Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2019. С. 21–29
DOI: 10.17076/mat1050

УДК 519.2

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РАЗВИТИЯ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ

А. В. Колчин, Б. Ф. Безродный

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Россия

В настоящей статье предпринята попытка показать современное состояние исследований в области вероятностной комбинаторики, использующих так называемую обобщенную схему размещения. Приведен ряд предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин, которые могут найти применение при использовании обобщенной схемы размещения. Рассмотрен эффект перехода распределений сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения, с одной решетки на другую. Даны несколько примеров сведения комбинаторных задач к обобщенным схемам размещения частиц по ячейкам.

Ключевые слова: вероятностный метод; обобщенная схема размещения; предельные теоремы теории вероятностей.

A. V. Kolchin, B. F. Bezrodnyi. ON SOME ASPECTS OF DEVELOPMENT OF THE GENERALISED ALLOCATION SCHEME

In this paper we make an attempt to portray the current situation in the probabilistic combinatorics field where so-called generalised allocation scheme has been utilised. We offer a series of limit theorems for sums of independent identically distributed non-negative integer-valued random variables which are applicable when using generalised allocation schemes. We look at the phenomenon of the transition of the distribution of sums of independent identically distributed integer-valued random variables from one lattice to another in the context of the generalised allocation scheme, and give several examples on how to reduce a combinatorial problem to some kind of a generalised scheme of allocating particles to cells.

Keywords: probabilistic method; generalised allocation scheme; limit theorems of probability theory.

*Статья посвящается памяти академика
Академии криптографии Российской Федерации
Валентина Федоровича Колчина*

Вероятностный метод

Комбинаторика сыграла важную роль в начале развития теории вероятностей, и эти два раздела математики продолжают развиваться в тесном взаимодействии. В настоящее время теория вероятностей, предлагая новые подходы к решению задач дискретной математики, как бы отдает долги комбинаторике. Среди этих новых подходов отметим хорошо развитые в теории вероятностей методы асимптотического анализа, которые успешно используются при решении сложных комбинаторных задач.

Комбинаторные задачи и методы занимают значительное место в исследованиях по теории вероятностей. Среди многочисленных работ в этой области можно выделить несколько направлений: комбинаторные задачи в теории случайных процессов, задачи, связанные со случайными отображениями и случайными графами, задачи размещения частиц по ячейкам.

Для решения широкого круга подобных комбинаторных задач весьма плодотворным оказывается *вероятностный подход* [1, 3, 13, 19]. Если распределение вероятностей задано на множестве рассматриваемых комбинаторных структур, то числовые характеристики этих структур можно рассматривать как случайные величины и анализировать их вероятностными методами. При таком вероятностном подходе мы автоматически ограничиваемся рассмотрением типичных структур, которые составляют основную массу рассматриваемого множества, и исключаем из рассмотрения небольшую долю структур с нестандартными свойствами.

Вероятностный подход, получивший в настоящее время широкое распространение в комбинаторике, впервые был использован в почти современном виде В. Л. Гончаровым, применившим его к изучению множества S_n всех подстановок степени n и серий в случайных $(0, 1)$-последовательностях. Среди тех, чьими трудами развивалась вероятностная комбинаторика в России, были С. Н. Бернштейн, Н. В. Смирнов, В. Е. Степанов, ее успехи тесно связаны с блестящей российской вероятностной школой, школой А. А. Маркова, П. Л. Чебышёва, А. М. Ляпунова, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова.

При анализе случайных структур успешно применялись разнообразные вероятностные методы, в том числе метод моментов, пуассоновская и гауссовская аппроксимации, производящие функции и их анализ методом перевала, теоремы тауберова типа, теория мартингалов.

Обобщенная схема размещения и ее развитие

В вероятностной комбинаторике находит успешное применение *обобщенная схема размещения*, позволяющая сводить ряд комбинаторных задач к задачам о суммах независимых случайных величин, классическому объекту изучения в теории вероятностей. Обобщенная схема размещения была введена в [9] и заняла заметное место в асимптотических исследованиях в вероятностной комбинаторике. Свое название эта схема получила в связи с тем, что она является обобщением классической задачи о случайном размещении частиц по ячейкам [13]. Обобщенная схема размещения оказалась удобным средством исследования таких интереснейших процессов, как эволюция случайных графов, случайных лесов, систем линейных уравнений со случайными коэффициентами, случайных подстановок, в том числе в связи с построением и анализом вычислительных алгоритмов [6].

В настоящее время активные исследования асимптотического поведения различных комбинаторных объектов с использованием обобщенной схемы размещения ведутся, в частности, Ю. Л. Павловым в Карельском научном центре РАН [15], А. Н. Чупруновым в Казанском федеральном университете [16–18] и И. Фазекашем в Дебреценском университете [20–22].

Напомним, что в обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение *независимых* случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — неотрицательные целочисленные случайные величины, рассматриваемые как некоторые числовые характеристики комбинаторной структуры из N компонент, состоящей из n элементов, такие, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$. Если существуют независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ такие, что совместное распределение $\eta_1, \dots, \eta_N$ допускает представление

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (1)$$

где $k_1, \dots, k_N$ — произвольные целые числа, то говорят, что $\eta_1, \dots, \eta_N$ образуют обобщенную схему размещения с параметрами n и N и независимыми случайными величинами $\xi_1, \dots, \xi_N$. Случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ интерпретируются как заполнения ячеек.

В [20] для обобщенной схемы размещения доказаны частичные аналоги закона повторного логарифма и усиленного закона больших чисел Ю. В. Прохорова.

В [18] рассматривается следующее расширение обобщенной схемы размещения. Пусть K — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \dots, \xi_N$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{M}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^{N} \xi_i = K\right\}. \quad (2)$$

Здесь предполагается, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \cdots + \xi_N = K(\omega)\} > 0$$

почти наверное.

В случае, когда случайная величина K постоянна, $K = n$, получаем обобщенную схему размещения. Поэтому схему (2) можно интерпретировать как обобщенную схему размещения *случайного числа* K частиц по N ячейкам. Ее частными случаями являются обобщенная схема размещения с неполным комплектом частиц и другие аналоги обобщенной схемы размещения.

В [21] исследуются расширения обобщенных схем размещения, где

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^{N} \xi_i \geqslant n\right\} \quad (3)$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^{N} \xi_i \leqslant n\right\}, \quad (4)$$

иными словами, в N ячеек размещаются по крайней мере n частиц в схеме (3) и не более n частиц в схеме (4). Для этих схем получены усиленный закон больших чисел, нормальная и пуассоновская локальные предельные теоремы.

В [22] предлагается расширение обобщенной схемы размещения, где ячейки рассматриваются из некоторого отмеченного множества, включающее в себя как частные случаи «традиционную» обобщенную схему размещения и ее варианты, изученные в [16–18, 21], и начаты его исследования; доказан ряд предельных теорем.

В силу независимости случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ изучение многих характеристик обобщенной схемы размещения сводится к задачам о суммах независимых случайных величин. В случае, когда распределения слагаемых одинаковы и фиксированы (не зависят от числа слагаемых), можно пользоваться хорошо развитой теорией суммирования независимых случайных величин. Однако во многих применениях обобщенной схемы возникает необходимость в *локальных предельных теоремах в схеме серий*. В таких случаях до недавнего времени не было исчерпывающего ответа на вопрос, справедлива ли локальная предельная теорема даже в случае сходимости к нормальному закону; для каждого конкретного случая приходилось проводить отдельное доказательство либо следуя доказательству локальной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко (см., например, [2, 15]), либо проверяя условия общих локальных теорем (см., например, [14]).

Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots$, таких, что радиус сходимости R ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

положителен. Введем целочисленную случайную величину $\xi = \xi(\theta)$, распределенную по следующему закону (см., например, [4, 11]):

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k!\, B(\theta)}. \quad (5)$$

Положим

$$m = m(\theta) = \mathbf{M}\xi, \qquad \sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi,$$
$$\beta = \beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi - m|^3.$$

Заметим, что при $|\theta| < R$ случайная величина ξ имеет все моменты.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением (5) случайной величины ξ.

Распространенным случаем обобщенной схемы размещения является схема, тесно связанная с так называемой *канонической*, в которой выполнено либо

условие A_r**,** где $r \geqslant 2$: $b_0 > 0$, и $b_1 = \cdots = b_{r-1} = 0$, но $b_r > 0$, причем максимальный шаг распределения (5) равен 1; либо

условие A_1: $b_0, b_1 > 0$;

которая, очевидно, является частным случаем общей схемы. В *классической* схеме равновероятного размещения частиц по ячейкам выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_N!\, N^n},$$

и она также является частным случаем общей схемы (1), (5).

Если соотношение (1) справедливо при некотором θ, то оно остается верным при всех положительных θ из области сходимости ряда $B(\theta)$ (см., например, [11]). Для изучения характеристик обобщенной схемы размещения, как правило, требуются локальные предельные теоремы при всех значениях параметра θ. Основные случаи возможных областей изменения N и θ были рассмотрены в [4, 5, 7, 8].

Нашей целью является получение предельных теорем для сумм вида

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$$

при $N \to \infty$ и различных вариантах поведения параметра $\theta = \theta(N)$. Положим

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{S_N = n\}.$$

Пусть $F_N(x)$ — функция распределения суммы центрированных и нормированных случайных величин

$$S_N^* = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{N}}.$$

Интегральные предельные теоремы

В *простейшем случае* [4, 5] значения θ отделены от 0 и не приближаются к значению радиуса сходимости $B(\theta)$.

Оказывается, что в доказательстве интегральной предельной теоремы о слабой сходимости распределений сумм S_N^* к стандартному нормальному закону не требуется выполнения каких-либо арифметических ограничений на последовательность $b_0, b_1, \ldots$

Теорема 1. *Пусть $N \to \infty$ и существуют постоянные θ_0, θ_1, $0 < \theta_0 < \theta_1 < R$, такие, что параметр $\theta = \theta(N) \in [\theta_0, \theta_1]$. Тогда распределение S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону, причем справедлива оценка*

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leqslant c\frac{\beta^*}{(\sigma^*)^3\sqrt{N}},$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона и

$$\sigma^* = \min_{\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1} \sigma(\theta) > 0,$$
$$\beta^* = \max_{\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1} \beta(\theta),$$

$\beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi_1 - m|^3$, а c — постоянная из неравенства Берри–Эссеена.

При $N \to \infty$ и $\theta \to 0$ происходит *переход распределения S_N с одной решетки на другую* [7, 8]. Этот эффект был впервые обнаружен в классической схеме размещения частиц по ячейкам в [12] для распределения числа ячеек, содержащих ровно одну частицу.

На решетке целых чисел имеет место сходимость к нормальному распределению.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие A_r, $r \geqslant 1$. Пусть $N \to \infty$ и $\theta = \theta(N) \to 0$ так, что $\theta^r N \to \infty$. Тогда распределение суммы S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону.*

На решетке целых неотрицательных чисел с шагом r имеет место сходимость к распределению Пуассона.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие A_r, $r \geqslant 1$. Пусть $N \to \infty$ и $\theta = \theta(N) \to 0$ так, что $b_r N\theta^r/(r!\, b_0) \to \lambda$, где $\lambda > 0$ — некоторая постоянная. Тогда распределение суммы S_N/r слабо сходится к распределению Пуассона с параметром λ.*

Согласно этой теореме, предельное распределение суммы S_N сосредоточено на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r.

Локальные предельные теоремы

Как уже отмечалось, при применении обобщенной схемы размещения особое значение имеют локальные предельные теоремы.

Напомним, что в *простейшем случае* [4, 5] значения θ отделены от 0 и не приближаются к значению радиуса сходимости $B(\theta)$, тогда справедлива следующая локальная предельная теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие A_r, $r \geqslant 1$, и пусть $N \to \infty$ и существуют положительные постоянные θ_0, θ_1, такие, что параметр $\theta = \theta(N)$ меняется так, что $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 < R$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных n*

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \to 0,$$

где $z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Как было отмечено выше, при $N \to \infty$ и $\theta \to 0$ имеет место *переход распределения S_N с одной решетки на другую*. Именно, на решетке целых чисел имеет место сходимость к нормальному распределению, в то время как на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r имеет место сходимость к распределению Пуассона.

Если $N\theta^s \to \infty$ при $N \to \infty$, то для S_N справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению на решетке целых чисел.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие A_1 и $N \to \infty$, $\theta = \theta(N) \to 0$, $\theta N \to \infty$. Тогда*

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \to 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n, где

$$z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Если же $N\theta^r \to \lambda r!\, b_0/b_r$, $\lambda > 0$, то для S_N справедлива теорема о сходимости к распределению Пуассона с параметром λ на решетке целых неотрицательных чисел с шагом r.

Пусть выполнено условие A_r, $r \geqslant 2$, и пусть s — первое большее r число, для которого $b_s > 0$.

С привлечением производящих и характеристических функций случайной величины S_N в [8] доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $N \to \infty$ и $\theta = \theta(N) \to 0$ так, что $N\theta^s \to \infty$ и максимальный шаг решетки, на которой лежат 0, r, s, равен единице. Тогда*

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \to 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n, где

$$z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Таким образом, при промежуточных порядках стремления параметра θ к нулю происходит переход распределения S_N с решетки целых неотрицательных чисел с шагом r на решетку всех целых неотрицательных чисел.

В [7] для описания деталей перехода был применен прямой анализ распределения S_N, основанный на ясных интуитивных соображениях.

Теорема 7. *Пусть $N \to \infty$ и $\theta = \theta(N) \to 0$ так, что $Nb_s\theta^s/(s!\, b_0) \to \lambda$, где $\lambda > 0$ — некоторая постоянная, и максимальный шаг решетки, на которой лежат 0, r, s, равен единице. Тогда*

$$P_N(n) = \sum_{k \in L_t} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi N b_r \theta^r/(b_0 r!)}} \times \exp\left\{\frac{(n - Nb_r\theta^r/(b_0 r!))^2}{2Nb_r\theta^r/(b_0 r!)}\right\}(1 + o(1))$$

равномерно относительно $n \in L_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, таких, что величина $(n - Nb_r\theta^r/(b_0 r!))/\sqrt{2Nb_r\theta^r/(b_0 r!)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Здесь

$$\begin{aligned} L_0 &= \{0, r, 2r, \ldots\}, \\ L_1 &= \{1, r+1, 2r+1, \ldots\}, \\ L_2 &= \{2, r+2, 2r+2, \ldots\}, \ldots, \\ L_{r-1} &= \{r-1, 2r-1, 3r-1, \ldots\}; \end{aligned}$$

ясно, что

$$\mathbf{N} = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_{r-1}.$$

В случае, когда значения параметра θ приближаются к границе сходимости ряда $B(\theta)$, как можно показать на примерах, могут появляться и другие предельные распределения.

Некоторые из доказанных в [4] теорем, по-видимому, могут быть получены путем проверки приведенных в [14] общих условий справедливости локальных теорем о сходимости к нормальному распределению, однако мы считаем, что наличие простых прямых доказательств является полезным для дальнейших исследований в этой области.

Некоторые приложения

В иллюстративных целях приведем несколько элементарных примеров сведения некоторых комбинаторных задач к обобщенным схемам размещения частиц по ячейкам.

Случайные отображения

В случайном отображении $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{smallmatrix}\right)$, принимающем с равными вероятностями значения из множества Σ_n, случайные величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ независимы, и

$$\mathbf{P}\{\sigma_1 = s_1, \ldots, \sigma_n = s_n\} = n^{-n} \tag{6}$$

для положительных целых $s_1, \ldots, s_n$, не превосходящих n.

Обозначим через η_r кратность вершины r в случайном отображении σ, $r = 1, \ldots, n$. Величина η_r равна числу случайных величин $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, принявших значение r, так что для неотрицательных целых $k_1, \ldots, k_n$, $k_1 + \cdots + k_n = n$, вероятность $\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_n = k_n\}$ есть сумма вероятностей вида (6), где среди $s_1, \ldots, s_n$ найдется в точности k_r значений, равных r, $r = 1, \ldots, n$. Число слагаемых в этой сумме, очевидно, есть $n!/(k_1! \cdots k_n!)$, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_n = k_n\} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!\, n^n}. \tag{7}$$

Таким образом, совместное распределение кратностей вершин $\eta_1, \dots, \eta_n$ в случайном отображении является полиномиальным. Рассматривая вершины как ячейки, а дуги, входящие в эти вершины, как частицы, приходим к классической схеме размещения n частиц в n ячеек с полиномиальным распределением количеств $\eta_1, \dots, \eta_n$ частиц в ячейках. Случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_n$ удовлетворяют соотношению

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = n\},$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона.

Итак, число вершин $\mu_r(n)$ в случайном отображении, имеющих кратность r, совпадает с числом ячеек, содержащих в точности r частиц в классической схеме размещения n частиц по n ячейкам.

Выборка без возвращения

Пусть из урны, содержащей m шаров каждого из N цветов, случайным образом без возвращения извлекаются n шаров. Обозначим через η_i число извлеченных шаров i-го цвета, $i = 1, \dots, N$. Легко видеть, что для неотрицательных целых $\eta_1, \dots, \eta_N$, таких, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \frac{\binom{m}{n_1} \cdots \binom{m}{n_N}}{\binom{mN}{n}}.$$

Если в обобщенной схеме размещения случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение, именно,

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},$$

где $k = 0, 1, \dots, m$, $0 < p < 1$, то

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = \frac{\binom{m}{n_1} \cdots \binom{m}{n_N}}{\binom{mN}{n}},$$

и распределение случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ совпадает с условным распределением независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ при условии, что $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$. Таким образом, величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ можно рассматривать как заполнения ячеек в обобщенной схеме размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ распределены по биномиальному закону с параметрами $Bi(m, p)$.

Разбиения числа на слагаемые

Рассмотрим все различные разбиения целого положительного числа n на N целочисленных слагаемых, не превосходящих некоторого $r \geqslant 0$. Число таких разбиений есть $\binom{n-(r-1)N-1}{N-1}$. На множестве этих разбиений зададим равномерное распределение, приписывая вероятность $\binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1}$ каждому разбиению $n = n_1 + \dots + n_N$, $n_1, \dots, n_N \geqslant r$. Тогда n можно представить в виде

$$n = \eta_1 + \dots + \eta_N,$$

где слагаемые $\eta_1, \dots, \eta_N$ есть случайные величины; если $n_1, \dots, n_N \geqslant r$, $n_1 + \dots + n_N = n$, то

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1}.$$

Для получения обобщенной схемы размещения, соответствующей этой комбинаторной задаче, достаточно взять геометрически распределенные случайные величины

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = p^{k-1}(1-p),$$

где $k = r, r+1, \dots$, $0 < p < 1$. Действительно, как легко видеть,

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = \binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1},$$

поскольку для геометрически распределенных слагаемых

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = \binom{n-(r-1)N-1}{N-1} p^{n-Nr}(1-p)^N.$$

Леса из корневых деревьев

Рассмотрим множество $\mathscr{W}_{n,N}$ всех лесов из N корневых деревьев; корни, и одновременно с ними сами деревья, занумеруем числами $1, \dots, N$, а оставшиеся n вершин занумеруем числами $1, \dots, n$. Число различных лесов в $\mathscr{W}_{n,N}$ равно $N(n+N)^{n-1}$. Число лесов, в которых k-е дерево содержит n_k некорневых вершин, $k = 1, \dots, N$, равно

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_N!}(n_1+1)^{n_1-1} \cdots (n_N+1)^{n_N-1},$$

где множитель $n!/(n_1! \cdots n_N!)$ — число разбиений n вершин на N упорядоченных групп, а $(n_k+1)^{n_k-1}$ есть число деревьев, которые могут быть собраны из k-й группы вершин в каждом разбиении.

Зададим на $\mathscr{W}_{n,N}$ равномерное распределение. Обозначим через η_k число некорневых вершин в k-м дереве в случайном лесе из $\mathscr{W}_{n,N}$, $k = 1, \ldots, N$. Для случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \ldots, \eta_N = n_N\} \\ = \frac{n!\,(n_1+1)^{n_1} \cdots (n_N+1)^{n_N}}{N(n+N)^{n-1}(n_1+1)! \cdots (n_N+1)!}, \quad (8)$$

где $n_1, \ldots, n_N$ — неотрицательные целые числа, такие, что $n_1 + \cdots + n_N = n$.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} x^k e^{-\theta(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad (9)$$

где параметр x лежит в интервале $0 < x \leqslant 1/e$, а функция $\theta(x)$ определена следующим образом:

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} x^k.$$

Из (9) нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \cdots + \xi_N = n\} \\ = \sum_{n_1+\cdots+n_N=n} \frac{(n_1+1)^{n_1} \cdots (n_N+1)^{n_N}}{(n_1+1)! \cdots (n_N+1)!} x^n e^{-N\theta(x)} \\ = \frac{N(n+N)^{n-1}}{n!} x^n e^{-N\theta(x)},$$

так что для любого x, $0 < x \leqslant 1/e$, и для любых неотрицательных целых $n_1, \ldots, n_N$, таких, что $n_1 + \cdots + n_N = n$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \ldots \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \cdots + \xi_N = n\} \\ = \frac{n!\,(n_1+1)^{n_1} \cdots (n_N+1)^{n_N}}{N(n+N)^{n-1}(n_1+1)! \cdots (n_N+1)!}. \quad (10)$$

Правые части (8) и (10) совпадают, и совместное распределение $\eta_1, \ldots, \eta_N$ совпадает с таковым у $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при условии $\xi_1 + \cdots + \xi_N = n$. Итак, для изучения размеров деревьев в случайном лесе можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам со случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с распределением, задаваемым (9).

Литература

1. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2007. 320 с.

2. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 264 с.

3. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8, № 1. С. 3–48.

4. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 4. С. 148–157. doi: 10.4213/dm224

5. *Колчин А. В.* Предельные теоремы в обобщенной схеме размещения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, № 3. С. 432–435.

6. *Колчин А. В., Безродный Б. Ф., Леева М. А.* Обобщенная схема размещения: некоторые аспекты развития // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, № 2. С. 97–102.

7. *Колчин А. В., Колчин В. Ф.* Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 15–21. doi: 10.4213/dm962

8. *Колчин А. В., Колчин В. Ф.* О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 113–127. doi: 10.4213/dm76

9. *Колчин В. Ф.* Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовский матем. сборник. 1968. Т. 8, № 1. С. 111–126.

10. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

11. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

12. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 222 с.

13. *Колчин В. Ф., Чистяков В. П.* Комбинаторные задачи теории вероятностей // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика. 1974. Т. 11. С. 5–45.

14. *Мухин А. Б.* Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 4. С. 660–674.

15. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 258 с.

16. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

17. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дис-

кретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

18. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Об обобщенной схеме размещения со случайным числом частиц // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 2. С. 149–153. doi: 10.4213/dm1190

19. *Эрдёш П., Спенсер Дж.* Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976. 137 с.

20. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme // Publ. Math. Debrecen. 2010. Vol. 76, no. 3. P. 271–286.

21. *Fazekas I., Porvázsnyik B.* A generalized allocation scheme // Annales Mathematicae & Informaticae. 2012. Vol. 39. P. 57–70.

22. *Fazekas I., Porvázsnyik B.* Some limit theorems for generalized allocation schemes // Miskolc Math. Notes. 2015. Vol. 16, no. 2. P. 817–832. doi: 10.18514/MMN.2015.1461

Поступила в редакцию 09.04.2019

References

1. *Alon N., Spencer J. H.* The Probabilistic Method. New York: Wiley-Interscience, 2000. 305 p. doi: 10.1002/9780470277331

2. *Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N.* Limit distributions of sums of independent random variables. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1954. 264+9 p.

3. *Goncharov V. L.* On the field of combinatory analysis. *American Math. Soc. Transl.* 1962. Vol. 19. P. 1–46. doi: 10.1090/trans2/019

4. *Kolchin A. V.* On limit theorems for the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2003. Vol. 13, iss. 6. P. 627–636. doi: 10.1515/156939203322733336

5. *Kolchin A. V.* Predel'nye teoremy v obobshchennoi skheme razmeshcheniya [Limit theorems in the generalised allocation scheme]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki* [Review Industrial Appl. Math.]. 2009. Vol. 16, no. 3. P. 432–435.

6. *Kolchin A. V., Bezrodnyi B. F., Leeva M. A.* Some aspects of evolution of the generalised allocation scheme. *Review Industrial Appl. Math.* 2018. Vol. 25, no. 1. P. 45–47.

7. *Kolchin A. V., Kolchin V. F.* On the transition of distributions of sums of random variables related to the generalised allocation scheme from one lattice to another. *Discrete Math. Appl.* 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 455–461. doi: 10.1515/dma.2007.036

8. *Kolchin A. V., Kolchin V. F.* On transition of distributions of sums of independent identically distributed random variables from one lattice to another in the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2006. Vol. 16, iss. 6. P. 527–540. doi: 10.1515/156939206779218023

9. *Kolchin V. F.* A class of limit theorems for conditional distributions. *Liet. Mat. Rinkinys* 1968. Vol. 8. P. 53–63.

10. *Kolchin V. F.* Random Graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

11. *Kolchin V. F.* Random Mappings. New York: Optimization Software, 1986. 216 p.

12. *Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P.* Random Allocations. New York: Winston, 1978. 262 p. doi: 10.1137/1022018

13. *Kolchin V. F., Chistyakov V. P.* Combinatorial problems of probability theory. *J. Soviet Math.* 1975. Vol. 4. P. 217–243. doi: 10.1007/BF01097183

14. *Mukhin A. B.* Local limit theorems for lattice random variables. *Theory Probab. Appl.* 1991. Vol. 36, no. 4. P. 698–713. doi: 10.1137/1136086

15. *Pavlov Yu. L.* Random Forests. Utrecht: VSP, 2000. 258 p.

16. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

17. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

18. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* On the generalised allocation scheme with a random number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 2. P. 235–240. doi: 10.1515/dma-2012-016

19. *Erdős P., Spencer J. H.* Probabilistic Methods in Combinatorics. New York: Academic Press, 1974. 106 p.

20. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme. *Publ. Math. Debrecen.* 2010. Vol. 76. P. 271–286.

21. *Fazekas I., Porvázsnyik B.* A generalized allocation scheme. *Annales Mathematicae & Informaticae.* 2012. Vol. 39. P. 57–70.

22. *Fazekas I., Porvázsnyik B.* Some limit theorems for generalized allocation schemes. *Miskolc Math. Notes.* 2015. Vol. 16, no. 2. P. 817–832. doi: 10.18514/MMN.2015.1461

Received April 09, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Колчин Андрей Валентинович
доцент кафедры «Прикладная математика», к. ф.-м. н.
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
Ленинградский пр., 64, Москва, Россия, 125319
эл. почта: akolchin@madi.ru
тел.: (499) 1514009

Безродный Борис Федорович
зав. кафедрой «Прикладная математика», д. т. н., проф.
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
Ленинградский пр., 64, Москва, Россия, 125319
эл. почта: math@madi.ru
тел.: (499) 1514009

CONTRIBUTORS:

Kolchin, Andrei
Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)
64 Leningradsky Av., 125319 Moscow, Russia
e-mail: akolchin@madi.ru
tel.: (499) 1514009

Bezrodnyi, Boris
Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)
64 Leningradsky Av., 125319 Moscow, Russia
e-mail: math@madi.ru
tel.: (499) 1514009