходов второго действия, равными числу всех перестановок во всех цикловых группах с первыми местами элементов с минимальными номерами, т. е. $\prod_{m=1}^{k} d_m!$ по каждому исходу схемы D. Таким образом, задача нумерации в схеме A теоретически принципиально решена на основании ее результатов для всех используемых здесь вспомогательных схем, исследованных в [4] и [6], и указанных связей этих схем со схемой A.

Для пояснения порядка действий при решении задачи нумерации в схеме A введем обозначения: $N^{(U)}$ и $R^{(U)}$ — соответственно номер и вид исхода с этим номером в схеме U (под U понимается любая из используемых здесь схем), $\Rightarrow$ — знак следования. Тогда в этих обозначениях приведем решения прямой и обратной задач нумерации через известные аналогичные результаты задач нумерации всех используемых схем при заранее найденных размерах пучков графа перечисления исходов схемы A.

Прямая задача: по $N^{(A)}$ найти $R^{(A)}$.

Решение: по [4] и [6] $N^{(A)} \Rightarrow N^{(D)} \Rightarrow R^{(D)}$; $N^{(A)} \Rightarrow N^{(P)} \Rightarrow R^{(P)}$; заменяя порядки номеров в цикловых группах в $R^{(D)}$ на полученные в $R^{(P)}$, находим R_A.

Обратная задача: по $R^{(A)}$ найти $N^{(A)}$.

Решение: упорядочиванием по возрастанию номеров каждой цикловой группы в $R^{(A)}$ получаем $R^{(A)} \Rightarrow R^{(D)} \Rightarrow N^{(D)}$; из $R^{(A)} \Rightarrow N^(P)$. Теперь по [4] из $N^{(D)}$ и $N^{(P)} \Rightarrow N^{(A)}$. Однако в связи с двухэтапностью и с многодейственностью процедуры прямого перечисления перестановок заданного размера с заданным числом циклов явный результат задачи нумерации, следующей из этого перечисления, становится достаточно громоздким даже с учетом полученных ранее результатов решения для всех ее этапов. Поэтому здесь еще предлагается решать задачу нумерации численно, табличным путем, т. е. путем явного перечисления ее исходов с их табличной нумерацией всех исходов в порядке их получения при перечислении для заданных параметров схемы (размере подстановки и числе ее циклов) и хранить в памяти эту таблицу для дальнейших исследований.

3.3. Вероятностные распределения исходов схемы и числа исходов с k циклами в подстановке степени n

Все исходы схемы A представляют собой часть $n!$ равновероятных исходов всех n-мерных подстановок, поэтому вероятность исходов схемы A среди всех исходов подстановки равна $N_A/n!$.

С использованием числа $N_A = |S(n,k)|$ или формулы (3) получаем вероятностное распределение числа Z циклов в n-размерной подстановке $W = P(Z=k) = N_A/n!,\ k=\overline{1,n}$.

Вместо исходов схемы n-мерных подстановок будем рассматривать задающую ее схему перестановок ее нижней строки, изученную в [8]. Будем удалять недопустимые состояния полного графа перечисления исходов этой схемы перестановок в нашей схеме – схеме A, которыми будем считать состояния всех траекторий, приводящих к подстановке с отличными от заданного числа k циклами. Вероятностное распределение исходов схемы A будем находить пропорциональным пересчетом вероятностей переходов по итерациям в каждом пучке среди оставшихся после описанного удаления траекторий, т. е. урезания недопустимых состояний, что означает пропорциональное перераспределение вероятностей итерационных переходов среди всех остальных состояний в пучке, содержащем это состояние.

Распределение вероятностей исходов схемы A может быть получено алгоритмически в виде групп равновероятных исходов по каждой траектории одинаковых наборов вероятностей переходов по итерациям следующими шагами:

1) по методу графов (см. [9]) перечисляем все перестановки нижних строк подстановок;

2) для всех результатов п. 1) по АЛГОРИТМУ** (см. Введение) вычисляем числа циклов в соответствующих подстановках;

3) по результату п. 2) в графе п. 1) убираем все лишние траектории, ведущие к перестановкам, порождающим подстановки с числами циклов $\neq k$ с пересчетом по итерациям равных вероятностей переходов в каждом оставшемся пучке среди оставшихся состояний;

4) вычисляем вероятности всех итоговых исходов с k циклами по графу п. 3) перемножением вероятностей переходов в них по итерациям, т. е. по их траекториям.

Теперь приведем пояснительный пример вычисления вероятностного распределения исходов схемы.

Пример 4. Пусть $n = 4,\ k = 2$.

1) Запишем все исходы схемы перестановок в порядке их получения по МГ по итерациям через стрелочку, начиная с $i = 1$:
$(1) \to (2,1),(1,2) \to (3,2,1)),(2,3,1),(2,1,3),$
$(3,1,2),(1,3,2),(1,2,3) \to (4,3,2,1),(3,4,2,1),$
$(3,2,4,1),(3,2,1,4),(4,2,3,1),(2,4,3,1),$
$(2,3,4,1),(2,3,1,4),(4,2,1,3),(2,4,1,3),$
$(2,1,4,3),(2,1,3,4),(4,3,1,2),(3,4,1,2),$
$(3,1,4,2),(3,1,2,4),(4,1,3,2),(1,4,3,2),$
$(1,3,4,2),(1,3,2,4),(4,1,2,3),(1,4,2,3),$
$(1,2,4,3),(1,2,3,4)$;

2) числа циклов в подстановках с нижними строками результатов п.1) соответственно: 2,1,2,2,3,2,1,2,2,1,2,3,1,2,1,2,2,3,2,3,1,2,3,4, из них 12 исходов с $k = 2$;

3) убираем все лишние траектории в графе п.1), получаем граф:
$(1) \to (2,1),(1,2) \to (3,2,1)),(2,3,1),(2,1,3),$
$(3,1,2),(1,3,2),(1,2,3) \to (4,3,2,1),(3,2,4,1),$
$(3,2,1,4),(2,4,3,1),(2,3,1,4),(4,2,1,3),$
$(2,1,4,3),(3,4,1,2),(3,1,2,4),(4,1,3,2),$
$(1,3,4,2),(1,4,2,3)$. Здесь все исходы 3-й итерации, кроме первого (3,2,1) и последнего (1,2,3), порождают по 2 итоговых исхода нашей схемы с вероятностями переходов в них по 1/2, первый исход – 3 с вероятностью 1/3, а последний – 1 с вероятностью перехода, равной 1.

Отсюда из того, что вероятности переходов до 3-й итерации (включительно) не изменились и равны по итерациям, начиная с первой

1: $(1/2), (1/3)$, находим вероятности всех 12 исходов:
$P(4,3,2,1) = P(3,2,4,1) = P(3,2,1,4) = (1/2)(1/3)(1/3) = 1/18$; $P(2,4,3,1) = P(2,3,1,4) = P(4,2,1,3) = P(2,1,4,3) = P(3,4,1,2) = P(3,1,2,4) = P(4,1,3,2) = P(1,3,4,2) = (1/2)(1/3)(1/2) = 1/12$; $P(1,4,2,3) = (1/2)(1/3) = 1/6$.

Проверка на распределение: $3/18 + 8/12 + 1/6 = 1$.

3.4. Моделирование подстановок размера n с ровно k циклами

Рассмотрим АЛГОРИТМ моделирования исходов нашей схемы через исходы общей схемы перестановки по следующим шагам:

1) перечисляем с нумерацией все $n!$ равновероятных исходов схемы перестановок размера по алгоритму n, совпадающему с алгоритмом Кнута, приведенным, например, в [1] с доказанной там сложностью $O(n!)$;

2) вычисляем числа циклов подстановок, заданных всеми перестановками своих нижних строк, и фиксируем среди них номера исходов нашей схемы (с заданным числом циклов) и их общее число L и находим $p = L/n!$ (АЛГОРИТМ** вычисления числа циклов в подстановке, приведенный во Введении, имеет сложность $O(n)$) – получаем вектор $\bar{C}_k$ номеров исходов перечисленных нижних строк подстановок с числом циклов k;

3) разыгрываем номер исхода схемы п. 1);

4) проверяем его совпадение с номерами $\bar{C}_k$ исходов нашей схемы (п. 2)) на «ДА» и «НЕТ» с вероятностями соответственно W и $(1 - W)$;

5) при «НЕТ» переходим к п. 3);

6) при «ДА» с вероятностью W по результату прямой ЗН для нашей схемы получаем смоделированный исход схемы.

Реализация последовательных действий 1-го и 2-го шагов составляет сложность $O(n\ n!)$; реализация последовательных действий 3-го и 4-го шагов составляет сложность $O(n!)$; число моделирований исходов схемы подстановок до получения M исходов нашей схемы имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами W, M как числа Z испытаний Бернулли до M-го успеха включительно (успех – получение исхода нашей схемы среди всех исходов схемы подстановок) с вероятностью каждого успеха W; $P(Z = t) = C_{t-1}^{M-1} W^t (1-W)^{t-M}$ и средним, равным M/W. Поэтому оценка сложности в среднем для моделирования M исходов нашей схемы получается порядка $O(n\ n!M/W)$, откуда для моделирования одного исхода она имеет порядок $O(n\ n!/W)$.

3.5. Приближенное оценивание числа исходов схемы

Моделируем по 1.2.3 или [3] N_A исходов схемы перестановок размера n с $n!$ равновероятными исходами. Считая каждую смоделированную перестановку нижней строкой подстановки того же размера, а исходом моделирования – такое получение подстановки, для каждого исхода вычисляем число циклов и определяем среди смоделированных количество M исходов с k циклами. Тогда искомое число исходов нашей схемы подстановок с k циклами приближенно определяется методом пропорций по формуле

$$N \approx \frac{Mn!}{N_A} = \tilde{N}.$$

Исследуем качество полученной оценки $\tilde{N}$ для N исходов нашей схемы, где M/N_A – наблюденная частота успеха опыта – появления ее исхода среди N_A исходов схемы перестановок. Число M можно представить в виде $M = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_A}$, где при $i = \overline{1, N_A}$ $\{X_i\}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с вероятностью успеха $p = N/n!$. Тогда по уточненной по неравенству Чебышева теореме Бернулли выполняются соотношения

$$\gamma = P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{n!}\right| < \varepsilon^*\right)$$
$$= P\left(\left|\frac{Mn!}{N_A} - N\right| < \varepsilon^* n! \varepsilon\right)$$
$$= P(|\tilde{N} - N| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{N_A(\varepsilon^*)^2} \geqslant 1 - \frac{(n!)^2}{4N_A\varepsilon^2},$$

где для оценки $\tilde{N}$ числа N исходов нашей схемы ε – ее точность, а $\gamma \geqslant 1 - \frac{(n!)^2}{4N_A\varepsilon^2}$ – оценка ее надежности γ с этой точностью. Для получения нетривиальной оценки для γ потребуем, чтобы $N_A > (n!)^2/4\varepsilon^2$.

Более точную оценку надежности γ с заданной точностью ε оценки $\tilde{N}$ числа N исходов нашей схемы можно получить по следствию из теоремы Муавра – Лапласа из соотношений

$$\gamma = P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{n!}\right| \leqslant \varepsilon^*\right)$$
$$= P\left(\left|\frac{Mn!}{N_A} - N\right| \leqslant \varepsilon^* n! \varepsilon\right)$$
$$= P(|\tilde{N} - N| \leqslant \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon^* \sqrt{N_A/p(1-p)}\right)$$
$$\geqslant 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{N_A}/n!),$$

где $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

Литература

1. *Кнут Д.* Искусство программирования на ЭВМ. Т. 1. М.: Мир, 1976. 736 с.

2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 287 с.

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторное представление схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410

4. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

5. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых структур // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 11. С. 29–34.

6. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

7. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

8. *Энатская Н. Ю., Колчин А. В.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

9. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 10.01.2020

References

1. *Knuth D.* Iskusstvo programmirovanya na EVM [The art of computer programming]. Moscow: Mir, 1976.

2. *Riordan D.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to combinatorial analysis]. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1963. 287 p.

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornoe predstavlenie skhemy razmeshcheniya razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representations for the scheme of allocations of distinguishable particles into indistinguishable cells]. *Diskretnaya matem.* [Discrete Math. Appl.]. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410

4. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz obobshchennoii skhemy posledovatel′nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.

5. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz sluchainykh podstanovok zadannykh tsiklovykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 11. P. 29–34.

6. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhem odnovremennykh i posledovatel′nykh deistvii [Combinatorial analysis of the schemes of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.

7. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

8. *Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.

9. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel′noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol′, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, and Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.

Received January 10, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345