

УДК 517.977

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ С ПЕРЕМЕННЫМ СОСТАВОМ БИОМАССЫ

А. Н. Кириллов¹, А. М. Сазонов¹, Н. К. Брыксенкова²

¹ *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

² *Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия*

Предлагается динамическая модель, описывающая процесс биологической очистки сточных вод с учетом изменчивости биосостава активного ила. При небольшом времени оборота биомассы в микрофлоре активного ила преобладают быстрорастущие виды, приспособленные к потреблению легкоокисляемых соединений. При этом медленно растущие группы, потребляющие трудноусвояемые соединения, не успевают закрепиться в реакторе, в результате чего эти соединения попадают в стоки не разлагаясь. Если время оборота биомассы достаточно велико, в очистной системе закрепляются медленно растущие группы. При этом увеличивается разнообразие закрепившихся видов биомассы. Для моделирования данного явления применен метод динамической декомпозиции, разработанный одним из авторов, позволяющий представить процесс последовательностью относительно простых моделей, сменяющих друг друга в зависимости от условий протекания процесса. Разработан метод стабилизации процесса биоочистки.

Ключевые слова: стабилизация; декомпозиция; биологическая очистка.

**A. N. Kirillov, A. M. Sazonov, N. K. Bryksenova.
STABILIZATION OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER
TREATMENT PROCESS WITH VARIABLE BIOMASS
STRUCTURE**

A dynamical model describing the biological wastewater treatment process, taking into account the variability of the activated sludge biomass structure, is proposed. Where biomass turnover time is short, fast-growing microorganisms, consuming easily oxidizable substances, prevail in activated sludge. In such conditions, slow-growing microorganisms, consuming poorly digestible substances, do not get enough time to become part of the biomass. As a result, such substances are discharged undecomposed. If the biomass turnover time is sufficiently large, then slow-growing microorganisms get established in the digester, augmenting the diversity of species. A method of dynamical decomposition developed by one of the authors is applied to model the above phenomenon. This method permits to represent the process as a sequence of relatively simple models which follow one another according to the conditions of process behavior. A method for stabilization of the biological treatment process has been developed.

Key words: stabilization; decomposition; biological treatment.

ВВЕДЕНИЕ

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод имеет большое значение в проблеме охраны окружающей среды. Предложенная в [12] модель процесса очистки с помощью активного ила стимулировала использование математического моделирования в практике инженерных расчетов [11, 13, 14]. Процесс биоочистки сточных вод связан с различными аспектами биологического, физико-химического, технологического характера. Широкий спектр примесей в стоках, количество и состав которых нестационарны и труднопрогнозируемы, оказывает негативное влияние на возможности использования наиболее универсального метода очистки сточных вод, которым является в настоящее время метод очистки с помощью активного ила. Сточные воды представляют собой многокомпонентный субстрат-загрязнитель, в то время как активный ил состоит из многочисленных групп микроорганизмов. Указанные обстоятельства создают большие трудности при использовании методов математического моделирования с целью прогнозирования и управления процессом биоочистки.

В работах [2, 3] показано, что при небольшом времени оборота биомассы в микрофлоре активного ила преобладают быстрорастущие виды, приспособленные к потреблению легкоокисляемых соединений. При этом медленно растущие группы, специализирующиеся на потреблении трудноусвояемых соединений, вытесняются из реактора, в результате чего эти соединения попадают в стоки не разлагаясь. Напротив, если время оборота биомассы достаточно велико, в очистной системе закрепляются медленно растущие группы. При этом увеличивается разнообразие закрепившихся видов и идет процесс глубокой очистки. Отметим, что необоснованное увеличение времени пребывания биомассы в аэротенке уменьшает эффективность процесса очистки. Возникает проблема построения модели, учитывающей непостоянство видового состава сообщества микроорганизмов активного ила. В данной работе представлен подход, анонсированный в [4], к решению этой проблемы на основе предложенного автором метода динамической декомпозиции, суть которого состоит в возможности изменения размерности и структуры системы в процессе ее функционирования. В результате получается последовательность относительно простых моделей, сменяющих друг друга в зависимости от условий

протекания процесса. Для каждой модели решается задача управления процессом очистки на основе алгоритма T -стабилизации [7]. Отметим, что метод динамической декомпозиции для линейных систем рассмотрен в [8]. Предлагаемый подход позволяет повысить эффективность процесса биоочистки [1].

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ

Пусть система очистки состоит из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции. Полагая, что i -й вид микроорганизмов окисляет i -й компонент загрязнителя. Будем считать, что с уменьшением номера i субстрат становится более трудноокисляемым. При этом скорость очистки описывается функцией Моно. В качестве базовой используется модель [5, 9, 10], задающая динамику подсистемы S_i

$$\dot{x}_i = ua_{1i} + \frac{\mu_i s_i x_i}{k_i + s_i} - (b + u)x_i, \quad (1)$$

$$\dot{s}_i = ba_{2i} - \frac{\mu_i s_i x_i}{Y_i(k_i + s_i)} - (b + u)s_i,$$

где s_i – концентрация i -го вида субстрата-загрязнителя; x_i – концентрация i -го вида микроорганизмов; Y_i – коэффициент утилизации i -го вида субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов; k_i – константа полунасыщения; b, a_{2i} – скорость и концентрация соответственно субстрата i -го вида субстрата на входе; u, a_{1i} – скорость и концентрация соответственно i -го вида микроорганизмов в обратном потоке; μ_i – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов i -го вида.

Управление процессом биоочистки осуществляется за счет изменения скорости u рециркулирующего потока. Пусть $u_i > 0$ – постоянные, удовлетворяющие условию: $u_i < u_{i+1}, i = 1, \dots, n$. Будем считать, что для закрепления микроорганизмов i -го вида в аэротенке требуется, чтобы скорость рециркулирующего потока удовлетворяла неравенству $u \leq u_i$. Это значит, что с увеличением номера i уменьшается необходимость в присутствии медленно растущих микроорганизмов в аэротенке, что вызывается уменьшением количества трудноусвояемых видов субстрата. Иначе говоря, чем меньше i , тем труднее окисляется соединение вида i , что приводит к необходимости уменьшить скорость рециркуляции, т. е. увеличить время пребывания биомассы в аэротенке для увеличения в ней доли медленно растущих видов микроорганизмов, окисляющих трудноусвояемые соединения. Таким об-

разом, для того чтобы в системе присутствовали виды i_1, \dots, i_k микроорганизмов, достаточно подчинить u условию $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$, где $i^* = \min(i_1, \dots, i_k)$. При этом в аэротенке не будут присутствовать виды микроорганизмов с номерами, меньшими i^* , что позволит, помимо увеличения скорости процесса биоочистки, сделать этот процесс более экономным.

Таким образом, процесс биоочистки S – сложная система, в состав которой могут входить подсистемы S_i , динамика которых задается уравнениями (1). Далее для организации изменения состава системы S вводим функции $y_i(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{y}_i = s_i - \bar{s}_i, \text{ если } S_i \subset S \quad (2)$$

$$\dot{y}_i = a_{2i} - \bar{a}_{2i}, \text{ если } S_i \not\subset S, \quad (3)$$

где \bar{s}_i, \bar{a}_i – заданные положительные постоянные. Переменная $y_i(t)$ задает уровень накопления субстрата вида i в аэротенке. Изменение структуры системы S происходит следующим образом. Пусть \bar{y}_i – заданные постоянные.

Увеличение размерности S

Пусть $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$. Тогда в состав S входят подсистемы с номерами, не меньшими i^* : $S_{i^*}, S_{i^*+1}, \dots, S_n$. Это значит, что $y_i < \bar{y}_i$ при $i = 1, \dots, i^* - 1$. Если $y_l(t^*) = \bar{y}_l$ в некоторый момент времени $t = t^*$ для некоторого $l \in \{1, \dots, i^* - 1\}$, то в этот момент времени u принимает значение в промежутке (u_{l-1}, u_l) , и к системе S подключаются подсистемы $S_l, S_{l+1}, \dots, S_{i^*-1}$, для чего используется одна из процедур подключения, которые описаны в [6].

Уменьшение размерности S

Пусть $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$. Если $y_{i^*}(\bar{t}) = \bar{y}_{i^*}$ в некоторый момент времени $t = \bar{t}$, то в этот момент времени u принимает значение в промежутке (u_{i^*}, u_{i^*+1}) , и от системы S отключается подсистема S_{i^*} [6].

Замечание 1. Изменение структуры системы в случае, когда динамика переменных эволюционного времени задается уравнениями (2), (3), происходит как при изменении концентрации загрязнений на выходе, что отражено в уравнении (2), так и при изменении концентраций загрязнений на входе, что отражено в уравнении (3). Таким образом, система управления достаточно чутко реагирует на изменение концентраций загрязнителей. Можно предложить модель, в которой используется только первое уравнение (3): $\dot{y}_i = s_i - \bar{s}_i$. Такая модель будет более грубой.

Стабилизация

Пусть $u_{j-1} < u < u_j$. Это означает, что $S = \{S_j, \dots, S_n\}$. Рассмотрим следующую задачу: построить кусочно-постоянное управление, при котором выполняется ограничение

$$0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n, \quad (4)$$

где \bar{s}_i – заданная положительная постоянная. Это естественное требование ограниченности концентрации загрязнений (субстрата) на выходе из аэротенка. Формально надо построить управление, при котором траектории систем (1) пересекают прямую $s_i = \bar{s}_i$ в направлении убывания s_i . Для этого рассмотрим условие $\dot{s}_i < 0$ при $s_i = \bar{s}_i$, которое равносильно неравенству

$$ba_{2i} - \frac{\mu_i x_i \bar{s}_i}{Y_i(k_i + \bar{s}_i)} - (b+u)\bar{s}_i < 0,$$

откуда получаем

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right) - \frac{\mu_i x_i}{Y_i(k_i + \bar{s}_i)}. \quad (5)$$

Условие (5) выполняется при всех $x_i > 0$, если

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right).$$

Если, например, $x_i > \frac{Y_i(k_i + \bar{s}_i)}{\mu_i} b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right)$, то условие (5) выполняется при всех $u > 0$. Тогда получаем следующий результат.

Теорема 1. Если существует управление u такое, что

$$u_{j-1} < u < u_j, \quad j \in \{2, \dots, n\}; \quad (6)$$

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right), \quad i = j, j+1, \dots, n, \quad (7)$$

то при этом постоянном u , начиная с некоторого момента времени, выполняются условия

$$0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n.$$

Получим теперь оценку времени \tilde{t} попадания траектории системы при управлении, удовлетворяющем (6), (7), в область $0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, i = j, j+1, \dots, n$.

Теорема 2. Пусть u удовлетворяет (6), (7), а также условию

$$\frac{ua_{1i} + bY_i a_{2i}}{b+u} \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n.$$

Тогда

$$\tilde{t} \leq \max_i \frac{1}{b+u} \ln \left(\frac{z_{i0} - z_i^*}{Y_i \bar{s}_i - z_i^*} \right),$$

где $z_i = x_i + Y_i s_i$, $z_i^* = x_i^* + Y_i s_i^*$, $z_{i0} = x_{i0} + Y_i s_{i0}$, (x_i^*, s_i^*) – состояние равновесия подсистемы S_i , (x_{i0}, s_{i0}) – начальная точка.

Доказательство. Пусть \tilde{t}_i – время попадания траектории подсистемы S_i в область $0 \leq s_i \leq \bar{s}_i$. Очевидно, \tilde{t}_i не меньше времени попадания траектории в полосу, ограниченную прямыми $x_i + Y_i s_i = D_i \equiv \frac{u a_{1i} + b Y_i a_{2i}}{b+u}$ и $x_i + Y_i s_i = Y_i \bar{s}_i$. Поскольку $\dot{z}_i = -(b+u)(z_i - D_i)$, то нетрудно получить $z_i(t) = z_i^* + (z_{i0} - z_i^*)e^{-(b+u)t}$, $z_i^* = D_i$, откуда следует $\tilde{t}_i = \frac{1}{b+u} \ln \left(\frac{z_{i0} - z_i^*}{Y_i \bar{s}_i - z_i^*} \right)$, что приводит к заключению теоремы. \square

Замечание 2. Рассмотрим еще одну задачу стабилизации процесса биоочистки. Пусть $u_{j-1} < u < u_j$, т. е. динамика системы задается уравнениями (1), где $i = j, j+1, \dots, n$. Умножив вторые уравнения этой системы на Y_i и сложив их, получим

$$\sum_{i=j}^n \dot{z}_i = -(b+u) \sum_{i=j}^n z_i + A, \quad (8)$$

где $z_i = x_i + Y_i s_i$, $A = \sum_{i=j}^n A_i$, $A_i = u \sum_{i=j}^n a_{1i} + b \sum_{i=j}^n Y_i a_{2i}$. Обозначив $z = \sum_{i=j}^n z_i$, из (6) получаем

$$\dot{z} = -(b+u)z + A. \quad (9)$$

Из (8) следует, что система (1) имеет асимптотически устойчивое инвариантное множество

$$z = \frac{A}{b+u},$$

являющееся гиперплоскостью в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2(n-j+1)}$ переменных $((x_j, s_j), (x_{j+1}, s_{j+1}), \dots, (x_n, s_n))$. Возникает задача: найти множество точек в $\mathbb{R}^{2(n-j+1)}$, которые можно стабилизировать или T -стабилизировать (т. е. стабилизировать за время, меньшее некоторого заданного) с помощью кусочно-постоянного управления u , удовлетворяющего условию $u_{j-1} < u < u_j, j \in \{2, \dots, n\}$. При этом T -стабилизирующее управление позволит увеличить возможности стабилизации с учетом, что структура системы может изменяться. Для решения этой задачи можно построить параллелепипед, две грани которого лежат на плоскостях, параллельных интегральной плоскости, а остальные грани перпендикулярны им. При этом стабилизируемая точка находится в центре параллелепипеда. Сначала кусочно-постоянное управление u , принимающее два значения из (u_{j-1}, u_j) , переводит траекторию в параллелепипед, а затем переключается на его гранях, перпендикулярных интегральной плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к моделированию сложных систем с переменной структурой и размерностью используется в задаче управления процессом биологической очистки сточных вод. При этом данный метод позволяет рассмотреть двухуровневую задачу стабилизации. На верхнем уровне стабилизируется структура системы, а на нижнем – некоторая область фазовых состояний.

Работа А. Н. Кириллова и А. М. Сазонова поддержана РФФИ (грант №18-01-00249).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аким Э. Л., Смирнов А. М., Смирнов М. Н. Современная концепция водопользования на предприятиях ЦБП // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2006. № 6. С. 66–74.
2. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.
3. Вавилин В. А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983. 185 с.
4. Кириллов А. Н. Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2008. № 5. С. 66.
5. Кириллов А. Н. Задачи стабилизации экологических систем // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1994. Вып. 6. С. 883–892.
6. Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
7. Кириллов А. Н. Некоторые методы кусочно-постоянной стабилизации нелинейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление: Материалы 5-й науч.-техн. конф. 2008. № 5. С. 70–71.
8. Кириллов А. Н. Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
9. Фурсова П. В., Левич А. П. Дифференциальные уравнения в моделировании сообществ микроорганизмов // Успехи современной биологии. 2006. № 2. С. 149–179.
10. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environ. Tech. Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365
11. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means

of computer models // *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

12. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // *Water Research.* 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

13. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models // *Water Research.* 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

14. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process // *Water Research.* 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Поступила в редакцию 20.04.2019

REFERENCES

1. *Akim E. L., Smirnov A. M., Smirnov M. N.* Sovremennaya kontseptsiya vodopol'zovaniya na predpriyatiyakh CBP [The modern conception of the water use at the pulp and paper enterprises]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2006. No. 6. P. 66–74.

2. *Vavilin V. A.* Vremya oborota biomassy i destruktziya organicheskogo veshchestva v sistemakh biologicheskoi ochistki [Turnover time of the biomass and organic substance destruction in the biological treatment systems]. Moscow: Nauka, 1986. 144 p.

3. *Vavilin V. A.* Nelineinye modeli biologicheskoi ochistki i protsessov samoochishcheniya v rekakh [Nonlinear models of the biological wastewater treatment and the processes of the self-purification in rivers]. Moscow: Nauka, 1983. 185 p.

4. *Kirillov A. N.* Dinamicheskoe modelirovanie i stabilizatsiya protsessa biologicheskoi ochistki stochnykh vod [Dynamical modeling and process stabilization of the biological wastewater treatment]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2008. No. 5. P. 66.

5. *Kirillov A. N.* Zadachi stabilizatsii ekologicheskikh sistem [Problems of the ecological systems stabilization]. *Obozrenie priklad. i promyshlennoi matem.* [Appl. and Industrial Math. Reviews]. 1994. No. 6. P. 883–892.

6. *Kirillov A. N.* Metod dinamicheskoi dekompozitsii v modelirovanii sistem so strukturnymi izmeneniyami [The method of dynamical decomposition for variable structure systems modeling]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems]. 2009. No. 1. P. 20–24.

7. *Kirillov A. N.* Nekotorye metody kusochno-postoyannoi stabilizatsii nelineinykh dinamicheskikh sistem [Some methods of the piecewise constant stabilization of the

nonlinear dynamical systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie: Mat. 5-i nauch.-tekhn. konf.* [Mechatronics, automation, control: Proceed. 5th sci. tech. conf.]. 2006. P. 70–71.

8. *Kirillov A. N.* Upravlenie mnogostadiinymi tekhnologicheskimi protsessami [The multistage technological processes control]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta. Ser.10: Priklad. matem. Informatika. Protsessy upravleniya* [Vestnik SPbSU. Applied Math. Computer Sci. Control Processes]. 2006. Iss. 4. P. 127–131.

9. *Fursova P. V., Levich A. P.* Differentsial'nye uravneniya v modelirovanii soobshchestv mikroorganizmov [Differential equations in the modeling of the microorganism biocenoses]. *Uspekhi sovr. biol.* [Biol. Bull. Reviews]. 2006. No. 2. P. 149–179.

10. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process. *Environ. Tech. Letters.* 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

11. *Dupont R., Sinkjaer O.* Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

12. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. *Water Research.* 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

13. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. *Water Research.* 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

14. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process. *Water Research.* 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Received April 20, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических
исследований КарНЦ РАН, Федеральный
исследовательский центр «Карельский
научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: krllv1812@yandex.ru
тел.: (8142) 763370

Сазонов Александр Михайлович
аспирант
Институт прикладных математических
исследований КарНЦ РАН, Федеральный
исследовательский центр «Карельский
научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: sazonov@cs.karelia.ru

Брыксенкова Наталия Константиновна
старший преподаватель, к. т. н.
Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I
Московский пр., 9, Санкт-Петербург,
Россия, 190031
эл. почта: bryksenkova33@gmail.com

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: krllv1812@yandex.ru

Sazonov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: sazonov@cs.karelia.ru

Bryksenkova, Natalia
St. Petersburg State Transport University
9 Moskovsky Pr., 190031
Saint-Petersburg, Russia
e-mail: bryksenkova33@gmail.com