Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2019. С. 5–14
DOI: 10.17076/mat1034

УДК 515.12

О ПОРЯДКЕ МЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ И ЕМКОСТНЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

А. В. Иванов[1], **О. В. Фомкина**[2]

[1] *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*
[2] *Петрозаводский государственный университет, Россия*

Показано, что в любом метрическом компакте X существует счетное замкнутое подмножество F, верхняя емкостная размерность $\overline{\dim}_B F$ которого равна любому наперед заданному неотрицательному числу, не превосходящему верхней емкостной размерности X. Аналогичное утверждение доказано для верхнего порядка метрической аппроксимации $\overline{ord}(\xi)$ максимальных сцепленных систем. А именно, для любого числа a, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant a \leqslant \overline{\dim}_B X$, существует $\xi \in \lambda(X)$, для которой $\overline{ord}(\xi) = a$ и $supp(\xi) = X$.

Ключевые слова: емкостная размерность; порядок метрической аппроксимации; суперрасширение.

A. V. Ivanov, O. V. Fomkina. ON THE ORDER OF METRIC APPROXIMATION OF MAXIMAL LINKED SYSTEMS AND CAPACITARIAN DIMENSIONS

It is shown that in any metric compact space X there exists a countable closed subset F whose upper capacitarian dimension $\overline{\dim}_B F$ is equal to any preassigned non-negative number not exceeding the upper capacitarian dimension of X. A similar assertion is proved for the upper order of the metric approximation $\overline{ord}(\xi)$ of maximal linked systems. Namely, for any number a satisfying the inequalities $0 \leqslant a \leqslant \overline{\dim}_B X$ there exists $\xi \in \lambda(X)$ for which $\overline{ord}(\xi) = a$ and $supp(\xi) = X$.

Keywords: capacitarian dimension; order of metric approximation; superextension.

Введение

Работа посвящена исследованию порядка метрической аппроксимации точек в пространствах вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ – метризуемый полунормальный функтор бесконечной степени, действующий в категории компактов. Понятие порядка метрической аппроксимации определено в [6]. Для каждого метрического компакта (X, ρ) в пространстве $(\mathcal{F}(X), \rho_{\mathcal{F}})$ содержится растущая последовательность замкнутых подпространств $\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : supp(\xi) \leqslant n\}$, объединение которых всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$. Точки $\xi \in \mathcal{F}_n(X)$ мы считаем «простыми» элементами $\mathcal{F}(X)$, причем индекс n характеризует их «степень сложности». Для $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и $\varepsilon > 0$ число $N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leqslant \varepsilon\}$ есть наименьшая степень сложности ε-приближения ξ.

Если точка ξ не является простой, то число $N(\xi, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Асимптотику этого возрастания характеризуют верхний и нижний порядки метрической аппроксимации $\overline{ord}(\xi)$ и $\underline{ord}(\xi)$ точки ξ (подробные определения приведены ниже). Если в качестве $\mathcal{F}$ взять функтор экспоненты (экспонента $\exp(X)$ – это пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X с метрикой Хаусдорфа), то для всякого $A \in \exp(X)$ верхний и нижний порядки метрической аппроксимации совпадают соответственно с верхней и нижней емкостными размерностями $\overline{\dim}_B A$ и $\underline{\dim}_B A$ множества A.

Основное внимание в работе уделено исследованию порядка метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем (м.с.с.) – точек пространства $\lambda(X)$, где λ – функтор суперрасширения. Доказано (предложение 2), что порядок метрической аппроксимации м.с.с. $\xi \in \lambda(X)$ не превосходит соответствующей емкостной размерности носителя ξ. При этом справедлива теорема 2, согласно которой из наличия в компакте X собственного замкнутого подмножества F заданной емкостной размерности следует существование м.с.с. $\xi \in \lambda(X)$ с тем же значением соответствующего порядка метрической аппроксимации и носителем ξ, равным X. Этот результат мотивирует формулировку и доказательство теоремы 1 о промежуточных значениях верхней емкостной размерности. А именно, доказано, что в любом бесконечном метрическом компакте (X, ρ) для любого неотрицательного числа $a < \overline{\dim}_B X$ существует счетное замкнутое подмножество $F \subset X$ размерности $\overline{\dim}_B F = a$. Из теорем 1 и 2 вытекает аналогичное утверждение о промежуточных значениях верхнего порядка метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем с фиксированным носителем, равным X (теорема 3). При доказательстве указанных результатов существенную роль играет конструкция Е. В. Кашубы [1], позволяющая строить максимальные сцепленные системы с заданным носителем, и операция миксера μ [7], которая тройку систем $\xi_i \in \lambda(X)$, $i = 1, 2, 3$, «смешивает» в м.с.с. $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В частности, для миксера μ установлено неравенство: $\overline{ord}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \leqslant \max\limits_i \overline{ord}(\xi_i)$.

Предварительные сведения

Суперрасширение, о котором пойдет речь ниже, является функториальной конструкцией общей топологии. Напомним (см. [4, 7.5.10]), что ковариантный функтор $\mathcal{F}$, действующий из категории *Comp* компактных хаусдорфовых пространств (компактов) и непрерывных отображений в ту же категорию, называется *полунормальным*, если $\mathcal{F}$

1) сохраняет точку и пустое множество;
2) сохраняет мономорфизмы;
3) сохраняет пересечения;
4) непрерывен, то есть перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

В дальнейшем через $\mathcal{F}$ мы будем обозначать полунормальный функтор и при этом считать дополнительно, что $\mathcal{F}$ сохраняет вес всякого бесконечного компакта. Если A – замкнутое подмножество компакта X, то $\mathcal{F}(A)$ естественно отождествляется с подпространством пространства $\mathcal{F}(X)$. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$. Для каждой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определен ее *носитель* $supp(\xi)$ как наименьшее замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Для $n \in N$ определено замкнутое подпространство

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |supp(\xi)| \leqslant n\} \subset \mathcal{F}(X).$$

При этом $\mathcal{F}_1(X)$ естественно гомеоморфно X (каждая точка $x \in X$ отождествляется с единственной точкой пространства $\mathcal{F}(\{x\})$).Таким образом, можно считать, что $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$.

Функтор $\mathcal{F}$ имеет *бесконечную степень*, если для любого бесконечного компакта X и любого $n \in N$ $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$. В дальнейшем будем считать, что степень $\mathcal{F}$ бесконечна. Для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X объединение $\bigcup_{n \in N} \mathcal{F}_n(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$. Доказательство всех перечисленных фактов можно найти в [4] и [5].

Функтор $\mathcal{F}$ называется *метризуемым* (по В. В. Федорчуку [3]), если для всякой метрики ρ на метризуемом компакте X может быть указана совместимая с топологией метрика $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ так, что выполнены следующие условия:

1) для любого изометрического вложения $i : (X_1, \rho_1) \to (X_2, \rho_2)$ отображение $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$ также является изометрическим вложением;
2) $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$;
3) $diam(\mathcal{F}(X)) = diam(X)$.

При этом семейство метрик $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$ по определению задает метризацию функтора $\mathcal{F}$. Всякий метризуемый функтор мы будем считать наделенным конкретной метризацией.

Итак, если $\mathcal{F}$ – метризуемый функтор и (X, ρ) – метрический компакт, то $(\mathcal{F}(X), \rho_{\mathcal{F}})$ – также метрический компакт, и в $\mathcal{F}(X)$ имеется возрастающая последовательность замкнутых подмножеств

$$X = \mathcal{F}_1(X) \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n(X) \subset \ldots \mathcal{F}(X),$$

объединение которых всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$. При этом точки $\xi \in \cup_{n\in N}\mathcal{F}_n(X)$ в определенном смысле «просты», ибо имеют конечный носитель (они «сгенерированы» функтором $\mathcal{F}$ на конечном множестве), причем их «степень сложности» растет с ростом n. Любая точка $\eta \in \mathcal{F}(X)$ является пределом последовательности «простых» точек. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-приближение точки η «простой» точкой, причем наименьшая «степень сложности» такой простой точки есть число

$$N(\eta,\varepsilon,\mathcal{F}(X)) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\eta,\mathcal{F}_n(X)) \leqslant \varepsilon\}.$$

(В дальнейшем, если из контекста ясно, о каком функторе и компакте идет речь, мы будем использовать сокращенную запись $N(\eta,\varepsilon)$.) Если $\eta \notin \cup_{n\in N}\mathcal{F}_n(X)$, то $N(\eta,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Асимптотику этого возрастания характеризуют верхний и нижний порядки метрической аппроксимации $\overline{ord}(\eta)$ и $\underline{ord}(\eta)$ точки η (см. [6]), которые определяются по формулам:

$$\overline{ord}(\eta) = \inf\{\alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha}N(\eta,\varepsilon) = 0\}$$
$$= \sup\{\alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha}N(\eta,\varepsilon) = \infty\},$$
$$\underline{ord}(\eta) = \inf\{\alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha}N(\eta,\varepsilon) = 0\}$$
$$= \sup\{\alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha}N(\eta,\varepsilon) = \infty\}.$$

Очевидно, что $0 \leqslant \underline{ord}(\eta) \leqslant \overline{ord}(\eta) \leqslant \infty$. Имеют место следующие равенства (см. [6]):

$$\overline{ord}(\eta) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(N(\eta,\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)},$$

$$\underline{ord}(\eta) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(N(\eta,\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Справедливо также (см. [6])

Предложение 1. *Если последовательность $\{\varepsilon_n > 0 :\ n \in N\}$ монотонно сходится к нулю и существует $c > 0$ такое, что $\varepsilon_{n+1} \geqslant c\ \varepsilon_n$ для всех $n \in N$, то*

$$\overline{ord}(\eta) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln(N(\eta,\varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)},$$

$$\underline{ord}(\eta) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln(N(\eta,\varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)}.$$

В частности, для $\varepsilon_n = 1/n$ получаем

$$\overline{ord}(\eta) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln(N(\eta,1/n))}{\ln n},$$

$$\underline{ord}(\eta) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln(N(\eta,1/n))}{\ln n}.$$

В некоторых случаях при рассмотрении порядка метрической аппроксимации (верхнего или нижнего) точки η бывает необходимо указывать объемлющее пространство, относительно которого этот порядок определяется. Тода мы будем использовать расширенное обозначение: $\overline{ord}(\eta,\mathcal{F}(X))$. Если A – замкнутое подмножество X, $\eta \in \mathcal{F}(A)$ и $\varepsilon > 0$, то

$$N(\eta,\varepsilon,\mathcal{F}(A)) \geqslant N(\eta,\varepsilon,\mathcal{F}(X)). \qquad (1.1)$$

Поэтому

$$\overline{ord}(\eta,\mathcal{F}(A)) \geqslant \overline{ord}(\eta,\mathcal{F}(X)),$$
$$\underline{ord}(\eta,\mathcal{F}(A)) \geqslant \underline{ord}(\eta,\mathcal{F}(X)).$$

Определение 1. *Будем говорить, что порядок метрической аппроксимации для функтора $\mathcal{F}$ сохраняется при переходе к подпространству, если для любого компакта X, любого его замкнутого подмножества A и любой точки $\eta \in \mathcal{F}(A)$ выполняются равенства:*

$$\overline{ord}(\eta,\mathcal{F}(A)) = \overline{ord}(\eta,\mathcal{F}(X)),$$
$$\underline{ord}(\eta,\mathcal{F}(A)) = \underline{ord}(\eta,\mathcal{F}(X)).$$

Экспонента. Примером метризуемого функтора является функтор экспоненты exp. Пусть (X,ρ) – метрический компакт. Экспонентой $\exp(X)$ называется множество непустых замкнутых подмножеств X, наделенное топологией Виеториса, с которой совместима метрика Хаусдорфа ρ_H. Расстояние ρ_H между $F, G \in \exp(X)$ определяется по формуле:

$$\rho_H(F,G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G,\varepsilon),\ G \subset B(F,\varepsilon)\}.$$

(Здесь и ниже $B(F,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$ и $B(y,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,y) \leqslant \varepsilon\}$ – замкнутые ε-шары множества F и точки y соответственно.) Носитель $supp(F)$ точки $F \in \exp(X)$ совпадает с F. Таким образом, $\exp_n(X) = \{F \in \exp(X) : |F| \leqslant n\}$. Для $F \in \exp(X)$ и $\varepsilon > 0$ число $N(F,\varepsilon)$ равно наименьшему количеству ε-шаров $B(x,\varepsilon)$, покрывающих множество F. Отсюда следует, что определенные выше порядки метрической аппроксимации для функтора exp совпадают с верхней и нижней емкостными размерностями $\overline{\dim}_B F$ и $\underline{\dim}_B F$ множества F (см. [2] и [6]). Эти размерности сохраняются при переходе к подпространству в смысле определения 1.

Известно, что емкостные размерности монотонны, то есть для любого замкнутого подмножества $A \subset X$

$$\overline{\dim}_B A \leqslant \overline{\dim}_B X,\ \underline{\dim}_B A \leqslant \underline{\dim}_B X.$$

Для верхней емкостной размерности справедлива конечная теорема суммы, а именно, для любого конечного семейства $F_1, \dots, F_n$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство (см. [2, гл. 2, теорема 6.2]):

$$\overline{\dim}_B(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \max_i \overline{\dim}_B F_i. \qquad (1.2)$$

Заметим, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение неверно (см. [2, гл. 2, пример 6.2]).

Суперрасширение. Приведем необходимые сведения, касающиеся функтора суперрасширения λ (см. [4, гл. 7.4]). Семейство ξ замкнутых подмножеств компакта X называется *сцепленной системой*, если любые два элемента ξ имеют непустое пересечение. Множество всех максимальных (по включению) сцепленных систем (м.с.с.) компакта X обозначается через $\lambda(X)$ и наделяется топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида $O(U) = \{\xi \in \lambda(X) : \exists F \in \xi : F \subset U\}$, где U – произвольное открытое подмножество X. Для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ и любой м.с.с. $\xi \in \lambda(A)$ существует единственная м.с.с. $\xi' \in \lambda(X)$, которая содержит ξ. Тем самым определено вложение $\lambda(A) \subset \lambda(X)$. Если F – минимальный по включению элемент м.с.с. ξ, то $F \subset supp(\xi)$. При этом носитель $supp(\xi)$ равен замыканию объединения всех минимальных по включению элементов ξ.

Если (X, ρ) – метрический компакт, то топология $\lambda(X)$ порождается метрикой ρ_λ, которая определяется по формуле:

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi \ B(F, \varepsilon) \in \eta\}.$$

Известно, что семейство метрик ρ_λ задает метризацию функтора λ (см. [3]). Таким образом, суперрасширение является метризуемым функтором и для него могут быть определены верхний и нижний порядки метрической аппроксимации всякой м.с.с. $\xi \in \lambda(X)$. Заметим, что $\lambda_1(X) = \lambda_2(X) = X$, поскольку не существует м.с.с. ξ с носителем ровно из двух точек. Однако при $n \geqslant 2$ все включения $\lambda_n(X) \subset \lambda_{n+1}(X)$ являются строгими.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два метода построения максимальных сцепленных систем.

1. М.с.с. $\xi(x, F)$. Пусть F – собственное замкнутое подмножество компакта X, $|F| > 1$ и $x \notin F$. Рассмотрим сцепленную систему

$$\xi' = \{\{x, y\} : y \in F\} \cup \{F\}.$$

Легко видеть, что ξ' содержится в единственной м.с.с. в X, которая по определению и есть м.с.с. $\xi(x, F)$. Все элементы системы ξ' являются минимальными по включению элементами $\xi(x, F)$ и

$$supp(\xi(x, F)) = F \cup \{x\}. \qquad (1.3)$$

2. М.с.с. $\xi(A, B)$. Пусть $A = \{x_n : n \in N\}$ и $B = \{y_n : n \in N\}$ – две непересекающиеся последовательности, состоящие из попарно различных точек компакта X, причем $[A] \cap [B] \neq \varnothing$ (здесь и ниже в подобном контексте квадратными скобками обозначается замыкание множества). Для $i \in N$ положим

$$A_i = \{x_1, \dots, x_i, y_i\}, \ B_i = \{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}\}$$

и, следуя Е. В. Кашубе [1], рассмотрим в X сцепленную систему

$$\xi' = \{A_i : i \in N\} \cup \{B_i : i \in N\}.$$

Система ξ' единственным образом дополняется до м.с.с. в X, которую обозначим через $\xi(A, B)$. При этом множества A_i и B_i, $i \in N$, являются минимальными по включению элементами $\xi(A, B)$. Следовательно,

$$[A] \cup [B] \subset supp(\xi(A, B)). \qquad (1.4)$$

Теорема о промежуточных значениях для верхней емкостной размерности

Утверждение 1. *Пусть (X, ρ) – метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда существует точка $x \in X$ такая, что $\overline{\dim}_B(B(x, \varepsilon)) = a$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любой точки $x \in X$ существует $\varepsilon(x) > 0$ такое, что $\overline{\dim}_B(B(x, \varepsilon(x))) < a$. Из покрытия $\{B(x, \varepsilon(x)) : x \in X\}$ компакта X выделим конечное подпокрытие $B(x_1, \varepsilon(x_1)), \dots, B(x_n, \varepsilon(x_n))$. В силу (1.2) получаем:

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B(\bigcup_{i=1}^{n}(B(x_i, \varepsilon(x_i))) = \max_i \overline{\dim}_B(B(x_i, \varepsilon(x_i))) < a.$$

□

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, A – замкнутое подмножество X и $\varepsilon > 0$. Множество A называется *ε-сетью* в X, если $B(A, \varepsilon) = X$. Множество A будем называть *ε-разреженным*, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in A$. В дальнейшем рассматриваются только конечные ε-сети.

Утверждение 2. *В любом метрическом компакте (X, ρ) для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-разреженная ε-сеть.*

Доказательство. Если ε-разреженное подмножество $A \subset X$ не является ε-сетью, то $X \setminus B(A,\varepsilon) \neq \varnothing$, и множество A можно пополнить любой точкой $p \in X \setminus B(A,\varepsilon)$ так, что $A \cup \{p\}$ останется ε-разреженным. Поскольку в компакте бесконечных ε-разреженных подмножеств не существует, отсюда следует, что любое ε-разреженное подмножество можно дополнить до ε-разреженной ε-сети. $\square$

Теорема 1. *Пусть (X,ρ) – метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда для любого числа b такого, что $0 \leqslant b < a$, существует замкнутое подмножество $F_b \subset X$, для которого $\overline{\dim}_B F_b = b$.*

Доказательство. При $b = 0$ утверждение теоремы тривиально, поэтому будем считать, что b удовлетворяет неравенствам: $0 < b < a$. Согласно утверждению 1 зафиксируем точку $x \in X$ так, что $\overline{\dim}_B(B(x,\varepsilon)) = a$ для любого $\varepsilon > 0$.

Искомое множество F_b будем строить с помощью рекурсивного процесса.

Шаг 1. Рассмотрим множество $B(x,1)$, и пусть k_1 – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x_1,1),1/2^{k_1}) > 2^{bk_1}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\overline{\dim}_B(B(x,1)) = a > b$ и в силу предложения 1 имеет место равенство

$$\overline{\dim}_B(B(x,1)) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N(B(x_1,1),1/2^k)}{\ln 2^k},$$

такое число k_1 существует.

Пусть A_1 – $(1/2^{k_1})$-разреженная $(1/2^{k_1})$-сеть в $B(x,1)$. Тогда в силу (2.2) $|A_1| > 2^{bk_1}$ и, следовательно, в A_1 можно выделить подмножество Z_1 мощности $|Z_1| = [2^{bk_1}]$ (здесь $[2^{bk_1}]$ – целая часть числа 2^{bk_1}) такое, что

$$Z_1 \cap B(x,1/2^{k_1+2}) = \varnothing. \tag{2.3}$$

Шаг 2. Пусть k_2 – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x,1/2^{k_1+3}),1/2^{k_2}) > 2^{bk_2}. \tag{2.4}$$

Поскольку $N(B(x,1/2^{k_1+3}),1/2^{k_1+3}) = 1$, в силу (2.4) $k_2 > k_1 + 3$. Пусть A_2 – $(1/2^{k_2})$-разреженная $(1/2^{k_2})$-сеть в $B(x,1/2^{k_1+3})$. Выделим в A_2 подмножество Z_2 такое, что $|Z_1 \cup Z_2| = [2^{bk_2}]$ и

$$Z_2 \cap B(x,1/2^{k_2+2}) = \varnothing. \tag{2.5}$$

Шаг n. Пусть k_n – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x,1/2^{k_{n-1}+3}),1/2^{k_n}) > 2^{bk_n}. \tag{2.6}$$

Как и выше, $k_n > k_{n-1}+3$. Пусть A_n – $(1/2^{k_n})$-разреженная $(1/2^{k_n})$-сеть в $B(x,1/2^{k_{n-1}+3})$, $Z_n \subset A_n$, $|\cup_{i=1}^n Z_i| = [2^{bk_n}]$ и

$$Z_n \cap B(x,1/2^{k_n+2}) = \varnothing. \tag{2.7}$$

В результате рекурсии мы получим последовательность попарно непересекающихся конечных множеств Z_n таких, что

1) $D_n = \cup_{i=1}^n Z_i$ является $(1/2^{k_n+1})$-разреженным;
2) $|D_n| = [2^{bk_n}]$;
3) $Z_n \subset B(x,1/2^{k_{n-1}+3})$;
4) $Z_n \cap B(x,1/2^{k_n+2}) = \varnothing$.

При этом $k_n > k_{n-1} + 3$.

Положим $F_b = \bigcup_{n=1}^\infty Z_n \cup \{x\}$. В силу 3) F_b – замкнутое подмножество X. Покажем, что $\overline{\dim}_B F_b = b$.

Пусть A – $(1/2^{k_n+3})$-сеть в F_b. В силу 1), 3) и 4) $D_n \subset A$. Следовательно,

$$N(F_b,1/2^{k_n+3},\exp(F_b)) \geqslant |D_n| = [2^{bk_n}].$$

Таким образом,

$$\overline{\dim}_B(F_b) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln N(F_b,1/2^{k_n+3},\exp(F_b))}{\ln 2^{k_n+3}}$$

$$\geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln[2^{bk_n}]}{\ln 2^{k_n+3}} = b. \tag{2.8}$$

Пусть натуральное число k удовлетворяет неравенствам: $k_{n-1} < k < k_n$. Тогда в силу (2.6)

$$N(B(x,1/2^{k_{n-1}+3}),1/2^k) \leqslant 2^{bk}. \tag{2.9}$$

В силу 3), 4) и (2.9) имеем:

$$N(F_b,1/2^k)$$

$$\leqslant N(D_{n-1},1/2^k) + N(B(x,1/2^{k_{n-1}+3}),1/2^k)$$

$$\leqslant |D_{n-1}| + 2^{bk} \leqslant [2^{bk_{n-1}}] + 2^{bk} < 2\cdot 2^{bk}.$$

При $k = k_n$ имеет место неравенство $N(F_b,1/2^k) \leqslant |D_n| + 1$. Следовательно, неравенство $N(F_b,1/2^k) \leqslant 2\cdot 2^{bk}$ выполнено для любого $k \geqslant k_1$. Таким образом, в силу предложения 1

$$\overline{\dim}_B(F_b) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N(F_b,1/2^k)}{\ln 2^k}$$

$$\leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(2\cdot 2^{bk})}{\ln 2^k} = b.$$

Откуда в силу (2.8) получаем, что $\overline{\dim}_B(F_b) = b$. $\square$

Замечание 1. Построенное замкнутое подмножество $F_b \subset X$ при $0 < b < a$ является счетным и имеет единственную предельную точку x.

Порядок метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем

Предложение 2. *Для любой м.с.с.* $\xi \in \lambda(X)$

$$\overline{ord}(\xi) \leqslant \overline{\dim}_B(supp(\xi)),$$
$$\underline{ord}(\xi) \leqslant \underline{\dim}_B(supp(\xi)).$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \lambda(X)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что

$$N(\xi, \varepsilon) \leqslant N(supp(\xi), \varepsilon). \tag{3.1}$$

Введем обозначения: $F = supp(\xi)$, $n = N(F, \varepsilon)$. Пусть $G \in \exp(X)$, $|G| = n$ и

$$\rho_H(G, F) \leqslant \varepsilon. \tag{3.2}$$

Для каждого $A \in \xi$ определим множество $H(A)$ по формуле:

$$H(A) = B(A, \varepsilon) \cap G.$$

Поскольку пересечение $A \cap F$ непусто, из (3.2) следует, что $H(A) \neq \varnothing$. Рассмотрим систему $\eta' = \{H(A) : A \in \xi\}$. Эта система, состоящая из подмножеств конечного множества G, является сцепленной. В самом деле, для любых двух множеств $A_1, A_2 \in \xi$ пересечение $A_1 \cap A_2 \cap F$ непусто. Значит,

$$\varnothing \neq B(A_1 \cap A_2, \varepsilon) \cap G \subset H(A_1) \cap H(A_2).$$

Дополним систему η' до некоторой максимальной сцепленной системы в G, которую, в свою очередь, дополним до (единственной) максимальной сцепленной системы η в X. По построению для любого $A \in \xi$ $B(A, \varepsilon) \cap G \in \eta$, следовательно, $B(A, \varepsilon)$ также является элементом η. Значит, $\rho_\lambda(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon$. Кроме того, $supp(\eta) \subset G$, $|G| = n$. Таким образом, $N(\xi, \varepsilon) \leqslant n$.

Из неравенства (3.1) сразу следует утверждение предложения. □

Предложение 3. *Порядок метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем сохраняется при переходе к подпространству.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) – метрический компакт, A – замкнутое подмножество X, $\xi \in \lambda(A)$ и $\varepsilon > 0$. В силу (1.1) имеем:

$$N(\xi, \varepsilon, \lambda(A)) \geqslant N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)). \tag{3.3}$$

Пусть $N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)) = n$ и м.с.с. $\eta \in \lambda_n(X)$ такова, что $\rho_\lambda(\eta, \xi) \leqslant \varepsilon$. Введем обозначения: $supp(\xi) = F$, $supp(\eta) = G$. При этом $F \subset A$, $|G| = n$.

Покажем, что

$$G \subset B(F, \varepsilon). \tag{3.4}$$

Рассмотрим систему

$$\gamma = \{B(\Phi, \varepsilon) \cap G : \Phi \in \xi, \Phi \subset F\}. \tag{3.5}$$

Поскольку $B(\Phi, \varepsilon) \in \eta$ для любого $\Phi \in \xi$, система γ является сцепленной системой подмножеств множества $\cup\gamma$, которое содержится в G. Дополним γ до м.с.с. γ' в $\cup\gamma$, а систему γ' дополним до единственной м.с.с. δ в X.

Покажем, что $\rho_\lambda(\delta, \xi) \leqslant \varepsilon$. Пусть $\Phi \in \xi$. Тогда пересечение $\Phi \cap F = \Phi'$ также является элементом ξ. В силу определения системы γ (3.5) $B(\Phi', \varepsilon) \cap (\cup\gamma) \in \gamma$. Следовательно, $B(\Phi, \varepsilon) \in \delta$, что и требовалось.

Таким образом, если $\cup\gamma \neq G$, то $\delta \in \lambda_{n-1}(X)$ и $\rho_\lambda(\xi, \delta) \leqslant \varepsilon$, что невозможно, поскольку $n = N(\xi, \varepsilon, \lambda(X))$. Значит, $\cup\gamma = G$. Но по определению системы γ имеет место включение $\cup\gamma \subset B(F, \varepsilon)$, откуда следует (3.4).

Для каждой точки $x \in G$ выберем точку $y(x) \in F$ так, что $\rho(x, y(x)) \leqslant \varepsilon$. Пусть $H = \{y(x) : x \in F\}$. Ясно, что $|H| \leqslant n$ и $H \subset B(G, \varepsilon)$. Рассмотрим систему подмножеств

$$\beta = \{B(\Phi, \varepsilon) \cap H : \Phi \in \eta\}.$$

Легко проверить, что β – сцепленная система. Дополним β до м.с.с. в H, а полученную при этом систему дополним до м.с.с. β' в X. В силу определения β имеем $\rho_\lambda(\beta', \eta) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\rho_\lambda(\xi, \beta') \leqslant 2\varepsilon$. Кроме того, $supp(\beta') \subset H$, и значит, $\beta' \in \lambda_n(F) \subset \lambda_n(A)$.

Таким образом, доказано неравенство:

$$N(\xi, 2\varepsilon, \lambda(A)) \leqslant N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)). \tag{3.6}$$

Пусть $k \in N$. В силу (3.3) и (3.6) имеют место следующие неравенства:

$$\frac{\ln N(\xi, 1/k, \lambda(X))}{\ln k} \leqslant \frac{\ln N(\xi, 1/k, \lambda(A))}{\ln k}$$
$$\leqslant \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln k}. \tag{3.7}$$

Во всех частях неравенств перейдем к верхнему пределу при $k \to \infty$. Пределы первой и второй дроби дадут соответственно $\overline{ord}(\xi, \lambda(X))$ и $\overline{ord}(\xi, \lambda(A))$. Согласно предложению 1,

$$\overline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln 2k}$$

$$= \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln k}.$$

Таким образом, предел третьей дроби в неравенстве (3.7) также равен $\overline{ord}(\xi, \lambda(X))$. Следовательно, $\overline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \overline{ord}(\xi, \lambda(A))$.

Равенство $\underline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \underline{ord}(\xi, \lambda(A))$ доказывается аналогично. $\square$

Предложение 4. *Для м.с.с. $\xi(x, F)$, где F – собственное замкнутое подмножество компакта (X, ρ), $|F| > 1$ и $x \notin F$, справедливы равенства*

$$\overline{ord}\ \xi(x, F) = \overline{\dim}_B(supp(\xi(x, F))) = \overline{\dim}_B(F),$$

$$\underline{ord}\ \xi(x, F) = \underline{\dim}_B(supp(\xi(x, F))) = \underline{\dim}_B(F).$$

Доказательство. Покажем, что при $\varepsilon \leqslant \min(\rho(x, F), diam(F))/3$ имеет место равенство

$$N(\xi(x, F), \varepsilon) = N(F, \varepsilon) + 1, \qquad (3.8)$$

из которого сразу следует утверждение предложения.

Прежде всего, заметим, что при указанных ограничениях на ε

$$N(F \cup \{x\}, \varepsilon) = N(F, \varepsilon) + 1.$$

Поскольку $supp(\xi(x, F)) = F \cup \{x\}$, в силу предложения 2 $N(\xi(x, F), \varepsilon) \leqslant N(F, \varepsilon) + 1$.

Остается доказать обратное неравенство. Пусть $N(\xi(x, F), \varepsilon) = n$, и м.с.с. $\eta \in \lambda(X)$ такова, что $\rho_\lambda(\xi(x, F), \eta) \leqslant \varepsilon$ и $|supp(\eta)| = n$. Тогда из $F \in \xi(x, F)$ следует, что $B(F, \varepsilon) \in \eta$. Значит, множество $G = B(F, \varepsilon) \cap supp(\eta)$ непусто и $G \in \eta$. Возьмем точки $y_1, y_2 \in F$ так, что $\rho(y_1, y_2) \geqslant 3\varepsilon$. Множества $B(\{x, y_1\}, \varepsilon)$ и $B(\{x, y_2\}, \varepsilon)$ принадлежат η, следовательно, пересечение

$$B(\{x, y_1\}, \varepsilon) \cap B(\{x, y_2\}, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)$$

имеет общую точку с носителем η. Но $B(x, \varepsilon) \cap B(F, \varepsilon) = \varnothing$, следовательно, $|G| < n$. При этом $B(G, \varepsilon) \in \xi(x, F)$. Поскольку $x \notin B(G, \varepsilon)$, такое возможно лишь в том случае, если $B(G, \varepsilon) \supset F$. Вместе с включением $G \subset B(F, \varepsilon)$ это дает неравенство $\rho_H(F, G) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $N(F, \varepsilon) \leqslant n - 1$. Равенство (3.8) доказано. $\square$

С помощью предложения 4 нетрудно привести примеры максимальных сцепленных систем с различными значениями верхнего и нижнего порядка метрической аппроксимации. Пусть F – замкнутое подмножество отрезка $[0, 1]$, построенное в [2, гл. 2, пример 6.1], для которого $0 < \underline{\dim}_B F < \overline{\dim}_B F < 1$. Тогда $\underline{ord}\ \xi(x, F) < \overline{ord}\ \xi(x, F)$ для любой точки $x \notin F$.

Утверждение 3. *Пусть $A = \{x_n : n \in N\}$ и $B = \{y_n : n \in N\}$ – дизъюнктные последовательности в компакте X, состоящие из попарно различных точек, такие, что $\rho(x_{2n}, y_{2n}) \leqslant 1/2^n$. Тогда $\overline{ord}\ \xi(A, B) = 0$.*

Доказательство. Из условия следует, что $[A] \cap [B] \neq \varnothing$. Поэтому м.с.с. $\xi(A, B)$ определена однозначно. Покажем, что $N(\xi(A, B), 1/2^n) \leqslant 4n + 1$. Зафиксируем n и рассмотрим сцепленную систему

$$\eta'(n) = \{A_i : i \leqslant 2n\} \cup \{B_i : i \leqslant 2n\}$$

$$\cup \{\{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}\}.$$

Тогда

$$\cup \eta'(n) = \{x_1, \ldots, x_{2n+1}, y_1, \ldots, y_{2n}\} = D,$$

$|D| = 4n + 1$. Дополним $\eta'(n)$ до максимальной сцепленной системы $\eta(n) \in \lambda X$. Легко проверить, что все множества, входящие в $\eta'(n)$, являются минимальными по включению элементами $\eta(n)$, любой элемент $F \in \eta(n)$ содержит какое-либо множество из $\eta'(n)$ и $supp(\eta(n)) = D$.

Покажем, что $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta(n)) \leqslant 1/2^n$. Для этого достаточно проверить, что для любого $F \in \eta(n)$ $B(F, 1/2^n) \in \xi(A, B)$. Если в F содержится множество A_i или B_i при $i \leqslant 2n$, то $F \in \xi(A, B)$ и, следовательно, $B(F, 1/2^n) \in \xi(A, B)$. Если же $F \supset \{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}$, то $B(F, 1/2^n) \ni y_{2n}$, поскольку $\rho(x_{2n}, y_{2n}) \leqslant 1/2^n$. Следовательно, в таком случае $A_{2n} \subset B(F, 1/2^n)$, и тогда множество $B(F, 1/2^n)$ также является элементом $\xi(A, B)$.

Итак, $\rho_\lambda(\xi(A, B), \lambda_{4n+1}(X)) \leqslant 1/2^n$. Значит, $N(\xi(A, B), 1/2^n) \leqslant 4n + 1$. В силу предложения 1 получаем

$$\overline{ord}\ \xi(A, B) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln(N(\xi(A, B), 1/2^n))}{\ln 2^n}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n + 1)}{n \ln 2} = 0.$$

$\square$

Пусть X – компакт. Миксером на $\lambda(X)$ (см. [7]) называется отображение $\mu : \lambda^3(X) \to \lambda(X)$, определяемое по формуле:

$$\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \cap \xi_2) \cup (\xi_1 \cap \xi_3) \cup (\xi_2 \cap \xi_3).$$

Утверждение 4. $supp(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \subset \bigcup_{i=1}^{3} supp(\xi_i)$.

Доказательство. Пусть F – минимальный по включению элемент $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Будем считать для определенности, что $F \in \xi_1 \cap \xi_2$. В ξ_1 существует минимальный по включению элемент F_1, лежащий в F. Аналогично в ξ_2 существует минимальный по включению элемент $F_2 \subset F$. Имеем: $F_1 \cup F_2 \in \xi_1 \cap \xi_2$ и

$F_1 \cup F_2 \subset F$. Поскольку F – минимальный элемент $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, отсюда следует, что $F = F_1 \cup F_2$. При этом $F_i \subset supp(\xi_i)$, $i = 1, 2$. Таким образом,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{3} supp(\xi_i),$$

откуда сразу следует искомое включение. □

Утверждение 5. Если $\rho_\lambda(\xi_i, \eta_i) \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, $\varepsilon > 0$, $\xi_i, \eta_i \in \lambda(X)$, то $\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Предложение 5. *Пусть* $\xi_i \in \lambda(X)$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда:*

$$\overline{ord}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \leqslant \max_i \overline{ord}(\xi_i). \tag{3.9}$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ введем обозначения:

$$n_i(\varepsilon) = N(\xi_i, \varepsilon),\ i = 1, 2, 3.$$

Пусть $\eta_i \in \lambda_{n_i(\varepsilon)}(X)$ и $\rho_\lambda(\eta_i, \xi_i) \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$. Тогда в силу утверждений 4 и 5 $\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) \leqslant \varepsilon$ и $|supp(\mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3))| \leqslant \sum_{i=1}^{3} n_i(\varepsilon)$. Следовательно,

$$n(\varepsilon) = N(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{3} n_i(\varepsilon). \tag{3.10}$$

Пусть для определенности

$$\overline{ord}(\xi_1) \geqslant \overline{ord}(\xi_i),\ i = 2, 3. \tag{3.11}$$

Если $\overline{ord}(\xi_1) = \infty$, то утверждение предложения очевидно. Пусть

$$\overline{ord}(\xi_1) = a = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln n_1(1/k)}{\ln k}. \tag{3.12}$$

В силу (3.10) имеем

$$\overline{ord}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln n(1/k)}{\ln k}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(n_1(1/k) + n_2(1/k) + n_3(1/k))}{\ln k}. \tag{3.13}$$

В силу (3.11) $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln n_i(1/k)}{\ln k} \leqslant a$, $i = 2, 3$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k))}{\ln k} = a. \tag{3.14}$$

Положим

$$b_k^j = \frac{n_j(1/k)}{\max_i n_i(1/k)},\ j = 1, 2, 3.$$

Ясно, что $b_k^j \leqslant 1$. В силу (3.14) имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(n_1(1/k) + n_2(1/k) + n_3(1/k))}{\ln k}$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k) \cdot \sum_{i=1}^{3} b_k^i)}{\ln k}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k))}{\ln k} + \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(\sum_{i=1}^{3} b_k^i)}{\ln k} = a.$$

Откуда в силу (3.12) и (3.13) следует утверждение предложения. □

Замечание 2. Неравенство (3.9) может быть строгим.

Возьмем м.с.с. $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \lambda(X)$ так, что $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ и $\overline{ord}(\xi) < \overline{ord}(\xi_3)$. Тогда $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi$ и

$$\overline{ord}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) < \max_i \overline{ord}(\xi_i).$$

Теорема 2. *Пусть* (X, ρ) *– бесконечный метрический компакт и* F *– собственное замкнутое подмножество* X. *Тогда существует м.с.с.* $\xi \in \lambda(X)$, *для которой* $\overline{ord}(\xi) = \overline{\dim}_B F$, $\underline{ord}(\xi) = \underline{\dim}_B F$ *и* $supp(\xi) = X$.

Доказательство. Пусть C – счетное всюду плотное подмножество в X. Разобьем C на два непересекающихся подмножества $A = \{a_n : n \in N\}$ и $B = \{b_n : n \in N\}$ так, что A и B состоят из попарно различных точек и для любого $n \in N$ выполняется неравенство $\rho(a_{2n}, b_{2n}) \leqslant 1/2^n$. Тогда в силу утверждения 3 и (1.4) для системы $\xi = \xi(A, B)$ получаем $\overline{ord}(\xi) = \underline{ord}(\xi) = 0$ и $supp(\xi) = [A] \cup [B] = X$. Таким образом, $\xi(A, B)$ – искомая система, если $\overline{\dim}_B F = 0$. Далее будем считать, что $\overline{\dim}_B F > 0$ и, следовательно, F бесконечно.

Если разность $X \setminus F$ состоит из единственной точки x, то в силу предложения 4 система $\xi(x, F)$ является искомой.

Пусть $|X \setminus F| \geqslant 2$. Выберем в множестве $X \setminus F$ две различные точки x и y. В $X \setminus \{x, y\}$ возьмем счетное всюду плотное множество, которое, как и выше, разобьем на две дизъюнктные последовательности $A = \{a_n : n \in N\}$ и $B = \{b_n : n \in N\}$, состоящие из попарно различных точек таких, что $\rho(a_{2n}, b_{2n}) \leqslant 1/2^n$. Рассмотрим м.с.с. $\xi(A, B)$, которая содержит множества $A_n = \{a_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $B_n = \{b_1, \ldots, b_n, a_{n+1}\}, n \in N$ в качестве минимальных элементов.

Положим $\xi_1 = \xi(A, B)$, $\xi_2 = \xi(x, F)$, $\xi_3 = \xi(y, F)$. Покажем, что система $\xi = \mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ является искомой.

Пусть $\overline{\dim}_B F = \alpha > 0$. В силу предложения 4 $\overline{ord}(\xi_i) = \alpha$ при $i = 2, 3$. Согласно утверждению 3 $\overline{ord}(\xi_1) = 0$. Поэтому в силу предложения 5

$$\overline{ord}(\xi) \leqslant \alpha. \tag{3.15}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что множества $B(x, 2\varepsilon)$, $B(y, 2\varepsilon)$ и $B(F, 2\varepsilon)$ попарно не пересекаются. Оценим снизу $N(\xi, 1/k)$ при $1/k < \varepsilon$. Пусть η – м.с.с. с конечным носителем, для которой

$$\rho_\lambda(\eta, \xi) \leqslant 1/k. \tag{3.16}$$

По построению система ξ содержит все множества вида $\{x, y, z\}$, где $z \in F$. Следовательно, множество

$$B(\{x, y, z\}, 1/k) = B(x, 1/k) \cup B(y, 1/k) \cup B(z, 1/k)$$

принадлежит η. Рассмотрим минимальное по включению множество $G \in \eta$ такое, что $G \subset B(\{x, y, z\}, 1/k)$. Покажем, что $G \cap B(z, 1/k) \neq \varnothing$.

Предположим противное. Тогда $G \subset B(x, 1/k) \cup B(y, 1/k)$. В силу (3.16) $B(G, 1/k) \in \xi$ и $B(G, 1/k) \subset B(x, 2/k) \cup B(y, 2/k)$. Однако по построению ξ всякое множество, лежащее в этой системе, пересекает F. Таким образом, получено противоречие с выбором числа ε.

Итак, для любой точки $z \in F$ существует $G \subset supp(\eta)$ такое, что $\rho(z, G) \leqslant 1/k$, следовательно, $|supp(\eta)| \geqslant N(F, 1/k)$. Таким образом, доказано, что

$$N(\xi, 1/k) \geqslant N(F, 1/k). \tag{3.17}$$

Следовательно,

$$\overline{ord}(\xi) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln N(\xi, 1/k)}{\ln k} \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln N(F, 1/k)}{\ln k} = \overline{\dim}_B F = \alpha.$$

Поэтому в силу неравенства (3.15) $\overline{ord}(\xi) = \alpha$.

Из (3.17) следует, что

$$\underline{ord}(\xi) \geqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N(F, 1/k)}{\ln k} = \underline{\dim}_B F = \beta. \tag{3.18}$$

Оценим сверху число $N(\xi, 1/2^n)$. При доказательстве утверждения 3 для м.с.с. $\xi(A, B)$ была построена система $\eta(n) = \eta_1(n)$ с $|supp(\eta(n))| = 4n + 1$, для которой $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta(n)) \leqslant 1/2^n$. Пусть $D(n)$ – $(1/2^n)$-сеть в F, содержащая $N(F, 1/2^n, \exp(F))$ точек, и пусть $\eta_2(n) = \xi(x, D(n))$, $\eta_3(n) = \xi(y, D(n))$. Тогда $\rho_\lambda(\xi_i, \eta_i) \leqslant 1/2^n$, $i = 2, 3$. Следовательно,

$$\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n))) \leqslant 1/2^n.$$

При этом в силу утверждения 4 и (1.2)

$$supp(\mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n))) \subset \{x, y\} \cup D(n) \cup supp(\eta_1(n)).$$

Следовательно,

$$|supp(\mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n)))| \leqslant N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 2 + 4n + 1.$$

Итак, $N(\xi, 1/2^n) \leqslant N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 4n + 3$. Таким образом, в силу предложения 1

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2^n)}{\ln 2^n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln(N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 4n + 3)}{\ln 2^n} = \underline{\dim}_B F,$$

что вместе с неравенством (3.18) дает равенство $\underline{ord}(\xi) = \underline{\dim}_B F$.

Покажем, что $supp(\xi) = X$. Как уже было отмечено, для любой точки $z \in F$ множество $\{x, y, z\}$ является элементом ξ. При этом легко проверить, что $\{x, y, z\}$ – минимальный по включению элемент ξ. Следовательно, $\{x, y\} \cup F \subset supp(\xi)$.

Пусть $U = X \setminus (\{x, y\} \cup F)$. Докажем, что

$$(A \cup B) \cap U \subset supp(\xi). \tag{3.19}$$

Пусть $a_n \in (A \cup B) \cap U$. Возможны следующие два случая:

1) Существует $m \geqslant n$ такое, что множество $A_m = \{a_1, \ldots, a_m, b_m\}$ пересекается с F.

Поскольку $A_m \in \xi_1 = \xi(A, B)$, получаем, что $\{x\} \cup A_n \in \xi_1 \cap \xi_2 \subset \xi$.

Покажем, что $\{x\} \cup A_m$ – минимальный по включению элемент ξ. Пусть $H \in \xi$ и $H \subset \{x\} \cup A_m$. Тогда $H \notin \xi_3$, поскольку $y \notin H$ и $F \not\subset H$. Следовательно, $H \in \xi_1 \cap \xi_2$. Таким образом, $x \in H$. Поскольку по построению $x \notin A \cup B$, множество $H \setminus \{x\}$ является элементом ξ_1. При этом A_m – минимальный элемент ξ_1. Следовательно, $H \setminus \{x\} = A_m$, и значит, $H = \{x\} \cup A_m$, что и требовалось. Таким образом, $a_n \in supp(\xi)$.

2) Для любого $m \geqslant n$ $A_m \cap F = \varnothing$.

В этом случае выберем произвольно точку $z \in F \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ и рассмотрим множество $A_n \cup \{x, z\}$. Как и в случае 1), множество $A_n \cup \{x, z\}$ лежит в системе ξ и является минимальным элементом этой системы. Следовательно, $a_n \in A_n \cup \{x, z\} \subset supp(\xi)$.

Итак, если $a_n \in (A \cup B) \cap U$, то $a_n \in supp(\xi)$. Легко видеть, что аналогичное утверждение верно и для точек $b_n \in (A \cup B) \cap U$. Включение (3.19) доказано.

Поскольку $(A \cup B) \cap U$ всюду плотно в U, из (3.19) следует, что $U \subset supp(\xi)$. □

Теорема 3. *Для любого бесконечного метрического компакта X и любого числа a такого, что $0 \leqslant a \leqslant \overline{\dim}_B X$, существует м.с.с. $\xi_a \in \lambda(X)$, для которой $\overline{ord}(\xi_a) = a$ и $supp(\xi_a) = X$.*

Доказательство. При $a < \overline{\dim}_B X$ утверждение теоремы сразу следует из теорем 1 и 2. Если $a = \overline{\dim}_B X$, то в качестве собственного подмножества $F \subset X$ с $\overline{\dim}_B F = a$ можно взять соответствующий ε-шар $B(x, \varepsilon)$, существование которого гарантирует утверждение 1, а затем снова применить теорему 2. □

Литература

1. *Вакулова (Кашуба) Е. В.* О носителях максимальных сцепленных систем // Труды ПГУ. Математика. 2004. № 11. С. 3–8.

2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: ИКИ, 2013. 404 с.

3. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.

4. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

5. *Fedorchuc V., Todorćevic S.* Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. Vol. 76. P. 125–150.

6. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form $\mathcal{F}(X)$ // Topology and its Applications. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

7. *van Mill J., van de Vel M.* On an internal property of absolute retracts // Topology Proc. 1979. Vol. 4. P. 193–200.

Поступила в редакцию 22.03.2019

References

1. *Vakulova (Kashuba) E. V.* O nositelyakh maksimal'nykh stseplennykh system [On the support of maximal linked systems]. *Tr. Petrozavodsk. gos. un-ta. Ser. Mat.* [Proceed. Petrozavodsk St. Univ. Ser. Math.]. 2004. No. 11. P. 3–8.

2. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. The Univ. of Chicago Press, 1997. 397 p.

3. *Fedorchuk V. V.* Troiki beskonechnykh iteratsii metrizuemykh funktorov [Triples of infinite iterates of metrizable functors]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Matem.* [Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.]. 1991. Vol. 36, no. 2. P. 411–433.

4. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii [General topology. Main constructions]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

5. *Fedorchuc V., Todorćevic S.* Cellularity of covariant functors. *Topology and its Applications.* 1997. Vol. 76. P. 125–150.

6. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form $\mathcal{F}(X)$. *Topology and its Applications.* 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

7. *van Mill J., van de Vel M.* On an internal property of absolute retracts. *Topology Proc.* 1979. Vol. 4. P. 193–200.

Received March 22, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

Фомкина Ольга Викторовна
студентка
Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185035
эл. почта: capmor17@gmail.com

CONTRIBUTORS:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441

Fomkina, Ol'ga
Petrozavodsk State University
33 Lenin Ave., 185035 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: capmor17@gmail