Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2019. С. 58–62
DOI: 10.17076/mat1073

УДК 519.179.4

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВТОРЫХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

Е. В. Хворостянская

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы, содержащие N вершин, занумерованных числами от 1 до N, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Вторая степень $\eta^{(2)}$ вершины A конфигурационного графа равна сумме степеней вершин, смежных с вершиной A, без учета ребер, идущих к A. При $N \to \infty$ для графов, степени вершин которых подчиняются закону Пуассона, найден вид производящей функции и распределение случайной величины $\eta^{(2)}$. Также при $N \to \infty$ получен вид производящей функции случайной величины $\eta^{(2)}$ для графов с распределением степеней вершин $p_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$, таким, что $p_k \sim d/\left(k^g (\ln k)^h\right), \ h \geqslant 0, \ g > 7/3, \ d > 0$, при $k \to \infty$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; вторая степень вершины; производящая функция; предельное распределение.

E. V. Khvorostyanskaya. ON THE DISTRIBUTION OF THE SECOND DEGREES OF CONFIGURATION GRAPHS VERTICES

The object is configuration graphs with N vertices, numbered from 1 to N, whose vertex degrees are independent identically distributed random variables. The second degree $\eta^{(2)}$ of an arbitrary vertex A of a configuration graph is equal to the sum of the degrees of the vertices adjacent to the vertex A excluding the edges going to A. As $N \to \infty$, the form of the generating function and the distribution of the random variable $\eta^{(2)}$ are found for graphs whose vertex degrees have the Poisson distribution. Also, as $N \to \infty$, the form of the generating function of a random variable $\eta^{(2)}$ is obtained for graphs with the vertex degree distribution $p_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$, such that $p_k \sim d/\left(k^g (\ ln k)^h\right), \ h \geqslant 0, \ g > 7/3, \ d > 0$, as $k \to \infty$.

Keywords: configuration graph; second degree of vertex; generating function; limit distribution.

В последние годы значительное внимание уделяется исследованию различных характеристик конфигурационных графов, введенных в работе [7]. Такие графы удобно использовать в качестве моделей сложных коммуникационных сетей. Степени вершин конфигурационного графа рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины с дискретным распределением. Под степенью вершины понимается число инцидентных ей полуребер, т. е. ребер, для которых еще не определены инцидентные им вторые вершины.

После определения степеней вершин полуребра равновероятно соединяются, образуя ребра. В случае, когда сумма степеней всех вершин нечетна, добавляется еще одна вершина степени 1, что не влияет на асимптотические свойства графа. Из построения графа следует, что он может содержать петли и кратные ребра. При неограниченном росте числа вершин графа и различных условиях на число ребер и распределение степеней вершин в ряде работ получены предельные распределения различных характеристик конфигурационных графов, в частности, максимальной степени вершины, числа вершин заданной степени [2–6, 8]. В настоящее время интерес представляет также изучение других свойств конфигурационных графов, таких как кластерный коэффициент и коэффициент ассортативности [1, 10], модулярность, вторые, третьи и т. д. степени вершин. В работах [9, 12] рассматривались вторые степени вершин графов предпочтительного присоединения и были получены асимптотические распределения вторых степеней для моделей Боллобаша–Риордана и Бакли–Остгуса.

Под *второй степенью* произвольной вершины A конфигурационного графа будем понимать случайную величину $\eta^{(2)}$, равную сумме степеней вершин, смежных с вершиной A, без учета ребер, идущих к A. В работе [11] для конфигурационных графов рассматривается задача о среднем числе вторых соседей вершины, т. е. среднем числе вершин, находящихся в двух шагах от заданной вершины. Вопрос о распределении числа вторых соседей не изучался. Ясно, что при наличии петель и кратных ребер вторая степень вершины графа может отличаться от числа вторых соседей этой вершины.

Далее рассматриваются конфигурационные графы, содержащие N вершин, занумерованных числами от 1 до N. Нас интересует предельное распределение второй степени вершины графа при $N \to \infty$.

Пусть независимые случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, равные степеням вершин конфигурационного графа, имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$:

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$i = 1, \dots, N$. Обозначим через $F(z)$ производящую функцию случайной величины $\eta^{(2)}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При $N \to \infty$ асимптотически достоверно (а.д.)*

$$F(z) = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} s_k(\lambda) z^k, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}\left\{\eta^{(2)} = 0\right\} = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)},$$
$$\mathbf{P}\left\{\eta^{(2)} = k\right\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} s_k(\lambda), \ k \geqslant 1, \quad (3)$$

где

$$s_1(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}},$$
$$s_k = \lambda e^{-\lambda} \frac{d s_{k-1}(\lambda)}{d\left(\lambda e^{-\lambda}\right)}, \quad k \geqslant 2. \quad (4)$$

В работе [3] рассматривались конфигурационные графы, степени вершин $\eta_1, \dots, \eta_N$ которых имеют распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_i = k\}, \ k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$i = 1, \dots, N$, такое, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \ h \geqslant 0, \ g \geqslant 1, \ h + g > 1, \ d > 0, \quad (6)$$

т.е. о распределении степеней вершин известно лишь свойство (6). В качестве примера такого распределения можно рассмотреть степенное распределение со случайным параметром [3]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При $N \to \infty$ для производящей функции $F(z)$ второй степени вершины конфигурационного графа с распределением степеней вершин (5), (6) при $g > 7/3$ а.д. выполнено равенство*

$$F(z) = F_{\eta_1}\left(\frac{F'_{\eta_1}(z)}{F'_{\eta_1}(1)}\right),$$

где

$$F_{\eta_1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad F'_{\eta_1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}.$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайные величины, равные степеням смежных с A вершин без учета ребер, идущих к вершине A. Известно [11], что

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} j p_j}, \ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $i = 1, 2, \dots,$ $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ – распределение степеней вершин конфигурационного графа.

Покажем, что случайно выбранная вершина A графа асимптотически достоверно не имеет петель и кратных ребер. Обозначим $L = \eta_1 + \ldots + \eta_N$ сумму степеней всех вершин графа. По закону больших чисел имеет место равенство $L = \lambda N(1 + o(1))$. Используя это соотношение и (1), а также учитывая, что число конфигурационных графов с L полуребрами равно $(L-1)!!$, несложно показать, что

$$\mathbf{P}\{\text{вершина } A \text{ не имеет петель}\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L-3)!!}{(L-1)!!} \binom{k}{2} p_k \to 1, \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\{\text{вершина } A \text{ не имеет кратных ребер}\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (N-1) \frac{(L-5)!!}{(L-1)!!} \binom{k}{2} p_k \to 1. \tag{9}$$

Таким образом, произвольно выбранная вершина A графа а.д. не имеет петель и кратных ребер. Следовательно, подграф, содержащий вершину A и смежные с ней вершины, можно рассматривать как реализацию двух поколений ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, начинающегося с одной частицы. При этом распределение числа прямых потомков начальной частицы задается (1), а число прямых потомков частиц первого поколения имеет распределение (7), где p_k заданы в (1). Легко видеть, что вторая степень $\eta^{(2)}$ вершины A соответствует случайной величине $\mu(2)$, равной числу частиц второго поколения ветвящегося процесса. Тогда производящая функция $F(z)$ случайной величины $\eta^{(2)}$ равна $F(z) = \mathbf{E} z^{\mu(2)}$. Отсюда и из (7) получаем, что

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu(2) = k\} z^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta_1 = i\} \mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_i = k\} \right) z^k$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} j p_j} \right)^i,$$

т. е. выполнено равенство

$$F(z) = F_{\eta_1}\left(\frac{F'_{\eta_1}(z)}{F'_{\eta_1}(1)} \right), \tag{10}$$

где $F_{\eta_1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ – производящая функция случайной величины η_1.

Используя (1), (10), находим, что

$$F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}}. \tag{11}$$

Разложим функцию $e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}}$ в ряд по степеням z:

$$e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\lambda}\right)^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda z)^k}{k!}$$
$$= e^{\lambda e^{-\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)^{k-1} \left(\lambda e^{-\lambda}\right)^{i+1}}{i!}. \tag{12}$$

Обозначим

$$s_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)^{k-1} \left(\lambda e^{-\lambda}\right)^{i+1}}{i!}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Нетрудно видеть, что выполнены соотношения (4), и из (11), (12) следует (2). Используя формулу обращения для производящих функций, из (2) получаем равенства (3). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Через $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать некоторые положительные постоянные. Используя (6), несложно показать, что для максимальной степени $\xi_{(N)}$ вершины графа при $N \to \infty$ выполнены соотношения:
при $h = 0$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{(N)} < A N^{(g-1)^{-1}}\right\} \geqslant \exp\left\{-\frac{C_1}{A^{g-1}}\right\}$$

и выбором достаточно большого A вероятность $\mathbf{P}\left\{\xi_{(N)} < A N^{(g-1)^{-1}}\right\}$ можно сделать сколь угодно близкой к 1;
при $h > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{(N)} < N^{(g-1)^{-1}}\right\} \geqslant \exp\left\{-\frac{C_2}{(\ln N)^h}\right\} \to 1.$$

Используя эти соотношения, (6) и неравенство $L \geqslant N$, где L – сумма степеней всех вершин, можно показать, что при $g = 2,\ h > 0$ и при $g > 2$ выполнено соотношение (8), а при $g > 7/3$ справедливо (9). Аналогично доказательству теоремы 1 получаем утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Литература

1. *Павлов Ю. Л.* О кластеризации условного конфигурационного графа // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 62–67. doi: 10.17076/mat768

2. *Павлов Ю. Л.* Предельные распределения числа вершин заданной степени условного конфигурационного графа // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 73–80. doi: 10.17076/mat356

3. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

4. *Павлов Ю. Л., Феклистова Е. В.* О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 58–70. doi: 10.4213/dm1369

5. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

7. *Bollobás B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula of the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Chepliukova I. A., Pavlov Yu. L.* Limit distributions of vertex degrees in a conditional configuration graph // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 140–148. doi: 10.17076/mat769

9. *Kupavskii A., Ostroumova L., Shabanov D., Tetali P.* The distribution of second degrees in the Buckley–Osthus random graph model // Internet Mathematics. 2013. Vol. 9, iss. 4. P. 297–335. doi: 10.1080/15427951.2012.727375

10. *Leri M., Pavlov Yu.* Degree-degree dependencies and clustering in configuration graphs // 18^{th} Int. 2018 summer conf. on probability and statistics (ISCPS'18). Sofia, Inst. Math. Inform. BAS. 2018. P. 43–47.

11. *Newman M. E. J.* Random graphs as models of networks // In Handbook of Graphs and Networks / S. Bornholdt and H. G. Schuster (eds.), Berlin: Wiley–VCH, 2003.

12. *Ostroumova L., Grechnikov E.* The distribution of second degrees in the Bollobás–Riordan random graph model // Moscow J. Combinatorics and Number Theory. 2012. Vol. 2, no. 2. P. 85–110.

Поступила в редакцию 06.05.2019

References

1. *Pavlov Yu. L.* O klasterizatsii uslovnogo konfiguratsionnogo grafa [On clustering of conditional configuration graphs]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 62–67. doi: 10.17076/mat768

2. *Pavlov Yu. L.* Predel'nye raspredelenija chisla vershin zadannoi stepeni uslovnogo konfiguratsionnogo grafa [Limit distributions of the number of vertices with given degree in a conditional configuration graph]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 73–80. doi: 10.17076/mat356

3. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB. MATH.* 2018. Vol. 209, no. 2. P. 258–275. doi: 10.4213/sm8832

4. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* On limit behavior of maximum vertex degree in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Math. Appl.* 2017. Vol. 27, iss. 4. P. 213–222. doi: 10.1515/dma-2017-0023

5. *Khvorostyanskaya E. V., Pavlov Yu. L.* On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with bounded number of edges. *Discrete Math. Appl.* 2018. Vol. 30, iss. 1. P. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

7. *Bollobás B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula of the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. *Chepliukova I. A., Pavlov Yu. L.* Limit distributions of vertex degrees in a conditional configuration graph. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 140–148. doi: 10.17076/mat769

9. *Kupavskii A., Ostroumova L., Shabanov D., Tetali P.* The distribution of second degrees in the Buckley–Osthus random graph model. *Internet Mathematics*. 2013. Vol. 9, iss. 4. P. 297–335. doi: 10.1080/15427951.2012.727375

10. *Leri M., Pavlov Yu.* Degree-degree dependencies and clustering in configuration graphs. *18^{th} Int. 2018 summer conf. on probability and statistics (ISCPS'18)*. Sofia, Inst. Math. Inform. BAS. 2018. P. 43–47.

11. *Newman M. E. J.* Random graphs as models of networks. In *Handbook of Graphs and Networks.*

S. Bornholdt and H. G. Schuster (eds.), Berlin: Wiley–VCH, 2003.

12. *Ostroumova L., Grechnikov E.* The distribution of second degrees in the Bollobás–Riordan random graph model. *Moscow J. Combinatorics and Number Theory.* 2012. Vol. 2, no. 2. P. 85–110.

Received May 06, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218