

УДК 556.555,556.555.4

РАВНОВЕСНЫЕ ПРОФИЛИ ПЛОТНОСТИ И ГЛУБИНА ТЕРМОКЛИНА В ОЗЕРАХ В ПЕРИОД ЛЕТНЕЙ СТРАТИФИКАЦИИ

С. Р. Богданов

*Институт водных проблем Севера КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН»
(пр. Александра Невского, 50, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185030)*

С использованием методов вариационного исчисления произведен расчет асимптотических профилей плотности, характеризующих равновесное состояние водной толщи озера после прекращения внешнего воздействия. В качестве определяющих параметров использованы потенциальная энергия и средняя по столбу плотность. В аналитическом виде получены два семейства профилей, представляющих два типа распределения плотности, ассоциируемых соответственно с двухслойной структурой водной толщи и возникновением перемешанного слоя. Рассчитаны также пороговые значения определяющих параметров, соответствующие изменению типа распределения. Верификация результатов расчета осуществлена для трех озер путем сравнения модельных профилей с экспериментальными данными, полученными с высоким вертикальным разрешением на пике летней стратификации. Для всех трех озер коэффициенты корреляции расчетных и экспериментальных рядов превышали значение 0,98. С использованием рассчитанных аналитических профилей разработан и апробирован новый алгоритм расчета глубины термоклина. Обсуждены варианты и возможности использования полученных результатов для количественного описания процессов турбулентного перемешивания.

Ключевые слова: вертикальные профили плотности; функция распределения объема по плотности; вариационное исчисление; энтропия; глубина термоклина

Для цитирования: Богданов С. Р. Равновесные профили плотности и глубина термоклина в озерах в период летней стратификации // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 9. С. 5–17. doi: 10.17076/lim2322

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН «Функционирование экосистемы Онежского озера и озерно-речных систем его водосборной территории в условиях климатических изменений и антропогенного воздействия» (FMEN-2026-0011).

S. R. Bogdanov. EQUILIBRIUM DENSITY PROFILES AND THERMOCLINE DEPTH IN LAKES DURING THE PERIOD OF SUMMER STRATIFICATION

Northern Water Problems Institute, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (50 Al. Nevsky Ave., 185030 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

Using variational calculus methods, asymptotic density profiles were produced, characterizing the equilibrium state of the lake water column attained after the cessation

of external forcing. Potential energy and column-averaged density were used as the governing parameters. Two analytical-form profile families were obtained, representing two types of density distributions associated, respectively, with the two-layer structure of the water column and the appearance of a mixed layer. The threshold values of the governing parameters corresponding to changes in the type of distribution were also calculated. Verification of the results was carried out for three lakes by comparing the modeled profiles with high vertical resolution experimental data collected at the peak of summer stratification. The correlation coefficients exceeded 0.98 for all the three lakes. Using the calculated analytical profiles, a new algorithm for deriving the thermocline depth was developed and tested. Options and possibilities of using the results for quantitative description of turbulent mixing processes are discussed.

Keywords: vertical density profiles; volume density distribution function; calculus of variations; entropy; thermocline depth

For citation: Bogdanov S. R. Equilibrium density profiles and thermocline depth in lakes during the period of summer stratification. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 9. P. 5–17. doi: 10.17076/lim2322

Funding. The study was funded from the Russian federal budget through state assignment to KarRC RAS “Functioning of the ecosystem of Lake Onego and lake-river systems of its catchment area under climate change and anthropogenic impact” (FMEN-2026-0011).

Введение. Постановка задачи. Обзор литературы

Озера представляют собой весьма чувствительный индикатор как климатических изменений, так и антропогенных воздействий [Pilla et al., 2021]. При этом характер этих изменений обычно отслеживается на основе мониторинга параметров эпилимниона, в первую очередь – температуры поверхностного слоя и его толщины. В гораздо меньшей степени, даже в рамках 1D-моделей [Kraus, Turner, 1967; Sundaram, Rehm, 1973], изучены тренды и отклики параметров, характеризующих глубинные слои или термическую структуру водного столба в целом. При этом характер указанных откликов далеко не всегда согласуется с тенденциями, обнаруживаемыми, например, при долговременном мониторинге поверхностной температуры, а соответствующие тренды могут существенно отличаться не только по величине, но даже по направлению [Pilla et al., 2020a, 2021].

Таким образом, для адекватной и комплексной оценки отклика системы на долгосрочные вариации внешних воздействий необходимо использовать более полную метрику термической структуры, которая включает не только характеристики поверхностного слоя. При этом обычно полнота этой метрики подразумевает описание профилей температуры и плотности с помощью большого числа морфологических параметров, характеризующих как границы различных слоев водного столба

(перемешанного слоя, термоклина, придонного слоя), так и характер и степень их стратификации. В этой связи подобные метрики могут включать значительное число параметров (см., например, [Naumenko, Guzivaty, 2023]); при этом в последних исследованиях особое внимание, как отмечено выше, уделяется характеристикам глубинных слоев. Альтернативный вариант комплексной оценки отклика системы – изучение профиля в целом.

Еще один важный тренд в изучении параметров термической структуры (особенно в контексте проблем ее изменений в результате турбулентного перемешивания) основан на использовании энергетических характеристик. В качестве примера можно привести работу [Reichl et al., 2022], где с использованием концепции аномальной потенциальной энергии (рассматриваемой как инструмент оценки «энергетической удаленности» данной термической структуры от состояния полного перемешивания) предложен метод оценки такого важнейшего параметра, как глубина перемешанного слоя. В рамках этого же направления весьма плодотворной оказалась идея использования виртуальных профилей, характеризующих некоторые асимптотические или гипотетические состояния. Так, при изучении эффективности перемешивания часто используется так называемая базовая потенциальная энергия, соответствующая энергии гидростатически устойчивого профиля, получаемого в результате адиабатической пересортировки слоев

столба жидкости в монотонном по плотности порядке [Winters et al., 1995].

В работах [Tabak, Tal, 2004; Venaille et al., 2017] предприняты попытки построения «равновесных» профилей температуры и плотности, основанные на использовании базовых принципов статистической физики, а также динамических инвариантов (включая энергию) в невязком пределе. При этом в рамках специальных предположений о тонкой структуре поля плотности осуществлен расчет числа микросостояний, соответствующих заданному макросостоянию (coarse-grained field), определяемому по результатам локального усреднения. На этой основе, в свою очередь, идентифицированы равновесные состояния водного столба, характеризующиеся гладкими устойчивыми профилями усредненной плотности. Такие состояния, достигаемые в рамках адиабатической динамики, трактуются как асимптотические и ассоциируются с аттракторами, как это принято в нелинейной динамике.

В данной работе представлена попытка построения равновесного гидростатически устойчивого профиля, основанная на использовании принципов вариационного исчисления, когда из множества допустимых по энергетическим показателям профилей выбирается в качестве асимптотически реализуемого тот, которому соответствует максимальная энтропия.

Методы

Постановка вариационной задачи

В рамках предлагаемого метода не рассматривается динамика системы и процессы перехода из одного равновесного состояния в другое. Основная задача заключается в отыскании вертикальных профилей плотности ρ в состояниях равновесия, достигаемых через некоторое время после прекращения внешнего воздействия. Соответствующий метод основан, как и в работах [Tabak, Tal, 2004; Venaille et al., 2017], на рассмотрении гипотетических равновесных состояний водной толщи, которые достигаются после завершения релаксационных процессов. Предполагается, что эти воздействия (mixing event), происходящие в течение ограниченного по времени интервала, порождают неустойчивость системы и приводят к перемешиванию водного столба. При этом следует иметь в виду, что соответствующие релаксационные процессы (обусловленные, в частности, затуханием турбулентности и турбулентного теплообмена) могут протекать в течение достаточно длительных промежутков времени.

В этой связи указанные равновесные состояния следует рассматривать как некоторую идеализацию, или асимптотические состояния, к которым стремится система. В реальных ситуациях такие состояния редко полностью достигаются, особенно в условиях переменных во времени внешних воздействий. Однако, как будет показано ниже, параметры равновесных состояний могут нести полезную информацию как о текущей термической структуре озера, так и о некоторых тенденциях ее трансформации.

В рамках простейшего (1D) приближения, которое используется в дальнейшем, принимается, что величина ρ зависит лишь от вертикальной координаты z , а функция $\rho(z)$ монотонно изменяется с глубиной, что соответствует гидростатической устойчивости. Состояние водного столба в положении равновесия в рамках указанного приближения можно также альтернативно описывать с помощью функции распределения $f(\rho)$ водной толщи по значениям плотности, с помощью которой доля того объема жидкости, плотность которого заключена в интервале $[\rho, \rho + \Delta\rho]$, вычисляется как $f(\rho)d\rho$. В рамках 1D-подхода функции $f(\rho)$ и $\rho(z)$ непосредственно связаны следующим соотношением:

$$f(\rho)d\rho = -dz/H, \quad (1)$$

где H – глубина. Плотность варьируется в диапазоне $[\rho_s, \rho_b]$, от минимального ρ_s на поверхности (surface) до максимального ρ_b у дна (bottom). Для определенности используется ось z , направленная вверх; $z = 0$ соответствует дну: $\rho(0) = \rho_b$, $\rho(H) = \rho_s$.

Следует при этом отметить, что функция распределения по плотности является источником наиболее прямых параметров, характеризующих перемешивание [Wykes et al., 2015]. Таким параметром может служить, например, дисперсия распределения $f(\rho)$. Еще один важный параметр, связанный с функцией $f(\rho)$, – энтропия $S = \int_{\rho_s}^{\rho_b} f \ln f d\rho$. В общем случае величину S можно рассматривать как меру неупорядоченности рассматриваемого распределения. При этом энтропия достигает максимума для такого распределения, которое при заданных физических ограничениях является наименее упорядоченным и структурированным и, соответственно, наиболее вероятным.

С другой стороны, каждая функция $f(\rho)$ однозначно связана с каким-то монотонным профилем плотности. При этом искомые равновесные профили можно рассматривать как характеристики равновесных состояний среды, достигаемых после завершения релаксационных процессов, вызванных внешним воздействием.

Поскольку эти самопроизвольно протекающие процессы связаны в основном с турбулентным перемешиванием и, соответственно, сглаживанием структурных различий, указанные состояния можно рассматривать и как наиболее вероятные, и как наименее упорядоченные и структурированные (в рамках имеющихся энергетических ограничений). В этой связи можно предположить, что искомые профили соответствуют состояниям с максимальной энтропией.

Таким образом, существо метода будет заключаться в идентификации равновесных («секкулярных») профилей $\rho(z)$ на основе использования принципа максимальной энтропии S . При этом ключевую роль в такой идентификации играет учет физических ограничений и соответствующих им «управляющих параметров».

В данной работе в качестве таких параметров принимаются величины $m = \int_0^H \rho dz$ (кг/м²) и $E_p = g \int_0^H \rho z dz$ (Дж/м²), которые численно равны, соответственно, массе и потенциальной энергии единичного по площади столба жидкости.

Вывод уравнения для равновесной функции распределения

С технической точки зрения отыскание функций $f(\rho)$ сводится к стандартной задаче вариационного исчисления: требуется найти максимум функционала $S = \int_{\rho_s}^{\rho_b} f \ln f d\rho$ при двух заданных ограничениях, которые, с учетом соотношения (1), можно представить в виде:

$$m = H \int_{\rho_s}^{\rho_b} \rho f d\rho; \quad E_p = gH \int_{\rho_s}^{\rho_b} \rho z f d\rho. \quad (2)$$

Указанную задачу удобно сформулировать с помощью кумулятивной функции распределения F , связанной с функцией f соотношением: $dF = f(\rho) d\rho$. При этом с учетом граничных условий $F(\rho_s) = 0$; $F(\rho_b) = 1$ для массы m после интегрирования первого из выражений (2) по частям получаем представление:

$$m = \rho_b H - H \int_{\rho_s}^{\rho_b} F d\rho. \quad (3)$$

С использованием соотношения (1) величину z , в свою очередь, можно выразить через F :

$$z = -H \int_{\rho_b}^{\rho} f d\rho = -H(F - 1). \quad (4)$$

С использованием последнего выражения величину потенциальной энергии после преобразования второго выражения (2) можно записать в виде (аналогичное выражение для потенциальной энергии через функцию распределения плотности представлено в [Wykes et al., 2015]):

$$E_p = (gH^2/2) \left(\rho_b + \int_{\rho_s}^{\rho_b} (F^2 - 2F) d\rho \right). \quad (5)$$

В результате для указанной задачи на условный экстремум получаем следующую функцию Лагранжа L :

$$L = \frac{dF}{d\rho} \ln \left(\frac{dF}{d\rho} \right) + \frac{\lambda_2}{2} (F^2 - F) - \lambda_2 F. \quad (6)$$

Здесь λ_2 и λ_3 – множители Лагранжа, которые подлежат определению из формул (3) и (5) по заданным значениям массы и потенциальной энергии. При определении физически возможного диапазона значений m и E_p следует принять во внимание, что при заданных значениях ρ_b и ρ_s плотности у дна и на поверхности величина m может изменяться в диапазоне $[\rho_s H, \rho_b H]$. Физически возможные значения E_p также ограничены; варьируются в промежутке $[g\rho_b z^{*2}/2 + g\rho_s (H^2 - z^{*2})/2, mgH/2]$, где $z^* = (m - \rho_s H)/(\rho_b - \rho_s)$.

Используя представление (6) для функции Лагранжа рассматриваемой вариационной задачи, уравнение Эйлера для функции $F(\rho)$ можно записать в виде: $\frac{d^2 F}{d\rho^2} = (\lambda_2 F - \lambda_3) \frac{dF}{d\rho}$.

После интегрирования получаем уравнение первого порядка:

$$dF/d\rho = (\lambda_2 F^2/2 - \lambda_3 F + A), \quad (7)$$

где A – константа интегрирования.

Функция F по определению монотонная, $dF/d\rho \geq 0$; соответственно, правая часть уравнения (7) также должна быть неотрицательной. Это условие выполняется при выполнении следующего ограничения на константы λ_2 , λ_3 и A :

$$A \geq \lambda_3^2/(2\lambda_2). \quad (8)$$

Результаты

Равновесные профили и функции распределения. Анализ особенностей

Уравнение (7) имеет аналитическое решение, вид которого зависит от знака параметра λ_2 . Таким образом, получаем два семейства 4-параметрических модельных профилей. А именно, при условии $\lambda_2 > 0$ параметр A в формуле (7), в соответствии с представлением (8), также будет положительным, и функция F имеет вид:

$$F(\rho) = B_1 (\tan(C_1 \rho + C_2) - \tan(C_1 \rho_s + C_2)),$$

где $B_1 = (\tan(C_1 \rho_b + C_2) - \tan(C_1 \rho_s + C_2))^{-1}$

Соответственно, для профиля плотности с учетом соотношения (4) получаем следующее аналитическое представление в виде обратной функции $z(\rho)$:

$$z = HB_1 (\tan(C_1 \rho_b + C_2) - (\tan(C_1 \rho + C_2))). \quad (9)$$

Константы C_1 и C_2 определяются по заданным значениям E_p и m из решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{m}{H} + \rho_b + B_1(\rho_b - \rho_s)(\tan(C_1 \rho_b + C_2) - \frac{B_1}{2C_1} \ln \frac{1+\tan^2(C_1 \rho_b + C_2)}{1+\tan^2(C_1 \rho_s + C_2)}) &= 0 \\ -\frac{2E_p}{gH^2} + \rho_b + \frac{B_1}{C_1} + 2B_1\left(\frac{m}{H} - \rho_b\right) \tan(C_1 \rho_b + C_2) - (\rho_b - \rho_s)B_1^2(\tan^2(C_1 \rho_b + C_2) + 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Чтобы исключить нефизичные профили с сингулярностями, константы C_1 и C_2 должны удовлетворять неравенствам:

$$C_1 < \frac{\pi}{\rho_b - \rho_s}; \quad -\frac{\pi}{2} - C_1 \rho_s < C_2 < \frac{\pi}{2} - C_1 \rho_b.$$

Результаты расчета семейства профилей (9) для разных значений энергии E_p приведены на рис. 1; для определенности представлен случай, когда для второго параметра использовалось значение $m = (\rho_s + \rho_b)H/2$. Для этого случая минимальное (двухслойная толща) и максимальное (полное перемешивание) значения E_p равны соответственно $E_{p,min} = gH^2(\rho_b + 3\rho_s)/8$ и $E_{p,max} = gH^2(\rho_b + \rho_s)/4$. При этом расчеты показали, что профилям вида (9) соответствуют значения потенциальной энергии в диапазоне от $E_{p,min}$ до порогового значения $E_{p,lstr} = gH^2(\rho_b + 2\rho_s)/6$, соответствующего линейной стратификации.

Для наглядности все три «пороговых» профиля также приведены на рис. 1 в виде сплошных полупрозрачных линий. Для предельных значений плотности использованы условные значения $\rho_s = 1000$ кг/м³ и $\rho_b = 1003$ кг/м³, разность которых соответствует характерным значениям $\rho_b - \rho_s$ в период летней стратификации.

Для профилей, описываемых семейством (9), характерно присутствие термоклина, степень размытости которого возрастает по мере приближения параметра энергии к пороговому значению $E_{p,lstr}$. Если при определении термоклина использовать условие максимальности градиента dp/dz , то, с учетом аналитического представления (9), для значения плотности ρ^* на глубине термоклина нетрудно получить представление $\rho^* = -C_2/C_1$, которое задает в неявном виде зависимость значения величины ρ^* от массы и потенциальной энергии.

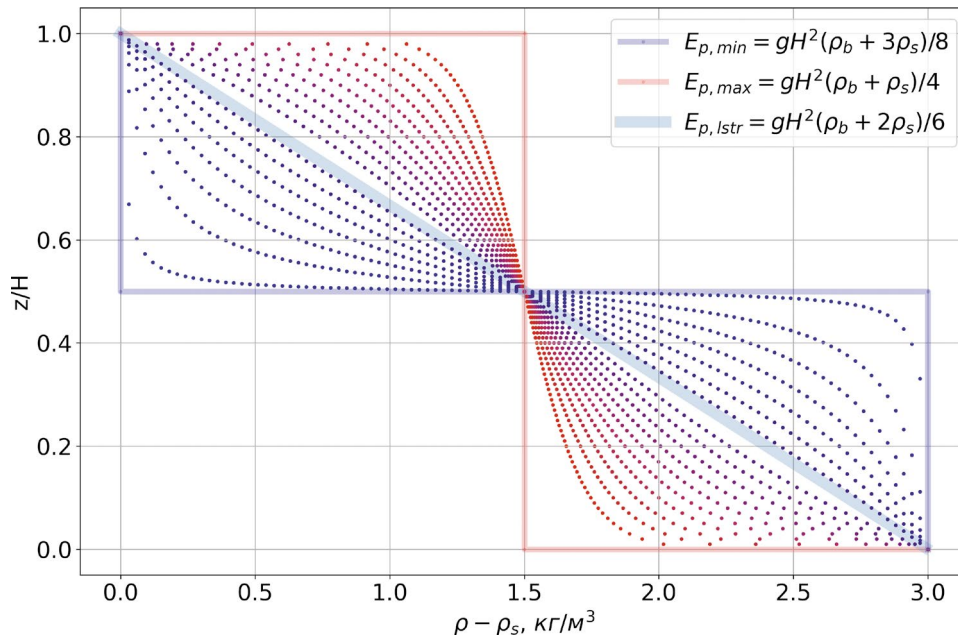


Рис. 1. Семейство профилей плотности для случая $\rho_s = 1000$, $\rho_b = 1003$, $m = (\rho_s + \rho_b)/2$ при монотонном увеличении энергии с шагом $gH^2(\rho_b - \rho_s)/160$. По мере увеличения энергии цвет линии изменяется от синего к красному. Полупрозрачные линии соответствуют состояниям водного столба с минимальным и максимальным значениями энергии E_p , а также случаю линейной стратификации

Fig. 1. A family of density profiles for the case $\rho_s = 1000$, $\rho_b = 1003$, $m = (\rho_s + \rho_b)/2$ with a monotonic increase in energy with a step of $gH^2(\rho_b - \rho_s)/160$. As energy increases, the line color changes from blue to red. The semi-transparent lines correspond to water column states with the minimum and maximum energy values E_p , as well as to the case of linear stratification

После отыскания величины ρ^* глубина z^* термоклина может быть непосредственно рассчитана по формуле (9). В отличие от традиционных методов, когда эта глубина определяется путем пошагового сравнения изменений плотности на соседних горизонтах, в описанном выше способе величина z^* вычисляется на основе предварительного расчета кумулятивных параметров, характеризующих водную толщу в целом.

Для случая $\lambda_2 < 0$ (что соответствует варьированию энергии в диапазоне $[E_{p,lstr}, E_{p,max}]$) решением уравнения (9) является равновесный профиль вида:

$$\frac{\rho - \rho_s}{\rho_b - \rho_s} = \left(\ln \frac{(a+1)(b-z)}{(b-1)(a+z)} \right) / \left(\ln \frac{(a+1)b}{(b-1)a} \right). \quad (11)$$

Константы a и b в данном случае также определяются по значениям массы и энергии, при этом нефизичные профили исключаются с использованием ограничений $a > 0$; $b > 1$. Для профилей, задаваемых соотношением (11), характерно наличие точки перегиба, появление которой можно рассматривать как признак формирования перемешанного слоя. При этом, однако, возникновение однородного слоя достигается лишь асимптотически, в пределе при $E_p \rightarrow E_{p,max}$. Соответствующее семейство профилей также приведено на рис. 1.

Сценарий эволюции профиля плотности, схематически представляемый рисунком 1, можно рассматривать как простейшую модель ветрового перемешивания, когда величины

ρ_s , ρ_b , m остаются неизменными, а потенциальная энергия изменяется от $E_{p,min}$ до $E_{p,max}$ на величину $\Delta E_p = gH^2(\rho_b - \rho_s)/8$. При использованных значениях ρ_s и ρ_b для озера глубиной 10 м это изменение потенциальной энергии составляет ~ 400 Дж/м². Для справки следует отметить, что конвертирование 100 Дж/м² ветровой энергии в потенциальную происходит, например, в случае, когда на водную поверхность воздействует ветер со скоростью 12 м/с в течение суток [Reichl et al., 2022].

С семейством профилей на рис. 1, представляющим модельную трансформацию профилей, с использованием формулы (1) можно сопоставить последовательность функций распределения, наглядно дополняющую картину перемешивания. Изменение функции распределения при изменении структуры от двухслойного состояния столба до состояния гомотермии представлено на рис. 2.

Форма равновесных профилей и вид функции распределения существенно зависят от значений параметров m и E_p . Так, например, следует отметить, что при $m \neq (\rho_s + \rho_b)/2$, согласно расчетам, возникновение линейной стратификации как промежуточного этапа процесса перемешивания возможно не во всей толще, а лишь в одном из слоев столба: приповерхностном, когда $m > (\rho_s + \rho_b)/2$, или придонном, когда $m < (\rho_s + \rho_b)/2$. Для иллюстрации на рис. 3 приведены семейства профилей

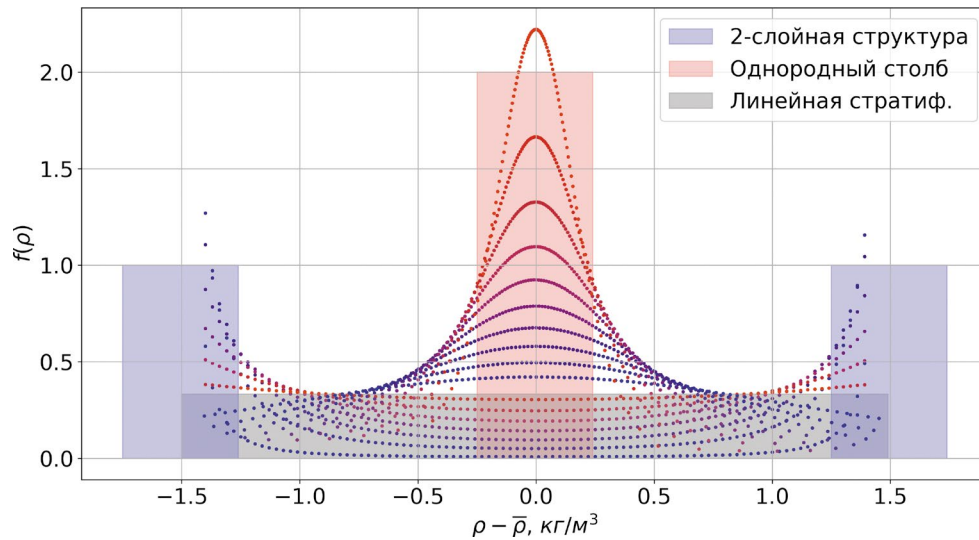


Рис. 2. Семейство функций распределения объема водной толщи по плотности, соответствующее семейству профилей на рис. 1. Полупрозрачные линии схематически представляют состояния с минимальной и максимальной энергией, а также случай линейной стратификации

Fig. 2. The family of water column distribution functions by density corresponding to the family of profiles in Fig. 1. The semi-transparent lines schematically represent states with the minimum and maximum energy values, as well as the case of linear stratification

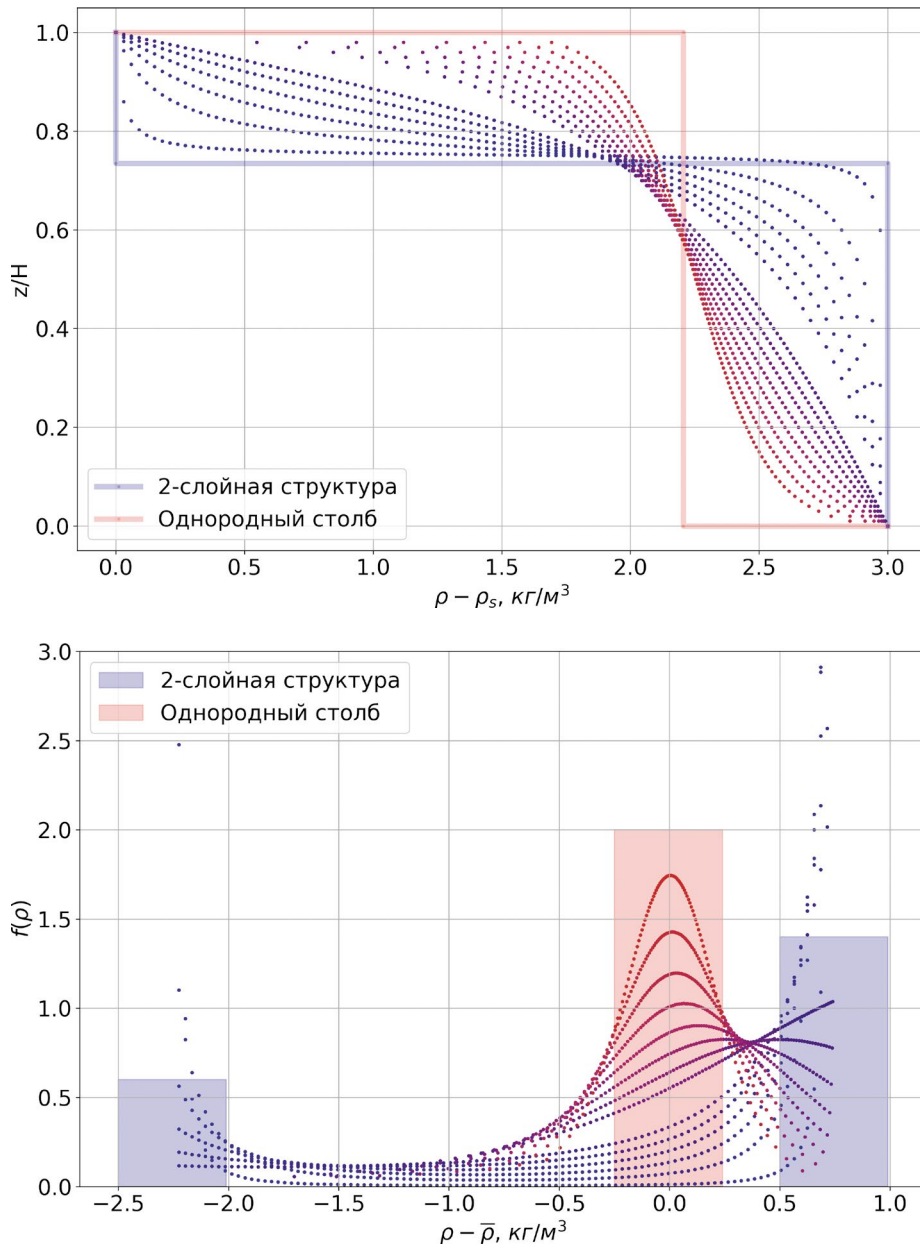


Рис. 3. Семейства профилей плотности (верхняя панель) и функции распределения $f(\rho)$ для случая $m = 0,75 H(\rho_s + \rho_b)$

Fig. 3. Families of density profiles (upper panel) and distribution functions $f(\rho)$ for case $m = 0,75 H(\rho_s + \rho_b)$

и функций распределения для случая, когда термоклин расположен на глубине $0,25 H$.

Следует также отметить, что оба семейства модельных профилей (9) и (11) включают четыре параметра (ρ_s , ρ_b , а также две константы, определяемые значениями m и E_p) и, строго говоря, не являются автомодельными. В частности, описание зависимости плотности от глубины по формуле (11) осуществляется с использованием двух дополнительных масштабов длины (определяемых по массе, глубине и

потенциальной энергии), связанных с константами a и b . В свою очередь, в случае формулы (9) также необходимо использовать, помимо ρ_s и ρ_b , два характерных калибровочных значения для плотности ρ , связанных с константами C_1 и C_2 . Одно из этих значений – значение ρ^* плотности на глубине термоклина, второе можно отождествить с величиной C_1^{-1} . Оба этих калибровочных значения рассчитываются из уравнений (10) по заданным значениям ρ_s , ρ_b , m , E_p .

*Верификация модельных профилей.
Сравнение с экспериментом.
Выбор объектов*

Как уже отмечалось, рассчитанные модельные профили описывают некоторые асимптотические состояния водного столба (возникающие как результат отклика системы на внешнее воздействие и адаптацию толщи), которые в реальных условиях редко достигаются из-за вариативности внешних воздействий и тепловой инерции системы. В этой связи при выборе объектов для апробации метода на первый взгляд может показаться, что наиболее подходящими являются мелководные озера, в силу их малой инерционности [Toffolon et al., 2022]. Однако это преимущество нивелируется вариативностью внешних воздействий и его большей значимостью именно в малых озерах (изменения потенциальной энергии, приводящие к существенной трансформации структуры профиля, пропорциональны H^2 , как было показано выше).

С другой стороны, если ограничиться рассмотрением семейства равновесных профилей (9), можно ожидать, что наиболее близкими к рассчитанным модельным профилям могут оказаться реальные профили, характерные для того короткого периода устойчивой летней стратификации, который соответствует, например, максимальному годовому теплосодержанию Q (предполагая, что именно в этот момент реализуется максимально устойчивое стратифицированное состояние).

В качестве альтернативного индикатора при выборе максимально устойчивой равновесной летней стратификации можно использовать так называемое относительное термическое сопротивление перемешиванию, RTR (Relative Thermal Resistance to Mixing) [Pilla et al., 2020b]. Этот широко используемый кумулятивный параметр вычисляется по формуле:

$$RTR = (\rho_b - \rho_s) / (\rho_{4^\circ C} - \rho_{5^\circ C}),$$

где $\rho_{4^\circ C}$ и $\rho_{5^\circ C}$ – значения плотности при температурах 4 и 5 °C соответственно. День, когда величина RTR принимает максимальное значение, принято называть медианным. Параметр RTR и связанное с ним понятие медианы оказались весьма удобными при сравнении термической устойчивости водного столба при использовании данных, полученных в разные летние дни и в разные годы. В частности, можно ожидать, что наиболее близкими к рассчитанным модельным равновесным профилям могут оказаться такие реальные профили, которые характерны для того периода устойчивой летней стратификации, когда параметр RTR принимает

близкие к максимальному значения. Иначе говоря, в контексте задачи верификации полученных в данной работе равновесных профилей наиболее подходящими для сравнения будут те экспериментальные профили, которые получены в медианный день года или в близкие к нему дни.

Используя указанный критерий выбора объектов и экспериментальных данных, для верификации рассчитанных равновесных профилей была использована представленная в открытом доступе база данных по летней термической стратификации трех крупных озер Анси, Бурже и Женевского (Annecy, Bourget and Geneva) Центральной Европы [Pilla et al., 2020b], созданная по результатам многолетних измерений. При этом для анализа отобраны профили, полученные в наиболее близкие к медиане дни каждого года (когда RTR было максимальным). Во всех трех озерах измерения проводились в точках наибольшей глубины во всей толще от поверхности до дна. Выбранные температурные профили были приведены к универсальному виду, сгруппированы в экспериментальные серии с одинаковым шагом 0,5 м по вертикали; при необходимости использовалась линейная интерполяция. Детали отбора и обработки экспериментальных температурных профилей представлены в разделе 2.2 статьи [Richardson et al., 2017]. Пересчет температуры в плотность осуществлялся по формуле Чена – Миллеро [Chen, Millero, 1986].

Для сопоставления отобранных экспериментальных профилей с равновесным модельным профилем (9) требуется конкретизировать значения констант C_1 и C_2 . Эти значения, в свою очередь, можно найти из системы уравнений (10), после непосредственного вычисления массы m и потенциальной энергии E_p по опытным данным. Однако с технической точки зрения такая процедура труднореализуема, поскольку обе величины m и E_p должны быть определены с весьма высокой степенью точности. Так, например, вариации ΔE_p потенциальной энергии при трансформации профиля от двухслойного к линейно стратифицированному составляют $gH^2(\rho_b - \rho_s)/24$, и, соответственно, абсолютная погрешность вычисления E_p во всяком случае не должна превышать указанного значения. Поскольку эта погрешность, с учетом представления $E_p \sim mgH \sim \bar{\rho}gH^2$ (здесь $\bar{\rho} = m/H$), определяется в основном погрешностью ΔH измерения величины H , ее можно представить в виде $2\bar{\rho}gH\Delta H$. Чтобы эта погрешность хотя бы не превышала указанного характерного значения вариаций величины E_p , должно выполняться условие: $\Delta H/H \leq (\rho_b - \rho_s)/(48\bar{\rho})$, причем, строго говоря, полученное неравенство здесь следует рассматривать как строгое,

заменяя $\leq$ на $\ll$. Характерным для правой части неравенства является значение 10^{-4} ; это означает, что относительная погрешность измерения величины H не должна превышать 0,01 % – для озера глубиной 10 м это соответствует погрешности в 1 мм. Измерить H с такой точностью

не удастся, поэтому константы C_1 и C_2 определялись по методу наименьших квадратов.

На рис. 4 представлены результаты сопоставления рассчитанных равновесных профилей с соответствующими экспериментальными на примере озера Бурже. Всего было отобрано

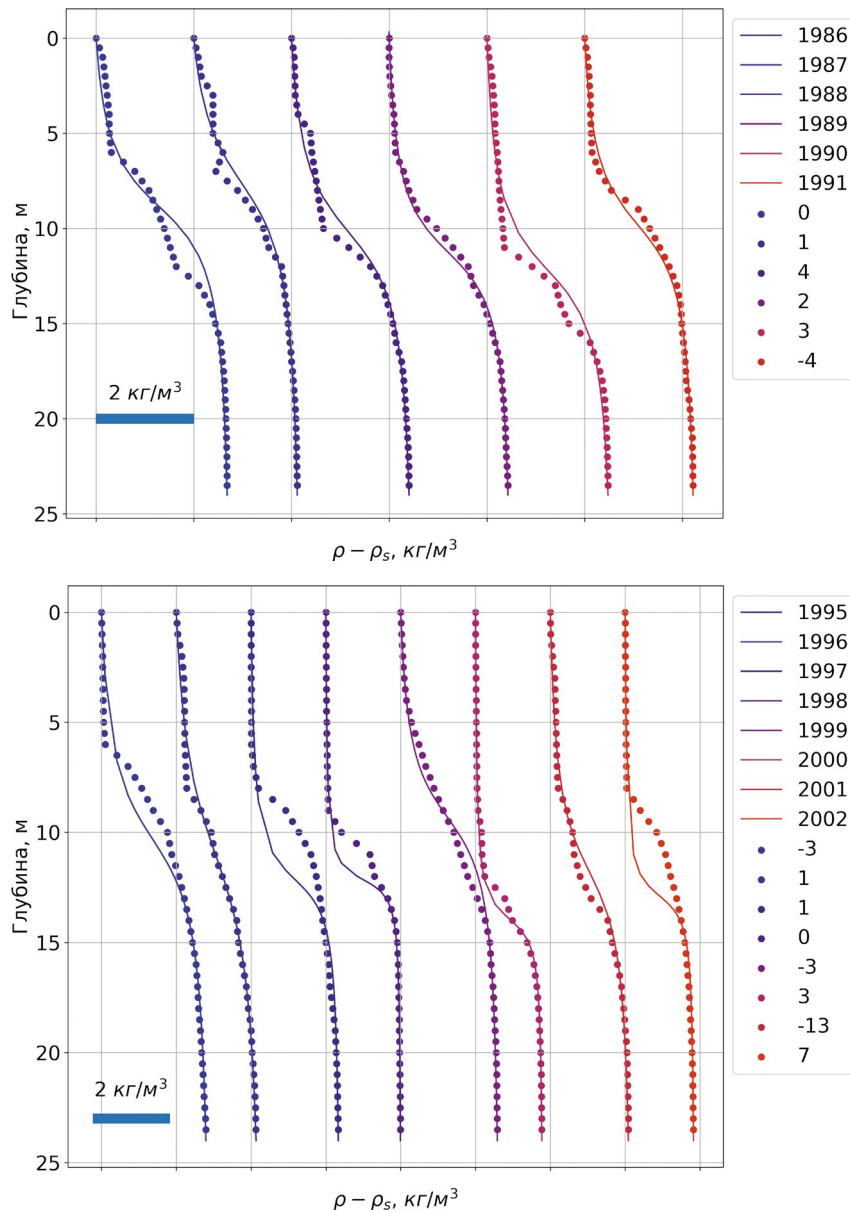


Рис. 4. Профили плотности в озере Бурже в период максимальной летней стратификации: с 1986 по 1991 (верхняя панель) и с 1995 по 2008 (нижняя панель) годы. Линии с маркерами представляют экспериментальные профили, сплошные линии – рассчитанные по формуле (9) модельные. Для каждой пары линий в легенде представлен год измерений и номер соответствующего дня, отсчитываемый от медианы

Fig. 4. Density profiles in Lake Bourget during the period of the maximum summer stratification: from 1986 to 1991 (upper panel) and from 1995 to 2008 (lower panel). The lines with markers represent experimental profiles, the solid lines represent model profiles calculated using formula (9). For each pair of lines, the legend shows the year of measurements and the corresponding day number, measured from the median

14 профилей (по одному за 14 лет наблюдений), описывающих термическую структуру верхнего 25-метрового слоя в дни, наиболее близкие к медианным. Для всех приведенных пар профилей (экспериментального и модельного) коэффициент корреляции Пирсона составлял не менее 0,98.

Аналогичные результаты получены при обработке профилей плотности для озер Анси и Женевского. Для примера на рис. 5 представлены экспериментальные и расчетные профили для периодов с 1998 по 2005 и с 1974 по 1989 годы соответственно. Коэффициент

корреляции варьировался в пределах от 0,935 до 0,995 и от 0,980 до 0,999 для озер Анси и Женевского соответственно.

Как уже отмечалось, модельные профили (9) следует рассматривать в качестве гипотетических или асимптотических, в том смысле, что они могут быть реализованы лишь в случае и как результат релаксации системы к состоянию равновесия при условии отсутствия внешних воздействий. Вероятность экспериментального обнаружения подобных профилей весьма мала. Однако при апробации метода в качестве альтернативы «равновесности» можно

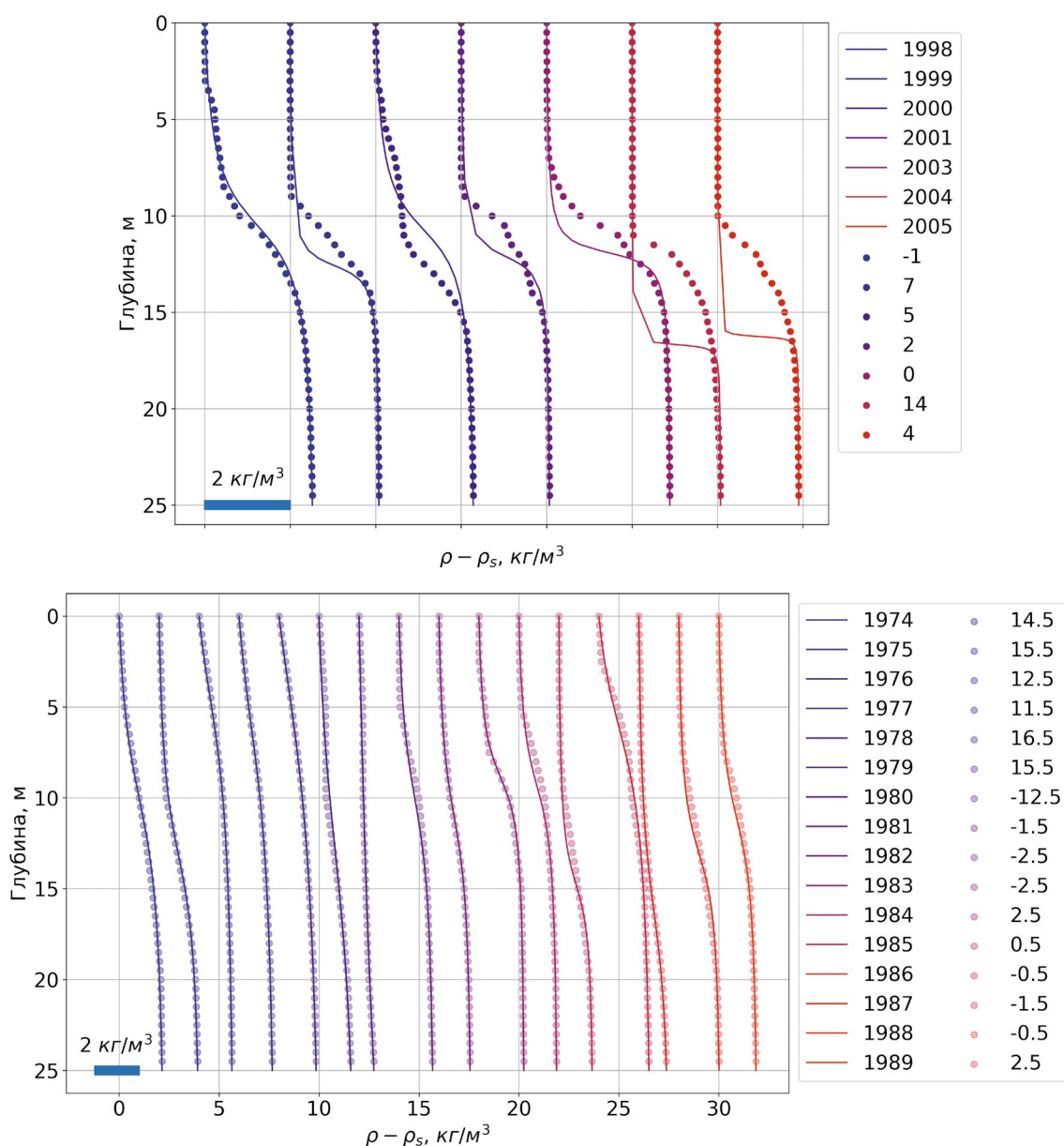


Рис. 5. Экспериментальные и модельные профили для озера Анси (верхняя панель) и Женевского (нижняя панель)

Fig. 5. Experimental and model profiles for Lake Annecy (top panel) and Lake Geneva (bottom panel)

использовать свойство «средневзвешенности». А именно, при условии стабильности климатических параметров в течение какого-то количества лет можно предположить, что и параметры системы будут стабильными и воспроизводиться от года к году, хотя и с некоторыми погрешностями. В этом случае, при наличии необходимых экспериментальных данных в рассматриваемом промежутке лет, можно ввести в рассмотрение понятие «климатического года», параметры для каждого дня которого можно рассчитать как средние значения по всем годам наблюдений [Piccolroaz et al., 2013] и считать их репрезентативными для «климатического года».

В частности, вместо одного профиля, характеризующего водный столб в определенный день одного года, можно рассмотреть усредненный за многие годы профиль для соответствующего дня. Подобное усреднение (отчасти устраняющее межгодовую изменчивость) позволяет выявить наиболее вероятную конфигурацию профиля для каждого рассматриваемого дня гипотетического «климатического года». Хотя подобные профили, строго говоря, не будут совпадать с равновесными, сама процедура их построения нивелирует различные внешние воздействия, хотя бы за счет усреднения случайных по времени фаз этих воздействий.

Можно также ожидать, что указанные усредненные профили будут наиболее близки к равновесным в дни, близкие к медианным.

Расчеты показали, что при использовании данных по «климатическому году» корреляция эксперимента и модели существенно возрастает. Для примера на рис. 6 представлены профили для всех трех озер, полученные при усреднении экспериментальных данных по соответствующим интервалам лет (см. рис. 4, 5). Там же представлены соответствующие модельные профили, рассчитанные по формуле (9). Коэффициент корреляции модельных и экспериментальных рядов во всех трех случаях превышал значение 0,99.

Заключение

В работе введено понятие равновесных профилей плотности и с использованием вариационных методов произведен их расчет. Формы равновесных профилей получены в аналитическом виде, что позволяет непосредственно анализировать зависимость ключевых характеристик профиля от основного определяющего параметра – потенциальной энергии. В частности, предложен и апробирован новый метод расчета глубины термоклина.

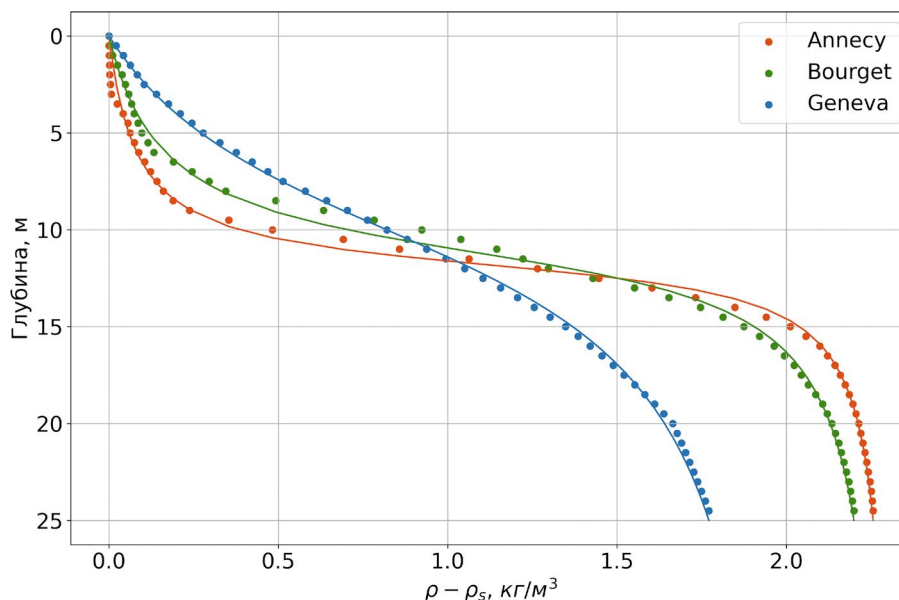


Рис. 6. Средние по климатическому году профили плотности для медианных дней озер Анси, Бурже, Женевского (маркерные линии) и соответствующие им модельные профили (сплошные линии). Для всех трех озер рассматривался лишь верхний 25-метровый слой водного столба

Fig. 6. Climatic-year average density profiles for median days for Lakes Annecy, Bourget, and Geneva (marker lines) and the corresponding model profiles (solid lines). For all three lakes, only the upper 25-meter layer of the water column was considered

Равновесные профили – лишь продукт идеализированной модели, представляющий асимптотическое состояние водной толщи. Однако в работе показано, что экспериментальные профили, полученные в период максимальной летней стратификации, весьма хорошо (с коэффициентом корреляции 0,98 и выше) описываются аналитическими зависимостями, полученными в рамках этой модели.

Можно предположить, что в целом потенциал модели не исчерпывается приведенными результатами и может быть востребован при решении некоторых других актуальных лимнологических задач. В частности, преимущества аналитического представления профиля (и, соответственно, расчета его параметров) могут оказаться полезными при выявлении климатических трендов в ходе анализа большого объема данных, полученных при длительных измерениях. Эти же преимущества можно использовать при решении проблем классификации озер, например, при сравнительном анализе усредненных медианных профилей для озер, отличающихся по географической широте, глубине, площади зеркала.

Сравнение энергетических параметров (прежде всего – потенциальной энергии и эксергии), рассчитываемых по отдельности для экспериментального и модельного профилей, может служить основой для количественной оценки степени близости системы к состоянию равновесия, а также (при рассмотрении переходов из одного энергетического состояния в другое) эффективности перемешивания. Значительный потенциал в отборе критериев и оценке интенсивности перемешивания заключен и в изучении равновесных функций распределения по плотности, которые в рамках предложенного метода задаются в аналитическом виде.

Метод равновесных профилей может оказаться полезным и при решении проблемы, связанной с выявлением активных и пассивных слоев водной толщи, разнесением понятий «перемешанный» и «перемешиваемый» слой (дилемма «mixing» vs «mixed» [Sutherland et al., 2014]). Например, при сравнении экспериментального и модельного профилей можно рассматривать не весь столб жидкости, а какую-то его часть, исключая, например, приповерхностные, хорошо перемешанные, или придонные слои. В общем случае степень близости базовой и аппроксимирующей кривой будет изменяться, при этом можно ожидать, что кривые будут максимально близки для тех слоев, в которых процессы перемешивания уже практически завершились.

Наконец, следует также упомянуть о возможности модификаций самого метода вывода равновесных профилей. Возможные варианты включают, в частности, использование (вместо заданных ρ_s и ρ_b) граничных условий второго и третьего рода на границах, а также включение в рассмотрение дополнительных (по отношению к m и E_p) определяющих параметров.

Литература

- Chen C.-T. A., Millero F. J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. Vol. 31, no. 3. P. 657–662. doi: 10.4319/lo.1986.31.3.0657
- Kraus E. B., Turner J. S. A one-dimensional model of the seasonal thermocline: II. The general theory and its consequences // *Tellus*. 1967. Vol. 19, iss. 1. P. 98–106. doi: 10.3402/tellusa.v19i1.9753
- Naumenko M., Guzivaty V. Seasonal evolution of stable thermal stratification in central area of Lake Ladoga // *Limnol. Rev.* 2023. Vol. 23. P. 177–189. doi: 10.3390/limnolrev23030011
- Piccolroaz S., Toffolon M., Majone B. A simple lumped model to convert air temperature into surface water temperature in lakes // *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 2013. Vol. 17, no. 8. P. 3323–3338. doi: 10.5194/hess-17-3323-2013
- Pilla R. M., Anneville O. Time series dataset of water temperature profiles during stable summer stratification in Lakes Annecy, Bourget and Geneva // *Portail Data INRAE, V1. Recherche Data Gouv.* 2020b. doi: 10.15454/YOLA0Y
- Pilla R. M., Mette E. M., Williamson C. E. et al. Global data set of long-term summertime vertical temperature profiles in 153 lakes // *Sci. Data*. 2021. Vol. 8. Art. 200. doi: 10.1038/s41597-021-00983-y
- Pilla R. M., Williamson C. E., Adamovich B. V. Deeper waters are changing less consistently than surface waters in a global analysis of 102 lakes // *Sci. Rep.* 2020a. Vol. 10. Art. 20514. doi: 10.1038/s41598-020-76873-x
- Reichl B. G., Adcroft A., Griffies S. M., Hallberg R. A potential energy analysis of ocean surface mixed layers // *J. Geophys. Res. Oceans*. 2022. Vol. 127. e2021JC018140. doi: 10.1029/2021JC018140
- Richardson D. C., Melles S. J., Pilla R. M., Hetherington A. L., Knoll L. B., Williamson C. E., Kraemer B. M., Jackson J. R., Long E. C., Moore K., Rudstam L. G., Rusak J. A., Saros J. E., Sharma S., Strock K. E., Weathers K. C., Wigdahl-Perry C. R. Transparency, geomorphology and mixing regime explain variability in trends in lake temperature and stratification across Northeastern North America (1975–2004) // *Water*. 2017. Vol. 9(6). P. 442. doi: 10.3390/w9060442
- Sundaram T. R., Rehm R. G. The seasonal thermal structure of deep temperate lakes // *Tellus*. 1973. Vol. 25. P. 157–168. doi: 10.1111/j.2153-3490.1973.tb01602.x
- Sutherland G., Reverdin G., Marié L., Ward B. Mixed and mixing layer depths in the ocean surface boundary layer under conditions of diurnal stratification // *Geophys. Res. Lett.* 2014. Vol. 41, no. 23. P. 8469–8476. doi: 10.1002/2014GL061939

Tabak E. G., Tal F. A. Mixing in simple models for turbulent diffusion // *Commun. Pure Appl. Maths.* 2004. Vol. 57, no. 5. P. 563–589. doi: 10.1002/cpa.20012

Toffolon M., Yousefi A., Piccolroaz S. Estimation of the thermally reactive layer in lakes based on surface water temperature // *Water Resour. Res.* 2022. Vol. 58. e2021WR031755. doi: 10.1029/2021WR031755

Venaille A., Gostiaux L., Sommeria J. A statistical mechanics approach to mixing in stratified fluids // *J. Fluid Mech.* 2017. Vol. 810. P. 554–583. doi: 10.1017/jfm.2016.721

Winters K., Lombard P., Riley J., D'Asaro E. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids // *J. Fluid Mech.* 1995. Vol. 289. P. 115–128. doi: 10.1017/S002211209500125X

Wykes M. S. D., Hughes G. O., Dalziel S. B. On the meaning of mixing efficiency for buoyancy-driven mixing in stratified turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 781. P. 261–275. doi: 10.1017/jfm.2015.462

References

Chen C.-T. A., Millero F. J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range. *Limnol. Oceanogr.* 1986;31(3):657–662. doi: 10.4319/lo.1986.31.3.0657

Kraus E. B., Turner J. S. A one-dimensional model of the seasonal thermocline: II. The general theory and its consequences. *Tellus.* 1967;19(1):98–106. doi: 10.3402/tellusa.v19i1.9753

Naumenko M., Guzivaty V. Seasonal evolution of stable thermal stratification in central area of Lake Ladoga. *Limnol. Rev.* 2023;23:177–189. doi: 10.3390/limnolrev23030011

Piccolroaz S., Toffolon M., Majone B. A simple lumped model to convert air temperature into surface water temperature in lakes. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 2013; 17(8):3323–3338. doi: 10.5194/hess-17-3323-2013

Pilla R. M., Anneville O. Time series dataset of water temperature profiles during stable summer stratification in Lakes Annecy, Bourget and Geneva. *Portail Data INRAE, V1. Recherche Data Gouv.* 2020. doi: 10.15454/YOLA0Y

Pilla R. M., Mette E. M., Williamson C. E. et al. Global data set of long-term summertime vertical temperature

profiles in 153 lakes. *Sci. Data.* 2021;8:200. doi: 10.1038/s41597-021-00983-y

Pilla R. M., Williamson C. E., Adamovich B. V. Deeper waters are changing less consistently than surface waters in a global analysis of 102 lakes. *Sci. Rep.* 2020;10:20514. doi: 10.1038/s41598-020-76873-x

Reichl B. G., Adcroft A., Griffies S. M., Hallberg R. A potential energy analysis of ocean surface mixed layers. *J. Geophys. Res. Oceans.* 2022. Vol. 127. e2021JC018140. doi: 10.1029/2021JC018140

Richardson D. C., Melles S. J., Pilla R. M., Hetherington A. L., Knoll L. B., Williamson C. E., Kraemer B. M., Jackson J. R., Long E. C., Moore K., Rudstam L. G., Rusak J. A., Saros J. E., Sharma S., Strock K. E., Weathers K. C., Wigdahl-Perry C. R. Transparency, geomorphology and mixing regime explain variability in trends in lake temperature and stratification across Northeastern North America (1975–2004). *Water.* 2017;9(6):442. doi: 10.3390/w9060442

Sundaram T. R., Rehm R. G. The seasonal thermal structure of deep temperate lakes. *Tellus.* 1973;25:157–168. doi: 10.1111/j.2153-3490.1973.tb01602.x

Sutherland G., Reverdin G., Marié L., Ward B. Mixed and mixing layer depths in the ocean surface boundary layer under conditions of diurnal stratification. *Geophys. Res. Lett.* 2014;41(23):8469–8476. doi: 10.1002/2014GL061939

Tabak E. G., Tal F. A. Mixing in simple models for turbulent diffusion. *Commun. Pure Appl. Maths.* 2004; 57(5):563–589. doi: 10.1002/cpa.20012

Toffolon M., Yousefi A., Piccolroaz S. Estimation of the thermally reactive layer in lakes based on surface water temperature. *Water Resour. Res.* 2022;58: e2021WR031755. doi: 10.1029/2021WR031755

Venaille A., Gostiaux L., Sommeria J. A statistical mechanics approach to mixing in stratified fluids. *J. Fluid Mech.* 2017;810:554–583. doi: 10.1017/jfm.2016.721

Winters K., Lombard P., Riley J., D'Asaro E. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *J. Fluid Mech.* 1995;289:115–128. doi: 10.1017/S002211209500125X

Wykes M. S. D., Hughes G. O., Dalziel S. B. On the meaning of mixing efficiency for buoyancy-driven mixing in stratified turbulent flows. *J. Fluid Mech.* 2015; 781:261–275. doi: 10.1017/jfm.2015.462

Поступила в редакцию / received: 02.03.2026; принята к публикации / accepted: 07.05.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Богданов Сергей Рэмович

д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

e-mail: Sergey.R.Bogdanov@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Bogdanov, Sergey

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher