Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2020. С. 84–88
DOI: 10.17076/mat1170

УДК 519.179.4

ОБ УСЛОВИИ СВЯЗНОСТИ ИНТЕРНЕТ-ГРАФА С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону с параметром $\tau = \tau(N)$. Они равны числу исходящих из вершин занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели можно использовать для адекватного описания топологии различных сетей коммуникаций, включая Интернет. Свойства графа зависят от поведения параметра τ. В статье исследуются условия, при выполнении которых случайный конфигурационный граф асимптотически связен, если $N \to \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; связность графа.

Yu. L. Pavlov. ON THE CONNECTIVITY CONDITION FOR AN INTERNET GRAPH WITH A VARIABLE PARAMETER OF THE VERTEX DEGREE DISTRIBUTION

We consider a configuration graph with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to power-law distribution with the parameter $\tau = \tau(N)$. They are equal to the number of each vertex's numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all of the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. The properties of the graph depend on the behaviour of the parameter τ. The paper investigates the conditions under which a random configuration graph is asymptotically connected as $N \to \infty$.

Keywords: configuration random graph; graph connectivity.

Введение

В статье [2] рассматривались конфигурационные графы со случайными независимыми распределениями степеней вершин. Обозначим ξ случайную величину, равную степени любой вершины графа, и пусть

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, k = 1, 2, \dots \tag{1}$$

В [2] предполагалось, что о распределении (1) известна только асимптотика p_k при $k \to \infty$:

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \tag{2}$$

где $d > 0, g > 1, h \geqslant 0$. Целью исследований в упомянутой статье было нахождение условий, при выполнении которых такой случайный граф, содержащий N вершин, при $N \to \infty$ является асимптотически связным. Это значит, что вероятность того, что граф связен, стремится к единице. Более того, были даны оценки скорости сходимости такой вероятности. Обозначим A_N событие, состоящее в том, что граф не связен. Один из полученных в [2] результатов состоит в том, что если $p_k > 0, k = 1, 2, \ldots$, то при $1 < g < 3/2$

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O\left(\left(\frac{\ln^h N}{N^{3-2g}}\right)^{\frac{1}{g-1}}\right). \tag{3}$$

Опубликовано много работ, в которых конфигурационные графы используются в качестве моделей сложных сетей коммуникаций, в частности сети Интернет (см., например, [4]). В статье [6] предложено для этого использовать графы, в которых распределение (1) имеет вид:

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $\tau > 0$. В некоторых работах [3, 5] такие графы называются Интернет-графами, и именно они рассматриваются в данной статье. Из (4) легко следует, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{\tau}{k^{\tau+1}}.$$

Таким образом, распределение (4) является частным случаем распределения (1), если $d = \tau, g = \tau + 1, h = 0$. Из результатов [2] следует, что конфигурационный граф с распределением (4) асимптотически связен, если $0 < \tau < 1/2$.

Исследования последних лет показали, что в современных сетях коммуникаций их свойства могут изменяться по мере увеличения числа узлов и, соответственно, в моделирующих сети случайных графах могут меняться распределения степеней вершин. Доказательства результатов статьи [2] опираются на использование функций, непрерывно зависящих от параметров распределения (1), (2), поэтому очевидно, что, в соответствии с (4), граф остается асимптотически связным, если τ зависит от N и принадлежит интервалу $[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]$ для любого фиксированного $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1/4$. Предположим теперь, что $\tau = \tau(N) \uparrow 1/2$. Главным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $N \to \infty, \tau \uparrow 1/2$ *так, что* $(1-2\tau)\ln N \to \infty$. *Тогда граф является асимптотически связным и*

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O(N^{\frac{2\tau-1}{\tau}}).$$

Заметим, что полученная в теореме оценка скорости сходимости к нулю вероятности несвязности графа в рассматриваемом случае согласуется с соотношением (3).

Доказательство теоремы

Ниже приводится лемма, с помощью которой далее будет доказана теорема. Обозначим $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимые одинаково распределенные случайные величины, равные степеням вершин $1, \ldots, N$ соответственно. Разумеется, распределение этих случайных величин совпадает с распределением (4). Обозначим ζ_N сумму степеней вершин:

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N.$$

Для этой суммы справедливо следующее утверждение о локальной сходимости ее распределения к предельному закону.

Лемма. *Пусть* $N \to \infty, \tau \uparrow 1/2$. *Тогда для целых неотрицательных* k *равномерно относительно* $k/N^{1/\tau}$ *в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = g(k/N^{1/\tau})(1 + o(1)),$$

где $g(x)$ *– плотность устойчивого закона с показателем* $1/2$ *и характеристической функцией*

$$f(t) = \exp\left\{-\sqrt{\frac{\pi}{2}|t|}(1 - isgnt)\right\}. \tag{5}$$

Доказательство. Из (1) и (4) следует, что характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения степени любой вершины графа имеет вид:

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \tag{6}$$

где

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}$$

– трансцендентная функция Лерча [1]. Обозначим $\Psi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\zeta_N/N^{1/\tau}$. Очевидно, что

$$\Psi(t) = \varphi^N(t/N^{1/\tau}). \tag{7}$$

Отсюда и из (6) получаем, что

$$\ln \Psi(t) = N \ln(1 + (e^{it/N^{1/\tau}} - 1)\Phi(e^{it/N^{1/\tau}}, \tau, 1)). \tag{8}$$

Известно [1], что при $\tau \in (0,1)$ и $t \to 0$ справедливо соотношение:

$$\Phi(e^{it}, \tau, 1) = \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1}(1+o(1)),$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x. Отсюда и из (6) при $t \to 0$ и $\tau \uparrow 1/2$ нетрудно получить, учитывая равенство $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, что

$$\varphi(t) = 1 - \sqrt{\pi}(-it)^{\tau}(1+o(1)) + O(t^{\tau+1})$$

$$= 1 - \sqrt{\pi}|t|^{\tau}\Big(\cos\frac{\pi\tau}{2}\Big)\Big[1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi\tau}{2}\Big] + o(\sqrt{|t|}) \tag{9}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}|t|^{\tau}(1 - isgnt)(1+o(1)).$$

Используя (7)–(9), находим, что при любом фиксированном t

$$\ln\Psi(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}|t|}(1 - sgnt)(1+o(1)). \tag{10}$$

Из (5) и (10) следует, что распределение суммы ζ_N слабо сходится к устойчивому закону с плотностью $g(x)$. Далее докажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость. Для этого представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ по формуле обращения:

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} \tag{11}$$

$$= (2\pi N^{1/\tau})^{-1}\int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}}\Psi(t)dt.$$

Аналогично,

$$g(k/N^{1/\tau}) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt/N^{1/\tau}} f(t)dt. \tag{12}$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi(N^{1/\tau}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - g(k/N^{1/\tau})). \tag{13}$$

С помощью (11) и (12) эту разность можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{14}$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-ikt/N^{1/\tau}}(\Psi(t) - f(t))dt,$$

$$I_2 = \int_{A<|t|<\varepsilon N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}}\Psi(t)dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon N^{1/\tau}\leqslant|t|\leqslant\pi N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}}\Psi(t)dt,$$

$$I_4 = -\int_{A<|t|} e^{-ikt/N^{1/\tau}} f(t)dt,$$

выбор положительных постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно убедиться, что каждый из интегралов $I_1 - I_4$ и, соответственно, разность R_N стремится к нулю. Из (5) и (10) следует, что $I_1 \to 0$. Легко видеть также, что

$$|I_4| \leqslant \int_{A<|t|} |f(t)|dt,$$

а последняя величина может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A.

Рассмотрим I_2. Используя (7) и (9), нетрудно получить, что в области интегрирования I_2 при достаточно малом ε

$$|\Psi(t)| \leqslant e^{-C_1\sqrt{|t|}},$$

где C_1 – некоторая положительная постоянная. Следовательно,

$$|I_2| \leqslant \int_{A<|t|} e^{-C_1\sqrt{|t|}}dt,$$

что, как и в случае I_4, можно сделать сколь угодно малым выбором A.

Осталось рассмотреть I_3. Известно, что если $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$, то существует такое $C_2 > 0$, что $|\varphi(t)| \leqslant e^{-C_2}$, поэтому из (7) получаем, что

$$|I_3| \leqslant 2\pi N^{1/\tau}e^{-C_2N}.$$

Последнее неравенство означает, что $I_3 \to 0$. Собирая вместе все полученные оценки интегралов $I_1 - I_4$, из (13) и (14) получаем утверждение леммы.

Теперь мы можем установить основной результат статьи.

Доказательство теоремы. Воспользуемся обозначениями и логикой доказательства теоремы статьи [2]. Событие A_N означает, что множество вершин графа можно разделить на два непустых непересекающихся подмножества Ω и Ω^* таких, что ни одна из вершин, входящих в Ω, не имеет ребер, соединяющих ее с вершинами из Ω^*. Мы можем также считать, что $|\Omega| \leqslant N/2$, где $|\Omega|$ означает мощность множества Ω. Обозначим

$$\zeta_N(\Omega) = \sum_{i\in\Omega}\xi_i, \quad \zeta_N(\Omega^*) = \sum_{i\in\Omega^*}\xi_i.$$

Общее число различных графов равно $(\zeta_N - 1)!!$, поэтому

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{\Omega \in \Lambda} \frac{(\zeta_N(\Omega) - 1)!!(\zeta_N(\Omega^*) - 1)!!}{(\zeta_N) - 1)!!} \tag{15}$$

$$\leqslant \sum_{\Omega \in \Lambda} \prod_{j=1}^{\zeta_N(\Omega)/2} \frac{\zeta_N(\Omega) - 2j + 1}{\zeta_N - 2j + 1},$$

где Λ – множество всех возможных разбиений вершин графа на Ω и Ω^*.

Введем обозначение:

$$f(x) = \prod_{j=0}^{x-1} \frac{2j+1}{\zeta_N - 2j - 1}. \tag{16}$$

Тогда из (15) следует, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant \sum_{s=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} R_N(s), \tag{17}$$

где

$$R_N(s) = \binom{N}{s} f\left(\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil\right), \tag{18}$$

$\lfloor N/2 \rfloor$ означает максимальное целое число, не превосходящее $N/2$, а $\lceil s/2 \rceil$ – минимальное целое, не меньшее, чем $s/2$.

Далее будем следовать доказательству теоремы статьи [2] для рассматриваемого случая. Если s четное, то из (16) и (18) вытекает, что

$$\frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} = \frac{(N-s)(N-s-1)f(s/2+1)}{(s+2)(s+1)f(s/2)}$$

и

$$\frac{f(s/2+1)}{f(s/2)} = \frac{s+1}{\zeta_N - s - 1}.$$

Отсюда нетрудно установить, используя лемму, что для любого четного $s \leqslant \lfloor N/2 \rfloor - 2$

$$\frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} < q < 1, \tag{19}$$

где q можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого N. Если же s нечетно, то, рассуждая аналогично, видим, что

$$\frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} = \frac{(N-s)(N-s-1)f((s+3)/2)}{(s+2)(s+1)f((s+1)/2)}$$

$$= \frac{(N-s)(N-s-1)}{(s+1)(\zeta_N - s - 2)}.$$

Это соотношение позволяет обнаружить, опять с помощью леммы, что оценка (19) сохраняет силу и в случае нечетного s.

Из (17) очевидным образом следует, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant R_N(1)$$

$$+ R_N(2)\left(1 + \prod_{j \geqslant 1} \frac{R_N(2j+2)}{R_N(2j)}\right)$$

$$+ R_N(3)\left(1 + \prod_{j \geqslant 2} \frac{R_N(2j+1)}{R_N(2j-1)}\right),$$

поэтому из (19) получаем, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leqslant R_N(1) + \frac{R_N(2) + R_N(3)}{1-q}. \tag{20}$$

Учитывая (16) и (18), с помощью леммы находим, что

$$R_N(1) = O(N^{\frac{\tau-1}{\tau}}), \quad R_N(2) = O(N^{\frac{2\tau-1}{\tau}}),$$

$$R_N(3) = O(N^{\frac{3\tau-2}{\tau}}).$$

Отсюда и из (20) следует утверждение теоремы.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Бейтман Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

2. *Павлов Ю. Л.* О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, вып. 2. С. 115–123. doi: 10.4213/dm1573

3. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

4. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

5. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02 // IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

6. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 02.01.2020

References

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 321 p.

2. *Pavlov Yu. L.* O svyaznosti konfiguratsionnykh grafov [On connectivity of configuration graphs]. *Diskretnaya matem.* [Discrete Math. Appl.]. 2019. Vol. 31, iss. 2. P. 115–123. doi: 10.4213/dm1573

3. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random Internet-type graphs and the generalized allocation sceme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

4. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

5. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02. *IEEE.* 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

6. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received January 02, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218